Lección n°3: Estimaciones para tiempos largos

USFQ, septiembre 2016

Índice

1. Buen colocamiento en H^1

Queremos ahora resolver la ecuación de NLS

$$\begin{aligned} &i\partial_t u + \Delta u = f, \quad f(t,x) = f(u(t,x)) = \mp |u(t,x)|^2 u(t,x), \\ &u(t=0,x) = u_0(x), \end{aligned} \tag{1}$$

con $x \in \mathbb{R}^3$, que se puede escribir como (ver lección anterior)

$$u(t) = \mathcal{T}[u](t), \tag{2}$$

donde

$$\mathcal{T}[u](t) := S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(u(s))ds, \quad f(u(s)) = \mp |u(s)|^2 u(s). \tag{3}$$

La idea es utilizar el Teorema de Punto fijo de Banach en la bola cerrada

$$B_R := \Big\{ u \in C(I, H^1) \cap L_I^8 W_x^{1,\frac{12}{5}} \ : \ \|u\|_{L_T^\infty H_x^1} + \|u\|_{L_T^8 W_x^{1,\frac{12}{5}}} \leq R \Big\},$$

donde $T > 0$ y $R > 2\|u_0\|_{H_x^1}$ son constantes a elegir a posteriori. Antes de comenzar a estimar, recordemos las estimaciones de Strichartz de la lección anterior:

Teorema 1 (Strichartz) *Existe una constante $C > 0$ tal que, para todo $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$, y para todo par de puntos admisibles (q,r), uno tiene*

$$\|S(t)u_0\|_{L_{\mathbb{R}}^q L_x^r} \leq C\|u_0\|_{L_x^2}, \qquad S(t) = e^{it\Delta}, \tag{4}$$

y para un intervalo $I = [0,T]$,

$$\Big\| \int_0^t S(t-s)f(u(s))ds \Big\|_{L_I^q L_x^r} \leq C\|f(u)\|_{L_I^{q'} L_x^{r'}}, \tag{5}$$

donde $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$ y también $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$.

1.1. Estimaciones de Punto Fijo

Lo más simple es hacer la estimación de energía:

$$
\begin{aligned}
\|\mathcal{T}[u](t)\|_{L^2_x} &\leq \|S(t)u_0\|_{L^2_x} + \left\| \int_0^t S(t-s)f(u(s))ds \right\|_{L^2_x} \\
&\leq \|u_0\|_{L^2_x} + \int_0^t \|f(u(s))\|_{L^2_x} ds \\
&\leq \|u_0\|_{L^2_x} + CT\||u|^3\|_{L^2} \\
&\leq \|u_0\|_{L^2_x} + CT\|u\|^3_{L^6} \\
&\leq \frac{1}{2}R + CT\|u\|^3_{H^1} \\
&\leq \frac{1}{2}R + CTR^3 \\
&< R,
\end{aligned}
$$

para $T > 0$ pequeño, o bien R pequeño y T fijo. (Notar que entre la cuarta y quinta línea arriba hemos usado la injección continua de Sobolev $H^1 \to L^6$ válida en $\mathbb{R}^3$.)

La estimación restante de $\|\nabla\mathcal{T}[u](t)\|_{L^2_x}$ queda de ejercicio para el lector, pero puede realizarse usando la desigualdad (17) de la Lección 2, más argumentos muy similares a los presentados a continuación.

Por otro lado, notemos que $(8, \frac{12}{5})$ es un par admisible. Vamos a estimar el gradiente en la norma $W^{1,\frac{12}{5}}$, que es el caso más difícil (hacer el caso faltante sin gradiente como ejercicio). Usando (3), (4) y (5), uno tiene

$$
\|\nabla_x \mathcal{T}[u]\|_{L^8_I L^{\frac{12}{5}}_x} \lesssim \|\nabla_x u_0\|_{L^2_x} + \|\nabla_x(|u|^2 u)\|_{L^{8/7}_I L^{12/7}_x}.
$$

Por otro lado, uno tiene

$$
\begin{aligned}
\|\nabla_x(|u(t)|^2 u(t))\|_{L^{12/7}_x} &\lesssim \||u(t)|^2 |\nabla_x u(t)|\|_{L^{12/7}_x} \\
&= \left(\int |u(t,x)|^{24/7} |\nabla_x u(t,x)|^{12/7} dx \right)^{7/12} \\
&\leq \left(\int |u(t,x)|^{12} dx \right)^{1/6} \left(\int |\nabla_x u(t,x)|^{12/5} dx \right)^{5/12} \qquad \text{(Hölder en espacio)} \\
&= \|u(t)\|^2_{L^{12}_x} \|\nabla_x u(t)\|_{L^{12/5}_x} \\
&\lesssim \|u(t)\|^2_{W^{1,12/5}_x} \|\nabla_x u(t)\|_{L^{12/5}_x} \quad \text{(Usando Sobolev)} \\
&\lesssim \|u(t)\|^3_{W^{1,12/5}_x}.
\end{aligned}
$$

