Lección n°3: Ecuación de Transporte, Ecuación de Laplace

UPS, julio 2015

Índice

1. Ecuación de Transporte

Presentación del problema

Sea $u : [0,+\infty] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y sea $B = (B_1, \cdots, B_n)$ un vector fijo de $\mathbb{R}^n$. La *ecuación de transporte* en $[0,+\infty] \times \mathbb{R}^n$ con coeficientes constantes está entonces dada por:

$$\partial_t u(t,x) + B \cdot \nabla u(t,x) = 0.$$

En este ecuación, la variable t designa el *tiempo* y la variable x es un punto del espacio $\mathbb{R}^n$

¿Por qué (y en qué sentido) esta ecuación modeliza el *transporte*? Esta ecuación nos dice que la variación con respecto al tiempo de la función u (dada por la cantidad $\partial_t u$) es igual a la variación en el espacio de esta misma función u (es decir $B \cdot \nabla u$), en donde el vector B representa la *velocidad* del desplazamiento. Esta ecuación nos describe entonces cómo varía la posición con respecto al tiempo: es decir nos explica cómo se transportan los objetos.

1.1. Problema de valor inicial homogéneo

Sea $B = (B_1, \cdots, B_n)$ un vector fijo de $\mathbb{R}^n$ y sea $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función fija. El problema de valor inicial para la ecuación de transporte está dado por

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + B \cdot \nabla u(t,x) = 0 & \text{sobre } [0,+\infty] \times \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = g(x) & \text{sobre } \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{1}$$

Resolución

La equación (1) nos indica que cierta derivada direccional de la función u se anula. En efecto, suponiendo que todos los objetos son suficientemente regulares, si definimos la función $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ por medio de la expresión

$$\varphi(s) = u(t+s, x+sB)$$

en donde $t \in \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}^n$, entonces la regla de la cadena nos dice que:

$$\varphi'(s) = \partial_t u(t+s, x+sB) + \nabla u(t+s, x+sB) \cdot B,$$

y, dado que $\partial_t u(t+s, x+sB) + \nabla u(t+s, x+sB) \cdot B = 0$, tenemos que la función $\varphi(s)$ es constante; por lo tanto, es suficiente determinar un solo valor de la función φ para tener una idea de cómo resolver esta ecuación de transporte. Observando que $\varphi(-t) = u(0, x-tB)$ y usando la condición inicial tenemos que

$$u(0, x-tB) = g(x-tB),$$

y con esta identificación hemos encontrado la solución al problema de transporte con valor inicial:

$$u(t,x) = g(x-tB). \tag{2}$$

Observación 1

- *La solución de la ecuación de transporte está dada por una* traslación *del dato inicial g.*
- *Si la función g es de clase $\mathcal{C}^1$, entonces la solución $u(t,x) = g(x-tB)$ es también de clase $\mathcal{C}^1$.*

1.2. Problema de valor inicial no homogéneo

Consideramos ahora el mismo problema de transporte pero esta vez con un segundo término dado por una función $f : [0, +\infty] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.

Sea $B = (B_1, \cdots, B_n)$ un vector dado de $\mathbb{R}^n$ y sea $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función dada. Si $f \in L^1([0, +\infty[, L^\infty(\mathbb{R}^n))$, el problema de valor inicial para la ecuación de transporte está dado por

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + B \cdot \nabla u(t,x) = f(t,x) & \text{sobre } [0, +\infty] \times \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = g(x) & \text{sobre } \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{3}$$

Resolución

Para estudiar esta ecuación, seguimos la misma idea utilizada anteriormente: en efecto, si escribimos $\varphi(s) = u(t+s, x+sB)$ para $s \in \mathbb{R}$ tenemos

$$\varphi'(s) = \partial_t u(t+s, x+sB) + \nabla u(t+s, x+sB) \cdot B = f(t+s, x+sB)$$

Notemos que $\varphi(0) = u(t,x)$ y que $\varphi(-t) = g(x-tB)$, de esta manera, vemos que se tiene la identidad

$$\varphi(0) - \varphi(-t) = \int_{-t}^{0} \varphi'(s)ds$$

$$\iff u(t,x) - g(x-tB) = \int_{-t}^{0} f(t+s, x+sB)ds,$$

haciendo el cambio de variable $s \longmapsto s-t$ en la integral anterior obtenemos

$$u(t,x) - g(x-tB) = \int_0^t f(s, x+(s-t)B)ds,$$

finalmente, la solución de la ecuación de transporte no homogénea está dada por la expresión

$$u(t,x) = g(x-tB) + \int_0^t f(s, x+(s-t)B)ds, \qquad (x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0). \tag{4}$$

A esta expresión se la conoce como la *fórmula de Duhamel*.

