Lección n°2: El modelo determinista de P.Constantin

USFQ, noviembre 2015

Índice

Introducción

En la lección anterior estudiamos brevemente tres resultados de la teoría K41 en donde insistimos en el hecho que, en esta teoría, estos resultados son obtenidos estadísticamente y están basados en hipótesis las cuales son cuestionadas hasta nuestros días pues carecen de una deducción matemática rigurosa. Con el objetivo de validar las leyes propuestas por la teoría K41 para la descripción de un fluido en estado turbulento una parte activa de la investigación actual consiste en estudiar estas leyes en el marco de un modelo de tipo determinista en donde las ecuaciones de base están dadas por las ecuaciones de Navier-Stokes

$$\partial_t u + u \cdot \nabla u - \nu \Delta u + \nabla p = f.$$

Estas ecuaciones diferenciales en derivadas parciales describen la evolución de un fluido en el transcurso del tiempo sobre el cual actúa una fuerza exterior f. En este sentido el objetivo de esta lección es presentar el modelo matemático de tipo determinista propuesto por P. Constantin[1] para el estudio de la ley de disipación de energía de acuerdo a la teoría K41.

Para comenzar hablaremos del fenómeno físico que deseamos describir y los elementos necesarios que debemos considerar en un modelo de tipo determinista. Nos concentraremos en la segunda ley de la teoría K41, conocida como ley de la disipación de energía, la cual caracteriza la tasa de disipación de energía cinética cuando el fluido se encuentra en estado turbulento. Consideremos entonces un fluido viscoso e incompresible que se encuentra en el espacio $\mathbb{R}^3$ en donde la fuerza exterior f introduce la energía cinética en el fluido a un escala de longitud fija $\ell_0 > 0$ y de manera constante en el tiempo, es decir, la fuerza $f = f(x)$ no depende de la variable temporal por lo que es denominada fuerza estacionaria. Notando ε la tasa de disipación de energía cinética y por U la velocidad característica del fluido la ley de disipación de energía nos dice que si el fluido se encuentra en estado turbulento entonces ε verifica la relación

$$\varepsilon \approx \frac{U^3}{\ell_0}.$$

Cuando estudiamos esta ley de manera rigurosa en el marco de un modelo determinista necesitamos, en primer lugar, definiciones precisas sobre cada termino de la relación arriba escrita, en otras palabras debemos definir de manera precisa los siguientes elementos:

(1) El campo de velocidades del fluido $u(t, x)$.

(2) Un promedio adecuado respecto a la variable temporal y a la variable espacial $\langle \cdot \rangle$ en donde a partir de este promedio y del campo de velocidades del fluido definiremos la velocidad característica U y la tasa de disipación promedio ε.

(3) Una herramienta matemática que nos permita caracterizar (de manera teórica) el estado turbulento de un fluido.

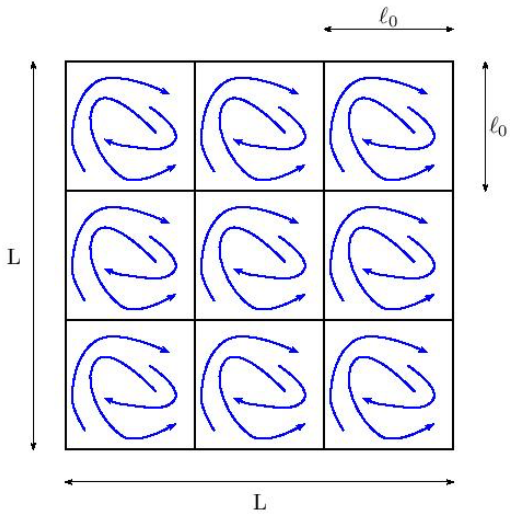
[1](1951-) Matemático rumano.