Observación 2

- *Para que exista esta solución (4), la función f debe ser al menos integrable, pues de otro modo la integral puede no tener sentido.*

- *De la misma manera, para poder obtener esta solución, es necesario que la función g sea al menos de clase $\mathcal{C}^1$, pues de otro modo no podríamos realizar los cálculos.*
- *Es posible relajar la hipótesis de regularidad sobre la función g, pero para ello será necesario considerar* soluciones débiles.

Observación 3

- *En el caso de la ecuación de transporte homogénea (2) es importante observar que la regularidad de la solución depende* directamente *de la regularidad del dato inicial.*
- *No hay pérdida ni ganancia de regularidad en este tipo de ecuación, lo cual es totalmente consistente con la modelización, pues se trata únicamente de una ecuación de* transporte.

1.3. Propiedades de las soluciones

A partir de la fórmula de Duhamel (4) es posible deducir algunas propiedades de las soluciones de la ecuación de transporte.

Proposición 1 *Si $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ y si $f \in L^\infty([0,T]; L^\infty(\mathbb{R}^n))$, entonces la solución (4) del problema de transporte (3) verifica*

$$|u(t,x)| \leq C(1+T),$$

para todo $t \in [0,T]$ y todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Prueba. A partir de la fórmula de Duhamel basta escribir

$$|u(t,x)| \leq |g(x-tB)| + \int_0^t |f(s, x+(s-t)B)| ds \leq \|g\|_{L^\infty} + t\|f\|_{L^\infty(L^\infty)} \leq C(1+T).$$

■

2. Ecuación de Laplace

Presentación del problema

Sea $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función, en donde Ω es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$), entonces la ecuación de Laplace homogénea está dada por

$$\Delta u(x) = \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}^2 u(x) = 0, \tag{5}$$

para todo $x \in \Omega$. En este problema, la incógnita está dada por una función $u : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$. Este problema es de gran importancia en las matemáticas y las soluciones de esta ecuación merecen la siguiente definición.

Definición 1 *Una función de clase $\mathcal{C}^2$ que verifica la ecuación de Laplace (5) es llamada una* función armónica.

2.1. Problema Homogéneo y Solución fundamental

La primera etapa consiste en estudiar un problema *simplificado* para luego ver posibles soluciones generales a la ecuación de Laplace, procediendo de esta manera veremos cómo aparece la noción de *solución fundamental.*

Vamos pues a empezar estudiando el problema cuando $\Omega = \mathbb{R}^n$, es decir que consideraremos la ecuación de Laplace en todo el espacio. Este marco de trabajo simplifica todas los eventuales problemas relativos al comportamiento cerca del borde del abierto Ω.

Veamos ahora algunas propiedades de invariancia de esta ecuación:

- Invariancia por traslación: si $u(x)$ es solución de la ecuación de Laplace (5), entonces para todo $\tau \in \mathbb{R}^n$ se tiene que $u(x+\tau)$ también es solución de la ecuación de Laplace.
- Invariancia por rotación: si $u(x)$ es solución de la ecuación de Laplace (5), entonces para todo ángulo $\theta \in [0, 2\pi]$ se tiene que $u(R_\theta[x])$ también es solución de la ecuación de Laplace, en donde $R_\theta[x]$ es la matriz de rotación en el espacio $\mathbb{R}^n$ asociada al ángulo θ.

La propiedad de invariancia por rotación nos conduce a buscar soluciones que son *radiales*, es decir que son independientes de las rotaciones y que por lo tanto se escriben como $u(x) = \varphi(\rho)$ donde $\rho = |x|$ y donde $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es ahora la función que buscamos determinar.

$\Longrightarrow$ Dado que $u(x) = \varphi(\rho)$ y dado que deseamos calcular las derivadas $\partial^2_{x_i} u$ con $i = 1, ..., n$, por la regla de la cadena vamos a tener que calcular las derivadas $\frac{\partial \rho}{\partial x_i}$ y $\frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i^2}$

$\Longrightarrow$ Como $\rho = |x| = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}$, si $x \neq 0$, se tiene

$$\frac{\partial \rho}{\partial x_i} = \frac{x_i}{\rho} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i^2} = \frac{1}{\rho} - \frac{x_i^2}{\rho^3}.$$

$\Longrightarrow$ Entonces se tiene

$$\partial_{x_i} u(x) = \varphi'(\rho) \frac{x_i}{\rho} \qquad \text{y} \qquad \partial^2_{x_i} u(x) = \varphi''(\rho) \frac{x_i^2}{\rho^2} + \varphi'(\rho) \left(\frac{1}{\rho} - \frac{x_i^2}{\rho^3} \right)$$

$\Longrightarrow$ Es decir:

$$\Delta u(x) = \sum_{i=1}^{n} \partial^2_{x_i} u(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(\varphi''(\rho) \frac{x_i^2}{\rho^2} + \varphi'(\rho) \left(\frac{1}{\rho} - \frac{x_i^2}{\rho^3} \right) \right) = \varphi''(\rho) + \frac{n-1}{\rho} \varphi'(\rho).$$

De esta manera, si $\Delta u = 0$ entonces

$$\varphi''(\rho) + \frac{n-1}{\rho} \varphi'(\rho) = 0, \tag{6}$$

y gracias al estudio de las invariancias de la ecuación de Laplace, hemos simplificado el problema.

Entonces, si $\varphi' \neq 0$, podemos reescribir la ecuación (6) como

$$\log(\varphi')' = \frac{\varphi''}{\varphi'} = \frac{1-n}{\rho},$$

de donde se deduce que

$$\varphi'(\rho) = \frac{C_1}{\rho^{n-1}},$$

donde la constante C_1 será fijada posteriormente. A partir de esta ecuación obtenemos

$$\varphi(\rho) = \begin{cases} C_2 \log(\rho) + C_3 & (n = 2) \\ \frac{C_2}{\rho^{n-2}} + C_3 & (n > 2), \end{cases}$$

en donde C_1, C_2 y C_3 son constantes que serán fijadas de tal manera que verifiquen ciertas propiedades específicas relacionadas con la dimensión del espacio $\mathbb{R}^n$.

$\Longrightarrow$ Con éstos cálculos hemos encontrado una solución $u(x) = \varphi(\rho)$ a la ecuación de Laplace.

Definición 2 *Si v_n es la medida de la bola unidad en $\mathbb{R}^n$, la función*

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log(|x|) & (n = 2) \\ \frac{1}{n(n-2)v_n} \frac{1}{|x|^{n-2}} & (n > 2), \end{cases}$$

definida para todo $x \in \mathbb{R}^n$ con $x \neq 0$ es llamada la solución fundamental *de la ecuación de Laplace.*

Por todos los cálculos anteriores tenemos que $\Delta \Phi(x) = 0$ si $x \neq 0$.

Observación 4

- *La solución fundamental* Φ *es, evidentemente, una función* radial.
- *La función* Φ *explota cuando* $x \longrightarrow 0$.
- *Si* $x \neq 0$ *se tienen las estimaciones siguientes:*

$$|D\Phi(x)| \leq \frac{C}{|x|^{n-1}} \qquad y \qquad |D^2\Phi(x)| \leq \frac{C}{|x|^n},$$

  donde C *es una constante positiva.*

2.2. Problema no Homogéneo: Ecuación de Poisson

La noción de *solución fundamental* es muy práctica cuando se desea estudiar los problemas no homogéneos.

Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. La ecuación de Poisson está dada entonces por el problema

$$-\Delta u(x) = f(x).$$

La solución del problema de Poisson está dada por el siguiente teorema:

Teorema 1 *Sea* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función, que suponemos de soporte compacto y tal que* $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$ *y definamos* u *por medio de la expresión*

$$u(x) = \Phi * f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y)f(y)dy. \tag{7}$$

Entonces se tiene que la función u *es de clase* $\mathcal{C}^2$ *y además es solución de la ecuación de Poisson:*

$$-\Delta u = f, \quad \text{sobre } \mathbb{R}^n.$$

Demostración.