De esta manera es conveniente empezar por estudiar estos elementos necesarios en un modelo determinista y la ley de disipación de energía en el marco de un modelo determinista con condiciones periódicas en la variable espacial, pues como veremos a continuación, en el caso periódico podemos definir sin problema la velocidad característica del fluido U y una herramienta para caracterizar el estado turbulento de un fluido conocida como numero de Reynolds.

1. El modelo determinista con condiciones periódicas

El modelo determinista con condiciones periódicas es un modelo artificial de la mecánica de fluidos en donde el campo de velocidades del fluido $u(t,x)$ es una función periódica en la variable espacial, es decir, para $L>0$ consideramos el cubo $[0,L]^3$ en donde $u(t,x)=u(t,x+(L,L,L))$ para todo $x\in\mathbb{R}^3$ y todo $t\in[0,+\infty[$.
De igual manera la fuerza exterior f es periódica sobre el cubo $[0,\ell_0]^3$, donde $\ell_0:=\frac{L}{n}$ con $n\in\mathbb{N}$.

> $\Rightarrow$ La idea de este modelo consiste en capturar el comportamiento de un fluido turbulento que se encuentra en el cubo $[0,L]^3$. $L>0$ es llamada la longitud característica y es la escala de longitud más grande donde el fluido se encuentra físicamente. El estado turbulento del fluido es permanente en el tiempo y se debe a la acción de una fuerza exterior f que actúa sobre el fluido a la escala de longitud $\ell_0<L$ conocida como la escala inicial.



De acuerdo al modelo de cascada de energía si suponemos que $\ell_0>>\ell_D$, donde ℓ_D es la escala de longitud en donde actúan las fuerzas de viscosidad del fluido, entonces existe un intervalo suficientemente grande de escalas intermedias $\ell_0>>\ell>>\ell_D$ en donde la energía cinética es transferida desde las grandes escalas hasta las más pequeñas lo que pone al fluido en estado turbulento y en donde se quiere estudiar la ley de disipación de energía propuesta por la teoría K41.

Se trata entonces, en primer lugar, de definir de manera precisa un campo de velocidades de fluido $u(t,x)$, un promedio sobre el conjunto $[0,+\infty[\times[0,L]^3$ y herramienta que nos permita caracterizar de forma teórica el estado turbulento de un fluido.

(1) El campo velocidades $u(t,x)$ del fluido.

En la introducción vimos que las ecuaciones de base para el modelo determinista están dadas por las ecuaciones de Navier-Stokes, de esta manera consideramos entonces el siguiente sistema de evolución con condiciones periódicas:

$$\boxed{\left\{\begin{array}{c}\partial_t u+u\cdot\nabla\,u-\nu\Delta u+\nabla p=f,\quad \text{sobre}\quad]0,+\infty[\times[0,L]^3.\\ \nabla\cdot u=0,\\ u(0)=u_0.\end{array}\right. \qquad (1)}$$

En este problema el campo de velocidades $u(t,x)$ y la presión $p(t,x)$ son las incógnitas, $\nu > 0$ es la constante de viscosidad del fluido, $f \in L^2([0,\ell_0]^3)$ es la fuerza exterior la cual supondremos regular, estacionaria, a divergencia nula, es decir $\nabla \cdot f = 0$, y periódica sobre $[0,\ell_0]^3$.

Por otro lado el dato inicial $u_0 \in L^2([0,L]^3)$, que es el campo de velocidades en el instante $t = 0$, es un vector de divergencia nula y periódico sobre $[0,L]^3$.

A partir de los datos f y u_0 podemos construir un campo de velocidades $u(t,x)$ periódico en la variable espacial sobre $[0,L]^3$, de manera más precisa tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1 *(Leray, 1934) Sean f una fuerza exterior y u_0 un dato inicial tales que verifican las condiciones arriba escritas. Existen $u \in L^\infty(]0,+\infty[, L^2([0,L]^3)) \cap L^2_{loc}(]0,+\infty[, H^1([0,L]^3))$ y $\nabla p \in L^1_{loc}(]0,+\infty[, L^1([0,L]^3))$ tales que:*