$\Longrightarrow$ La primera cosa que debemos verificar es que la función u determinada por la expresión (7) está *bien definida*: en efecto para un $x \in \mathbb{R}^n$ tenemos

$$|u(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\Phi(x-y)||f(y)|dy.$$

Dado que la función f es a soporte compacto, existe $R_f > 0$ tal que $sop(f) \subset B(x, R_f)$ y por lo tanto podemos escribir

$$|u(x)| \leq \int_{B(x,R_f)} |\Phi(x-y)||f(y)|dy \leq \|f\|_\infty \int_{B(x,R_f)} |\Phi(x-y)|dy = \|f\|_\infty \int_{B(0,R_f)} |\Phi(y)|dy.$$

Lo único que debemos hacer ahora es calcular (o estimar) la integral y para ello usamos la definición de Φ.

- Si $n = 2$ tenemos
$$\int_{B(0,R_f)} |\Phi(y)|dy = C\int_0^{R_f} |\log(|\rho|)|\rho d\rho < +\infty.$$
- Si $n > 2$ se tiene
$$\int_{B(0,R_f)} |\Phi(y)|dy = C\int_0^{R_f} \rho d\rho < +\infty.$$

Es decir que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene

$$|u(x)| \leq C\|f\|_\infty.$$

$\Longrightarrow$ Continuamos verificando que la función u definida por convolución por medio de la expresión (7) es de clase $\mathcal{C}^2$. Para ello escribimos

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y)f(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y)f(x-y)dy,$$

de manera que si e_i es el i-ésimo vector unidad de $\mathbb{R}^n$ y si $h \neq 0$ se tiene la identidad

$$\frac{u(x+he_i)-u(x)}{h} = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y)\left(\frac{f(x+he_i-y)-f(x-y)}{h}\right)dy,$$

de manera que pasando al límite cuando $h \longrightarrow 0$ se tiene

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x-y)dy,$$

y razonando de manera totalmente similar tenemos que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x-y)dy.$$

En particular tenemos que esta función es continua en la variable x, además, dado que f es una función de clase $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$, por un razonamiento similar al primer punto obtenemos que u es de clase $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$.

$\Longrightarrow$ Debemos verificar ahora que la función u definida por convolución es solución de la ecuación de Poisson. Para ello escribimos:

$$\Delta u = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y)\Delta_x f(x-y)dy = \underbrace{\int_{B(0,\varepsilon)} \Phi(y)\Delta_x f(x-y)dy}_{I_1} + \underbrace{\int_{B(0,\varepsilon)^c} \Phi(y)\Delta_x f(x-y)dy}_{I_2}.$$

- Para el primer término I_1 tenemos:

$$|I_1| \leq \int_{B(0,\varepsilon)} |\Phi(y)\Delta_x f(x-y)|dy \leq C\|\Delta f\|_\infty \int_{B(0,\varepsilon)} |\Phi(y)|dy \leq C\begin{cases} \varepsilon^2|\ln(\varepsilon)| & (n=2) \\ \varepsilon^2 & (n>2). \end{cases}$$

- Para el segundo término I_2 se tiene, por una integración por partes

$$I_2 = \underbrace{-\int_{B(0,\varepsilon)^c} \nabla\Phi(y)\nabla f(x-y)dy}_{I_3} + \underbrace{\int_{\partial B(0,\varepsilon)} \Phi(y)\frac{\partial f}{\partial \nu}(x-y)dS(y)}_{I_4},$$

en donde ν es el vector unitario interno a lo largo del borde $\partial B(0,\varepsilon)$ de la bola $B(0,\varepsilon)$. Tenemos entonces para la integral I_4 la estimación:

$$|I_4| \leq \|\nabla f\|_\infty \int_{\partial B(0,\varepsilon)} |\Phi(y)|dS(y) \leq C\begin{cases} \varepsilon|\ln(\varepsilon)| & (n=2) \\ \varepsilon & (n>2). \end{cases}$$

Para la integral I_3 tenemos, integrando una segunda vez por partes:

$$I_3 = \int_{B(0,\varepsilon)^c} \Delta\Phi(y)f(x-y)dy - \int_{\partial B(0,\varepsilon)} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y)f(x-y)dS(y) = -\int_{\partial B(0,\varepsilon)} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y)f(x-y)dS(y),$$

puesto que la función Φ es armónica fuera del origen.

Ahora, dado que $\nabla\Phi(y) = \frac{-1}{nv_n}\frac{y}{|y|^n}$ cuando $y \neq 0$ y como se tiene que $\nu = \frac{-y}{|y|} = \frac{-y}{\varepsilon}$ sobre $\partial B(0,\varepsilon)$, tenemos la identidad

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y) = \nu \cdot \nabla\Phi(y) = \frac{1}{nv_n\varepsilon^{n-1}}$$

sobre $\partial B(0,\varepsilon)$. Finalmente, dado que $nv_n\varepsilon^{n-1}$ es la superficie del área de la esfera $\partial B(0,\varepsilon)$, podemos escribir

$$I_3 = -\frac{1}{nv_n\varepsilon^{n-1}} \int_{\partial B(0,\varepsilon)} f(x-y)dS(y) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} -f(x).$$

De esta manera, haciendo $\varepsilon \to 0$ en nuestra descomposición del producto de convolución obtenemos finalmente que

$$-\Delta u(x) = f(x),$$

y de esta manera hemos terminado la demostración del teorema. $\blacksquare$

Observación 5 *Se puede demostrar que se tiene la identidad $-\Delta\Phi = \delta_0$, de manera que se tiene*

$$-\Delta u = -\Delta(\Phi * f) = (-\Delta\Phi) * f = \delta_0 * f = f.$$

2.3. Propiedades en subconjuntos de las funciones armónicas

Hasta ahora hemos trabajado en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ y es tiempo de ver lo que sucede cuando se trabaja sobre un subconjunto abierto Ω de $\mathbb{R}^n$.

Teorema 2 *Si $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ es una función armónica, entonces se tiene las identidades*

$$u(x) = \frac{1}{|\partial B(x,r)|}\int_{\partial B(x,r)} u(y)dS(y) = \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} u(y)dy, \tag{8}$$

para cada bola $B(x,r) \subset \Omega$.

Demostración. Empezamos con la primera identidad. Si escribimos

$$\varphi(r) = \frac{1}{|\partial B(x,r)|}\int_{\partial B(x,r)} u(y)dS(y) = \frac{1}{|\partial B(0,1)|}\int_{\partial B(0,1)} u(x+rz)dS(z),$$

de donde se obtiene que

$$\begin{aligned}
\varphi'(r) &= \frac{1}{|\partial B(0,1)|}\int_{\partial B(0,1)} \nabla u(x+rz)\cdot z dS(z) = \frac{1}{|\partial B(x,r)|}\int_{\partial B(x,r)} \nabla u(y)\cdot \frac{y-x}{r} dS(y) \\
&= \frac{1}{|\partial B(x,r)|}\int_{\partial B(x,r)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y)dS(y).
\end{aligned}$$

En este punto aplicamos la fórmula de Green para obtener la igualdad

$$\frac{1}{|\partial B(x,r)|}\int_{\partial B(x,r)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y)dS(y) = \frac{r}{n|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} \Delta u(y)dy = 0.$$

Con esto hemos pues verificado que la función φ es constante y por lo tanto podemos escribir

$$\varphi(x) = \lim_{t\to 0}\varphi(t) = \frac{1}{|\partial B(x,r)|}\int_{\partial B(x,r)} u(y)dS(y) = u(x),$$

y con esto hemos demostrado la primera identidad. Para la segunda identidad se procede de la siguiente manera:

$$\int_{B(x,r)} u(y)dy = \int_0^r \left(\int_{\partial B(x,s)} udS\right) ds,$$

pero por los cálculos anteriores se tiene que $\displaystyle\int_{\partial B(x,s)} udS = nv_n s^{n-1}u(x)$, de modo que podemos escribir

$$\int_0^r \left(\int_{\partial B(x,s)} udS\right) ds = u(x)\int_0^r nv_n s^{n-1} ds = r^n v_n u(x),$$

es decir que finalmente obtenemos

$$\int_{B(x,r)} u(y)dy = |B(x,r)|u(x),$$

lo que termina la demostración del teorema. ■

Este teorema posee un resultado recíproco en el sentido siguiente:

Teorema 3 *Si $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función de clase $\mathcal{C}^2(\Omega)$ que satisface la identidad*

$$u(x) = \frac{1}{|\partial B(x,r)|}\int_{\partial B(x,r)} u(y)dS(y),$$

para toda bola $B(x,r) \subset \Omega$, entonces la función u es armónica.