(i) $u(t,x)$ y $p(t,x)$ verifican las ecuaciones de Navier-Stokes $\partial_t u + u \cdot \nabla\, u - \nu\Delta u + \nabla p = f$ en el sentido de las distribuciones,

(ii) $u(t,x)$ y $p(t,x)$ son periódicas en la variable espacial sobre $[0,L]^3$,

(iii) $u(t) \longrightarrow u_0$ en $L^2([0,L]^3)$, cuando $t \longrightarrow 0^+$,

(iv) para todo tiempo $T \in [0,+\infty[$ se verifica la desigualdad de energía

$$\|u(T)\|^2_{L^2} + 2\nu \int_0^T \|\nabla \otimes u(t)\|^2_{L^2} dt \leq \|u_0\|^2_{L^2} + 2\int_0^T \int_{[0,L]^3} f \cdot u dx dt. \tag{2}$$

Observación 1 *El campo de velocidades $u(t,x)$ es también llamado una solución de Leray*[2] *pues además de verificar las ecuaciones de Navier-Stokes en el sentido de las distribuciones verifica la desigualdad de energía (2). Esta desigualdad de energía es una propiedad fundamental de las soluciones de Leray pues:*

$\Rightarrow$ *nos permite mostrar la existencia de una tal solución*

$\Rightarrow$ *desde el punto de vista físico tenemos la siguiente interpretación: la energía cinética del fluido en el instante $T \geq 0$ es definida por la cantidad*

$$\|u(T)\|^2_{L^2},$$

entonces, la desigualdad de energía nos proporciona un balance energético *en el sentido que, a partir de esta desigualdad se tiene*

$$\|u(T)\|^2_{L^2} - \|u_0\|^2_{L^2} + 2\nu \int_0^T \|\nabla \otimes u(t)\|^2_{L^2} dt \leq +2\int_0^T \int_{[0,L]^3} f \cdot u dx dt.$$

Vemos de esta manera que, en el instante $T > 0$, la expresión $\|u(T)\|^2_{L^2} - \|u_0\|^2_{L^2}$ mide la variación de energía cinética, $2\nu \int_0^T \|\nabla \otimes v(t)\|^2_{L^2} dt$ mide la cantidad de energía cinética disipada y $2\int_0^T \int_{[0,L]^3} f \cdot u\, dx dt$ representa el trabajo de la fuerza exterior sobre el fluido.

(2) El promedio respecto a la variable temporal y la variable espacial.

Recordemos que en la ley de disipación de energía se describe una relación entre la tasa de disipación promedio ε y la velocidad promedio del fluido U cuando este se encuentra en estado turbulento. Para estudiar esta ley en el marco de un modelo determinista es necesario entonces definir de manera adecuada las cantidades ε y U a partir del campo de velocidades $u(t,x)$ y de un promedio con respecto a la variable

[2] (1906-1988) Matemático francés.

temporal y espacial $\langle\cdot\rangle$. De esta manera tenemos la siguiente definición.

Definición 1 *Sea $u(t,x)$ una solución de Leray del sistema de Navier-Stokes con condiciones periódicas,*

(i) la tasa de disipación promedio de energía cinética es definida por

$$\varepsilon = \nu \limsup_{T\longrightarrow+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \|\nabla\otimes u(t)\|_{L^2}^2 \frac{dt}{L^3}.$$

(ii) La velocidad característica del fluido es definida por

$$U = \left(\limsup_{T\longrightarrow+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \|u(t)\|_{L^2}^2 \frac{dt}{L^3}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Estudiemos mas en detalle la definición de ε y U. Para $u(t,x)$ el campo de velocidades del fluido se tiene que $\nabla\otimes u := (\partial_i u_j)_{1\leq i,j\leq 3}$ es una matriz que describe la variación de este vector respecto a cada coordenada de la variable espacial $x = (x_1, x_2, x_3)$. Para casi todo $t \in [0,+\infty[$ la cantidad $\frac{\|\nabla\otimes u(t)\|_{L^2}^2}{L^3}$ es el promedio $\nabla\otimes u(t)$ sobre el cubo $[0,L]^3$ donde L^3 es precisamente su volumen.