Demostración. Vamos a proceder por una reducción al absurdo. Entonces si $\Delta u \neq 0$, existe una bola $B(x,r) \subset \Omega$ tal que se tiene $\Delta u > 0$ dentro de $B(x,r)$. Pero por los cáculos precedentes tenemos que

$$0 = \varphi(r) = \frac{r}{n}\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} \Delta u(y)dy > 0,$$

de donde se obtiene una contradicción. ■

2.4. Propiedades

Estas propiedades de las funciones armónicas sobre subconjuntos van a ser muy útiles para poder demostrar de manera sencilla algunos resultados fundamentales.

El primero de estos resultados es el principio del máximo.

Teorema 4 *Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. Si $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función tal que $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ y tal que $\Delta u(x) = 0$ para todo punto $x \in \Omega$, entonces:*

- *El valor maximal sobre el conjunto $\bar{\Omega}$ de la función u se alcanza en la frontera:*

$$\max_{x\in\bar{\Omega}} u(x) = \max_{x\in\partial\Omega} u(x).$$

- *Si además el conjunto Ω es conexo y si existe un punto $x_0 \in \Omega$ tal que $u_0 = \max_{x\in\bar{\Omega}} u(x)$, entonces la función u es constante en el interior de Ω.*

Demostración. Supongamos que existe un punto $x_0 \in \Omega$ que alcanza el máximo: $u(x_0) = M = \max_{x\in\bar{\Omega}} u(x)$. Entonces para $0 < r < d(x_0, \partial\Omega)$ las propiedades estudiadas anteriormente nos indican que se tiene

$$M = u(x_0) = \frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{B(x_0,r)} u(y)dy \leq M.$$

Dado que se tiene la igualdad únicamente si la función u es constante e igual a M dentro de la bola $B(x_0,r)$, vemos que se tiene que $u(y) = M$ para todo y que pertenece a una bola $B(x,r)$. De esta manera vemos que el conjunto $\{x \in \Omega : u(x) = M\}$ es abierto y relativamente cerrado en Ω, y dado que Ω es conexo se tiene que es igual a Ω y con esto hemos demostrado el segundo punto. A partir de esta propiedad se deduce sin problema el primer punto. ■

La primera aplicación de este resultado es el siguiente teorema.

Teorema 5 *Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y sean $g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$ y $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ dos funciones dadas. Entonces existe una única solución al problema de borde siguiente:*

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{sobre } \Omega \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Demostración. Supongamos que existen dos funciones u y v que verifican este problema de borde. Si escribimos $w = \pm(u - v)$ vemos sin problema que w es una función armónica y por lo tanto, por el teorema anterior, se tiene que el valors máximo de w se alcanza en el borde del conjunto Ω. Pero dado que $u = v = g$ en el borde, se tiene que $w = 0$ sobre $\partial\Omega$, de donde se deduce que $w = 0$ y por lo tanto se obtiene la unicidad de las soluciones. ■

Continuamos con las propiedades de las funciones armónicas. El resultado a continuación es muy sorprendente pues vamos a ver que si una función de clase $\mathcal{C}^2$ es armónica, entonces es automáticamente infinitamente diferenciable. Este punto es bastante interesante pues en la noción de función armónica, solo intervienen dos derivadas y lo que vamos a demostrar es que es posible *ganar* en regularidad.

Teorema 6 *Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ si $u \in \mathcal{C}(\Omega)$ verifica la identidad*

$$u(x) = \frac{1}{|\partial B(x,r)|}\int_{\partial B(x,r)} u(y)dS(y) = \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} u(y)dy,$$

para toda bola $B(x,r)$ de Ω, entonces se tiene que $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

Demostración. Sea $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^\infty$, radial, a soporte compacto contenido en la bola unidad y de integral igual a uno. Definimos para todo $\varepsilon > 0$ la función $\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\varphi(\frac{|x|}{\varepsilon})$. Entonces se tiene que la función u_ε definida por $u_\varepsilon = \varphi_\varepsilon * u$ sobre el conjunto $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$ es una función de clase $\mathcal{C}^\infty(\Omega_\varepsilon)$.

Escribimos ahora para un punto $x \in \Omega_\varepsilon$:

$$u_\varepsilon(x) = \int_\Omega \varphi_\varepsilon(x-y)u(y)dy = \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{B(x,\varepsilon)} \varphi\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)u(y)dy = \frac{1}{\varepsilon^n}\int_0^\varepsilon \varphi\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)\left(\int_{\partial B(x,r)} udS\right)dr,$$

usando la hipótesis podemos entonces escribir

$$u_\varepsilon(x) = u(x)\frac{1}{\varepsilon^n}\int_0^\varepsilon \varphi\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)\left(nv_n r^{n-1}\right)dr = u(x)\frac{1}{\varepsilon^n}\int_{B(0,\varepsilon)} \varphi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)dy = u(x).$$

Gracias a estos cálculos hemos demostrado que se tiene la identidad $u_\varepsilon = u$ sobre el conjunto Ω_ε, es decir que u es de clase $\mathcal{C}^\infty$ sobre Ω_ε para todo $\varepsilon > 0$. Dado que el conjunto Ω es abierto, se deduce el resultado buscado. ■

Continuamos utilizando los resultados anteriores para estudiar con más detalle el comportamiento de las derivadas de las funciones armónicas. En este sentido tenemos el siguiente teorema.

Teorema 7 *Sea u una función armónica sobre un subconjunto abierto Ω de $\mathbb{R}^n$. Entonces para toda bola $B(x_0, r) \subset \Omega$ y para todo multi-índice α tal que $|\alpha| = k$ se tiene*

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{C_k}{r^{n+k}}\|u\|_{L^1(B(x_0,r))}.$$

Demostración. Vamos a proceder por inducción. Evidentemente, a partir de las fórmulas de promedio dadas en (8) se tiene que esta mayoración es válida cuando $k = 0$.

Para el caso $k = 1$ razonamos de la siguiente manera: dado que la función u es armónica, sabemos por el Teorema 6 que esta función es regular. Entonces como se tiene $\Delta u = 0$, vemos que las funciones $\partial_{x_i} u$ también son armónicas para $i = 1, ..., n$ y por lo tanto podemos escribir, para un punto $x_0 \in \Omega$:

$$\begin{aligned} |\partial_{x_i} u(x_0)| &= \left|\frac{1}{|B(x_0, r/2)|}\int_{B(x_0,r/2)} \partial_{x_i} u(y)dy\right| \\ &= \left|\frac{2^n}{v_n r^n}\int_{\partial B(x_0,r/2)} u\nu_i dS\right| \leq \frac{2n}{r}\|u\|_{L^\infty(\partial B(x_0,r/2))}. \end{aligned}$$

Sea ahora $x \in \partial B(x_0, r/2)$, entonces se tiene que $B(x, r/2) \subset B(x_0, r) \subset \Omega$ y entonces, utilizando una vez más las fórmulas (8) podemos escribir

$$|u(x)| = \left| \frac{1}{|B(x_0, r/2)|} \int_{B(x_0,r/2)} u(y)dy \right| \leq \frac{1}{|B(x_0, r/2)|} \|u\|_{L^1(B(x_0,r))} = \frac{1}{v_n} \left(\frac{2}{r}\right)^n \|u\|_{L^1(B(x_0,r))}.$$

De esta manera obtenemos la mayoración

$$\|u\|_{L^\infty(\partial B(x_0,r/2))} \leq \frac{1}{v_n} \left(\frac{2}{r}\right)^n \|u\|_{L^1(B(x_0,r))},$$

lo que nos permite escribir $|\partial_{x_i} u(x_0)| \leq \frac{2^{n+1}n}{v_n} \frac{1}{r^{n+1}} \|u\|_{L^1(B(x_0,r))}$, de donde se obtiene, para todo multi-índice α tal que $|\alpha| = 1$, la expresión

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{2^{n+1}n}{v_n} \frac{1}{r^{n+1}} \|u\|_{L^1(B(x_0,r))}.$$

Con esto hemos demostrado el resultado del teorema cuando $k = 1$, pasemos pues al caso cuando $k \geq 2$. Para ello, por inducción, supondremos que se tiene el resultado para todo multi-índice de grado inferior o igual a $k - 1$.