Luego para todo $T > 0$ promediamos esta cantidad sobre el intervalo de tiempo $[0,T]$ tomando la integral $\frac{1}{T}\int_0^T \|\nabla\otimes u(t)\|_{L^2}^2 \frac{dt}{L^3}$. Finalmente el limite superior cuando $T \longrightarrow +\infty$ se debe a que la fuerza exterior es estacionaria e introduce la energía cinética de manera constante en el tiempo, es decir, como la energía cinética es inyectada en el fluido de forma constante en el tiempo al tomar el limite superior cuando $T \longrightarrow +\infty$ dejamos pasar el tiempo necesario para que el fluido pueda evolucionar desde su estado inicial, descrito por la velocidad u_0, hasta un estado turbulento en el cual permanecerá indefinidamente.

Para la definición de U se tiene el mismo razonamiento en donde ahora $\frac{\|u(t)\|_{L^2}^2}{L^3}$ es el promedio del campo de velocidades sobre $[0,L]^3$.

Puesto que las cantidades ε y U se definen mediante el limite superior cuando $T \longrightarrow +\infty$ es preciso asegurar que estos limites existen de lo contrario todos los cálculos que haremos a partir de estas cantidades no sentido. Para ello tenemos el siguiente lema.

Lema 1 *Sea $u(t,x)$ una solución de Leray del sistema de Navier-Stokes con condiciones periódicas. Entonces*

(i) $\varepsilon \leq \dfrac{\|f\|_{H^{-1}}^2}{L^3\nu}$ *y*

(ii) $U \leq \dfrac{L^2}{4\pi^2\nu}\|f\|_{L^2}$.

Demostración.

$\Rightarrow$ La herramienta clave es la desigualdad de energía.

(i) Mayoración de ε.

En efecto, de la desigualdad (2) obtenemos las siguientes mayoraciones para todo $T > 0$

$$
\begin{aligned}
2\nu \int_0^T \|\nabla \otimes u(t)\|_{L^2}^2 dt &\leq \|u_0\|_{L^2}^2 + 2\int_0^T \int_{[0,L]^3} f \cdot u dx dt \\
&\leq \|u_0\|_{L^2}^2 + 2\int_0^T \|f\|_{H^{-1}} \|u(t)\|_{H^1} dt \\
&\leq \|u_0\|_{L^2}^2 + \frac{T\|f\|_{H^{-1}}^2}{\nu} + \nu \int_0^T \|\nabla \otimes u(t)\|_{L^2}^2 dt,
\end{aligned}
$$

de donde obtenemos que

$$
\nu \int_0^T \|\nabla \otimes u(t)\|_{L^2}^2 dt \leq \|u_0\|_{L^2}^2 + \frac{T\|f\|_{H^{-1}}^2}{\nu}
$$

y por la definición de ε arriba escrita tenemos que

$$
\varepsilon \leq \frac{\|f\|_{H^{-1}}^2}{L^3 \nu} < +\infty.
$$

(ii) Mayoración de U.

En este punto veremos la gran utilidad de la periodicidad del campo de vectores $u(t, x)$. En efecto en el caso periódico tenemos a nuestra disposición la desigualdad de Poincaré

$$
\|u(t)\|_{L^2} \leq \frac{L}{2\pi} \|\nabla \otimes u(t)\|_{L^2}
$$

a partir de la cual tenemos la mayoración

$$
\frac{8\pi^2 \nu}{L^2} \int_0^T \|u(t)\|_{L^2}^2 dt \leq 2\nu \int_0^T \|\nabla \otimes u(t)\|_{L^2}^2 dt
$$

de donde, por la desigualdad de energía (2) obtenemos que

$$
\begin{aligned}
\frac{8\pi^2 \nu}{L^2} \int_0^T \|u(t)\|_{L^2}^2 dt &\leq \|u_0\|_{L^2}^2 + 2\int_0^T \int_{[0,L]^3} f \cdot u dx dt \\
&\leq \|u_0\|_{L^2}^2 + 2\int_0^T \int_{[0,L]^3} \|f\|_{L^2}^2 \|u(t)\|_{L^2}^2 \\
&\leq \|u_0\|_{L^2}^2 + \frac{TL^2}{4\pi^2 \nu} \|f\|_{L^2}^2 + \frac{4\pi^2 \nu}{L^2} \int_0^T \|u(t)\|_{L^2}^2.
\end{aligned}
$$

Finalmente por la definición de U tenemos que

$$
U \leq \frac{L^2}{4\pi^2 \nu} \|f\|_{L^2} < +\infty.
$$

■

(3) Números de Reynolds.

Nos concentramos ahora en dos términos en las ecuaciones de Navier-Stokes: el término de transporte $u \cdot \nabla u$ y el término e viscosidad $\nu \Delta u$.
$u \cdot \nabla u$ describe la transferencia de la energía cinética la cual, de acuerdo al modelo de cascada de energía, se realiza de manera auto-similar desde las grandes escalas de longitud hasta la escalada de disipación ℓ_D. A partir de esta escala las fuerzas de viscosidad del fluido disipan la energía cinética fuera del mismo. Estas fuerzas de viscosidad son descritas por el término $\nu \Delta u$.

Observamos de esta manera que, cuando el fluido se encuentra en estado turbulento, intuitivamente el término de trasporte es mucho más *fuerte* que el término de viscosidad de manera que la energía cinética puede ser transferida mediante estructuras de remolinos que se fragmentan en remolinos mas pequeños de forma sucesiva (modelo de cascada de energía). En este marco el número de Reynolds, que notaremos por Re, es un número positivo sin unidades físicas descubierto por Osborne Reylnolds[3] en 1883 que nos permite caracterizar de manera teórica el hecho que el término se transporte predomine sobre el término de viscosidad como lo veremos a continuación.

Con el objetivo de realizar un análisis cuantitativo entre estos dos términos es útil escribir las ecuaciones de Navier-Stokes en su forma adimensional, es decir, sin dimensiones físicas. Para ello consideramos el siguiente cambio de variables

$$t' = \frac{t}{t_0}, x' = \frac{1}{\ell_0}x, u' = \frac{1}{U}u \text{ y } f' = \frac{1}{F}f,$$

en donde $t_0 = \frac{\ell_0}{U}$ es el tiempo promedio de vida de los remolinos a la escala de longitud ℓ_0 y $F = \frac{\|f\|_{L^2}}{\ell_0^{\frac{3}{2}}}$ es el promedio de la fuerza exterior. Como podemos observar las nuevas variables t', x', u' y f' las cuales representan el tiempo, el espacio, la velocidad del fluido y la fuerza exterior respectivamente ahora son adimencionales. De esta manera, por el cambio de variable anterior, definiendo el nuevo término de presión $p' = \frac{1}{U^2}p$, obtenemos las ecuaciones de Navier-Stokes en su forma adimensional

$$\partial_{t'}u' + u' \cdot \nabla_{x'}u' - \frac{\nu}{U\ell_0}\Delta_{x'}u' + \nabla_{x'}p' = \frac{Ft_0}{U}f.$$

Observamos entonces que este nuevo sistema depende solamente de dos parámetros: el numero de Reynolds definido por

$$Re = \frac{U\ell_0}{\nu}$$

y el numero de Froude[4] definido por $Fr = \frac{U}{Ft_0}$.

> $\Rightarrow$ Cuando el número de Reynolds es suficientemente grande, lo cual notamos como $Re >> 1$, el parámetro en el término de viscosidad $\frac{1}{Re}$ es un número muy próximo a cero y por lo tanto los efectos de la viscosidad son despreciables. En este sentido el estado turbulento del fluido está caracterizado cuando $Re >> 1$ pues de esta manera se tiene que, teóricamente, el término de transporte predomina sobre el término de viscosidad entonces la energía cinética se transfiere de acuerdo al modelo de cascada de energía y el fluido entra en un estado turbulento.