Sea ahora una bola $B(x_0, r) \subset \Omega$ y sea α un multi-índice tal que $|\alpha| = k$. Entonces se tiene que $D^\alpha u = \partial_{x_i}(D^\beta u)$ para algún $i = 1, ..., n$ con $|\beta| = k - 1$. Repitiendo los cálculos anteriores obtenemos

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{nk}{r} \|D^\beta u\|_{L^\infty(\partial B(x_0,r/k))},$$

y, de la misma manera, si $x \in \partial B(x_0, r/k)$, entonces $B(x_0, r(k-1)/k) \subset B(x_0, r) \subset \Omega$ de donde se obtiene $|D^\beta u(x)| \leq \frac{C(k,n)}{r^{n+k-1}} \|u\|_{L^1(B(x_0,r))}$, es decir que finalmente se tiene la mayoración

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{C_k}{r^{n+k}} \|u\|_{L^1(B(x_0,r))}.$$

■

El control de las derivadas de las funciones armónicas nos permite enunciar (y demostrar) de forma sencilla un resultado importante.

Teorema 8 (Liouville) *Si $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función armónica y acotada, entonces u es una función constante.*

Demostración. Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y sea $r > 0$, entonces aplicando el teorema anterior sobre la bola $B(x_0, r)$ tenemos la estimación:

$$|Du(x_0)| \leq \frac{C(n)}{r^{n+1}} \|u\|_{L^1(B(x_0,r))} \leq \frac{C(n)v_n}{r} \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \underset{r \to +\infty}{\longrightarrow} 0,$$

lo que muestra que $Du = 0$ y por lo tanto que u es constante. ■

Con esto llegamos al resultado a continuación.

Teorema 9 *Sea $f \in \mathcal{C}^2_c(\mathbb{R}^n)$, con $n > 2$. Entonces toda solución acotada del problema*

$$-\Delta u = f \qquad \textit{sobre } \mathbb{R}^n,$$

es de la forma

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y) f(y) dy + C,$$

para alguna constante C.

Demostración. Dado que $\Phi(x) \underset{|x|\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ para $n > 2$, se tiene que $v(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y)f(y)dy$ es una solución acotada del problema de Poisson $-\Delta u = f$ sobre $\mathbb{R}^n$. De esta manera se tiene que la función $w = u - v$ es una función armónica acotada, y por lo tanto constante por el teorema anterior y a partir de este resultado se obtiene la fórmula de representación

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y)f(y)dy + C.$$

■

Para terminar este breve estudio de la ecuación de Laplace y de las funciones armónicas, presentamos un teorema de gran utilidad en las aplicaciones.

Teorema 10 (Desigualdad de Harnack) *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y sea A un conjunto abierto conexo tal que $A \subset \bar{A} \subset \Omega$ y tal que $\bar{A}$ sea compacto. Entonces, existe una constante positiva C que depende únicamente de A tal que*

$$\sup_{x\in A} u(x) \leq C \inf_{x\in A} u(x),$$

para toda función u positiva armónica en Ω.

Demostración. Sea $r = \frac{1}{4}d(A, \partial\Omega)$ y sean $x, y \in A$ tal que $|x-y| \leq r$. Entonces podemos escribir

$$u(x) = \frac{1}{|B(x,2r)|}\int_{B(x,2r)} u(z)dz \geq \frac{1}{v_n 2^n r^n}\int_{B(y,r)} u(z)dz = \frac{1}{2^n}\frac{1}{|B(y,r)|}\int_{B(y,r)} u(z)dz = \frac{1}{2^n}u(y),$$

de donde deducimos que $2^n u(y) \geq u(x) \geq \frac{1}{2^n}u(y)$, para todo $x, y \in A$ tales que $|x-y| \leq r$.

Como el conjunto A es conexo y como $\bar{A}$ es compacto, podemos recubrir el conjunto $\bar{A}$ por medio de una sucesión finita de abiertos $(B_i)_{i=1,\dots,N}$, cado uno de radio r y tales que $B_i \cap B_{i-1} \neq \emptyset$ para todo $i = 2, ..., N$. De esta manera podemos escribir

$$u(x) \geq \frac{1}{2^{nN}}u(y),$$

para todo $x, y \in A$ y de esta manera terminamos la demostración de este teorema. ■

¿Qué nos dice esta desigualdad? Esta mayoración expresa el hecho que el supremo de la función u *no debe estar muy lejos* de su ínfimo, dicho de otra manera, las oscilaciones de la función no deben ser muy fuertes y esto implica la regularidad de esta función u.