Observación 2 *Otra caracterización del estado turbulento de un fluido está dada por la magnitud de las escalas de longitud que intervienen en el modelo de casada de energía. Recordemos rápidamente que, según este modelo, la energía es introducida a la escala ℓ_0, se transfiere en las escalas intermedias $\ell_0 >> \ell >> \ell_D$ y se disipa fuera del fluido a partir de la escala ℓ_D. En este marco una escala intermedia característica está dada por la llamada micro-escala de Taylor[5] definida por*

$$\ell_T = \left(\frac{\nu U^2}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}$$

la cual satisface $\ell_0 > \ell_T > \ell_D$. Si suponemos la ley de disipación de energía, $\varepsilon \approx \frac{U^3}{\ell_0}$, se puede mostrar que $\ell_T \approx \frac{1}{\sqrt{Re}}\ell_0$ y $\ell_D \approx \frac{1}{(Re^{\frac{3}{4}})}\ell_0$, de esta manera cuando $Re >> 1$ se tiene entonces que $\ell_0 >> \ell_T >> \ell_D$ lo que significa que el intervalo de escalas intermedias es suficientemente grande para permitir la transferencia de energía cinética y por lo tanto el fluido entra en un estado turbulento.

[3] (1842-1912) Físico e ingeniero irlandés.
[4] (1810-1879) Ingeniero británico.
[5] (1685-1731) Matemático británico.

Una vez que hemos definido de manera precisa todas la herramientas teóricas para el estudio de la teoría K41 en el marco de un modelo determinista, de ahora en adelante nos concentraremos en la ley de disipación de energía. En el caso periódico se tiene el siguiente resultado.

Teorema 2 *(Doering y Foias, 2002) Sean $f \in L^2([0,\ell_0]^3)$ una fuerza exterior, periódica, regular, estacionaria a divergencia nula y $u(t,x)$ una solución de Leray del sistema de Navier-Stokes condiciones periódicas*

$$\begin{cases} \partial_t u + u \cdot \nabla u - \nu\Delta u + \nabla p = f, \quad \textit{sobre} \quad]0,+\infty[\times [0,L]^3. \\ \nabla \cdot u = 0, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Entonces

$$\varepsilon \leq \frac{U^3}{\ell_0}\left(1+\frac{1}{Re}\right).$$

Observación 3 *(1) Este teorema nos provee un resultado parcial de la ley de disipación de energía en el sentido que, cuando $Re >> 1$ y entonces el fluido se encuentra en estado turbulento, observamos que $1+\frac{1}{Re} \approx 1$ y de esta manera se tiene solamente la mayoración*

$$\varepsilon \leq \frac{U^3}{\ell_0}$$

de acuerdo a la teoría K41.

(2) La otra desigualdad, es decir $\frac{U^3}{\ell_0} \leq \varepsilon$ cuando $Re >> 1$, es todavía un problema abierto sobre el cual hablaremos en la lección 3 *y en el marco de un nuevo modelo determinista de la mecánica de fluidos.*

2. El modelo determinista de P. Constantin

Este modelo determinista se trata de una generalización del caso periódico al caso no periódico, consideramos de esta manera un fluido en el espacio entero $\mathbb{R}^3$, viscoso e incompresible, sobre el cual actúa una fuerza exterior f a una escala de longitud ℓ_0 suficientemente grande.

De igual manera la ecuación de base está dada por el sistema de Navier-Stokes sobre todo el espacio $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} \partial_t u + u \cdot \nabla u - \nu\Delta u + \nabla p = f, \quad \text{sur} \quad]0,+\infty[\times \mathbb{R}^3. \\ \nabla \cdot u = 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{3}$$

en donde el hecho que la fuerza exterior f actúa sobre solo en las grandes escalas de longitud es tratado teóricamente suponiendo que, a nivel de Fourier, la fuerza exterior actúa solamente en las bajas frecuencias. De esta forma consideramos ahora $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$, estacionaria a divergencia nula y tal que para $k_0 > 0$

$$supp\,\widehat{f} \subset B(0,k_0)$$

donde k_0 es llamada la frecuencia inicial a partir de la cual definimos la escala inicial

$$\ell_0 = \frac{1}{k_0}$$

en donde de acuerdo al modelo de cascada de energía la energía cinética es introducida en el fluido a la escala de longitud ℓ_0.

La existencia de un campo de velocidades $u(t,x)$ solución del sistema Navier-Stokes para una tal fuerza f y un dato inicial u_0 está dada por el siguiente resultado clásico.

Teorema 3 *(Leray, 1934) Sean $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$ tal que verifica todas la hipótesis arriba mencionadas y $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ a divergencia nula. Entonces existe $u \in L^\infty_{loc}(]0,+\infty[, L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2_{loc}(]0,+\infty[, \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$ tal que*

(i) $u(t,x)$ verifica la ecuación de evolución $\partial_t u + u \cdot \nabla u - \nu\Delta u + \nabla p = f$ en el sentido de las distribuciones,

(ii) $u(t) \longrightarrow u_0$ en L^2 cuando $t \longrightarrow 0^+$ y

(iii) $u(t,x)$ verifica la desigualdad de energía: para todo $T \in [0,+\infty[$

$$\|u(T)\|^2_{L^2} + 2\nu \int_0^T \|\nabla \otimes u(t)\|^2_{L^2} dt \leq \|u_0\|^2_{L^2} + 2\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} f \cdot u \, dxdt. \tag{4}$$

Recordemos que en el caso periódico restringimos el estudio de un fluido en estado turbulento al cubo $[0,L]^3$, en donde la longitud característica del fluido, la cual representa la mas grande escala de longitud donde el fluido se encuentra físicamente, esta dada de forma natural por L.

$\Rightarrow$ Cuando estudiamos la turbulencia en el caso no periódico para un fluido que se encuentra en el espacio entero $\mathbb{R}^3$ la definición adecuada de una longitud característica del fluido L_c es delicada pues trabajar sobre $\mathbb{R}^3$ hace que se pierda toda intuición física y la definición de L_c es puramente teórica.

En este sentido la idea Constantin consiste en definir una longitud característica L_c por medio de la fuerza exterior mediante la relación

$$L_c = \frac{F}{\|\nabla \otimes f\|_{L^\infty}},$$

donde $F := \frac{\|f\|_{L^2}}{\ell_0^{\frac{3}{2}}}$ es la fuerza promedio y en donde hemos escrito L_c para diferenciar esta longitud característica de Constantin de una nueva longitud que será definida en la siguiente lección.

Antes de continuar es necesario verificar que $L_c < +\infty$ pues de lo contrario esta longitud característica no tiene sentido. Para ello haremos uso de un resultado del Análisis armónico conocido como las desigualdades de Bernstein.

Teorema 4 *Sean $g \in L^p(\mathbb{R}^3)$, con $1 \leq p \leq +\infty$, $R_1, R_2, \lambda > 0$ tales que $R_1 < R_2$.*

(i) Si supp $\widehat{g} \subset B(0, \lambda R_1)$ entonces existe una constante $c > 0$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$ y todo $q \in [p, +\infty]$ se tiene

$$\sup_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha g\|_{L^q} \leq c\lambda^{k+3(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|g\|_{L^p}.$$

(ii) Si supp $\widehat{g} \subset C(0, \lambda R_1, \lambda R_2)$ entonces existen dos constantes $c_1, c_2 > 0$ tales que para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene

$$c_1^{-k}\lambda^k\|g\|_{L^p} \leq \sup_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha g\|_{L^p} \leq c_2^k \lambda^k \|g\|_{L^p}.$$

Observación 4 *Las desigualdades de Bernstein nos permiten controlar la norma L^p de las derivadas de todo orden de una función cuando su soporte de Fourier está contenido en una bola o en una corona.*

Se trata entonces de mostrar que $L_c = \frac{F}{\|\nabla \otimes f\|_{L^\infty}} < +\infty$. Como $f \in L^2$ entonces $F < +\infty$ por lo que basta mostrar $\|\nabla \otimes f\|_{L^\infty} < +\infty$. Puesto que *supp* $\widehat{f} \in B(0, k_0)$ por la parte (i) del teorema anterior tenemos la mayoración $\|\nabla \otimes f\|_{L^\infty} \leq ck^{1+\frac{3}{2}}\|f\|_{L^2} < +\infty$ y de esta manera $L_c < +\infty$.

Tenemos así dos grandes escalas de longitud: L_c la longitud característica del fluido, la cual es el análogo a la longitud característica L cuando estudiamos el caso periódico, y la escala inicial ℓ_0 la cual es las más grande escala de longitud donde la fuerza exterior actúa sobre el fluido introduciendo la energía cinética. Puesto que $F := \frac{\|f\|_{L^2}}{\ell_0^{\frac{3}{2}}}$ y $\ell_0 = \frac{1}{k_0}$ por la misma parte (i) del teorema anterior obtenemos la relación entre L_c y ℓ_0

$$\ell_0 \leq cL_c$$

lo que en términos físicos nos indica que la energía cinética es introducida a una escala más pequeña que la longitud característica del fluido.

La idea en el modelo determinista de Constantin consiste en usar las escalas de longitud ℓ_0 y L_c para definir las cantidades cantidades físicas asociadas al fluido: U, ε y Re de la siguiente manera.

⇒ La escala inicial ℓ_0 es utilizada para definir las cantidades promedio U y ε de manera análoga al caso periódico

$$U := \left(\limsup_{T \longrightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \|u(t)\|^2 \frac{dt}{\ell_0^3} \right)^{\frac{1}{2}}$$

y

$$\varepsilon = \nu \limsup_{T \longrightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \|\nabla \otimes u(t)\|^2 \frac{dt}{\ell_0^3}.$$

⇒ La longitud característica del fluido L_c es utilizada para definir el numero de Reynolds

$$Re = \frac{UL_c}{\nu}.$$

A partir de estas definiciones el autor muestra la siguiente mayoración de la tasa de disipación.

Teorema 5 *(Constantin, 2003) Sea $u(t,x)$ la solución de Leray del sistema de Navier-Stokes (3) asociada a la fuerza exterior f. Entonces*

$$\varepsilon \leq \frac{U^3}{L_c} + \frac{1}{\sqrt{Re}} \sqrt{\varepsilon} \sqrt{\frac{U^3}{L_c}}.$$

Al igual que el caso periódico se trata de un resultado parcial de la ley de disipación de energía según la teoría $K41$. En efecto vemos que si $Re >> 1$ entonces $\frac{1}{\sqrt{Re}} \sqrt{\varepsilon} \sqrt{\frac{U^3}{L_c}} \approx 0$ y de esta manera $\varepsilon \leq \frac{U^3}{L_c}$.

⇒ Sin embargo este resultado tiene dos errores técnicos lo que pone en duda la veracidad de la desigualdad $\varepsilon \leq \frac{U^3}{L_c} + \frac{1}{\sqrt{Re}} \sqrt{\varepsilon} \sqrt{\frac{U^3}{L_c}}$ obtenida por Constantin en el estudio de la turbulencia cuando el fluido se encuentra en el espacio entero $\mathbb{R}^3$.

En la siguiente lección estudiaremos detenidamente dichos errores y de esta manera, con el objetivo de dar un sentido riguroso a los cálculos de Constantin, obtendremos un nuevo modelo determinista de la mecánica de fluidos en donde se estudiará la ley de disipación de energía según la teoría K41.