Por lo que

$$
\begin{aligned}
\int_0^T \|\nabla_x(|u(t)|^2 u(t))\|^{8/7}_{L^{12/7}_x} dt &\lesssim \int_0^T \|u(t)\|^{24/7}_{W^{1,12/5}_x} dt \\
&\leq \Big(\int_0^T 1 dt \Big)^{4/7} \Big(\int_0^T \|u(t)\|^8_{W^{1,12/5}_x} dt \Big)^{3/7} \quad \text{(Hölder en tiempo)} \\
&= T^{4/7} \|u\|^{24/7}_{L^8_I W^{1,12/5}_x}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$
\|\nabla_x(|u(t)|^2 u(t))\|_{L^{8/7}_I L^{12/5}_x} \leq T^{1/2} \|u\|^3_{L^8_I W^{1,12/5}_x},
$$

por lo que

$$
\begin{aligned}
\|\nabla_x \mathcal{T}[u]\|_{L^8_I L^{12/5}_x} &\lesssim \|u_0\|_{\dot{H}^1_x} + T^{1/2} \|u\|^3_{L^8_I W^{1,12/5}_x} \\
&\lesssim \|u_0\|_{H^1_x} + T^{1/2} R^3.
\end{aligned}
$$

Luego, escogiendo $R > 2C\|u_0\|_{L^2_x}$ grande (*dependiendo de la norma* de u_0), y luego T pequeño tal que $T^{1/2}R^3 < \frac{1}{2C}R$, uno obtiene

$$\|\mathcal{T}[u]\|_{L^8_I W^{1,12/5}_x} \leq R.$$

Por lo tanto, $\mathcal{T}$ envía B_R hacia B_R.

Probemos ahora que para T pequeño, $\mathcal{T}$ es una contracción. En efecto, para $u, v \in B_R$,

$$\|\mathcal{T}[u] - \mathcal{T}[v]\|_{L^8_I W^{1,12/5}_x} = \left\| \int_0^t S(t-s)(f(u(s)) - f(v(s)))ds \right\|_{L^8_I W^{1,12/5}_x},$$

donde $f(u) = -|u|^2 u$. Como siempre, estimamos un caso, dejando el otro al lector. En esta oportunidad estimamos la norma $L^{12/5}$. Usando Strichartz (5),

$$\|\mathcal{T}[u] - \mathcal{T}[v]\|_{L^8_I L^{12/5}_x} \lesssim \||u|^2 u - |v|^2 v\|_{L^{8/7}_I L^{12/7}_x}.$$

No es difícil probar que para $a, b \in \mathbb{C}$,

$$\big| |a|^2 a - |b|^2 b \big| \lesssim (|a|^2 + |b|^2)|a - b|.$$

Luego,

$$\|\mathcal{T}[u] - \mathcal{T}[v]\|_{L^8_I L^{12/5}_x} \lesssim \|(|u|^2 + |v|^2)|u - v|\|_{L^{8/7}_I L^{12/7}_x}.$$

Como en la estimación precedente, usando Hölder,

$$\|(|u|^2 + |v|^2)|u - v|\|_{L^{12/7}_x} \lesssim (\|u\|^2_{L^{12}_x} + \|v\|^2_{L^{12}_x})\|u - v\|_{L^{12/5}},$$

de donde

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{T}[u] - \mathcal{T}[v]\|_{L^8_I L^{12/7}_x} &\leq C \left\| (\|u\|^2_{L^{12}_x} + \|v\|^2_{L^{12}_x})\|u - v\|_{L^{12/7}_x} \right\|_{L^{8/7}_I} \\
&\leq CT^{1/2}(\|u\|^2_{L^8_I L^{12}_x} + \|v\|^2_{L^8_I L^{12}_x})\|u - v\|_{L^8_I L^{12}_x} \\
&\leq CT^{1/2}R^2\|u - v\|_{L^8_I W^{1,12/5}_x}.
\end{aligned}$$

Luego, para T pequeño, $\mathcal{T}$ es una contracción en B_R.

Concluimos pues, gracias al Teorema del Punto Fijo de Banach, que dado cualquier dato inicial $u_0 \in H^1$, la ecuación no-lineal (1) posee una solución $u(t)$, definida por un instante de tiempo $T > 0$ pequeño, de la formulación de Duhamel (2)-(3). Sin embargo, entender esta solución para tiempos largos es un problema no trivial.

Esta noción de solución se denomina *buen colocamiento local*, pues depende del intervalo de tiempo donde está definida la solución. En general, diremos que una ecuación está **localmente bien puesta** en H^s si, dado un dato inicial $u_0 \in H^s$, es posible encontrar un instante de tiempo $T = T(\|u_0\|_{H^s})$, y construir una única solución $u = u(t)$ de la formulación integral de la ecuación ($u = \mathcal{T}[u]$), y donde $u \in C([-T, T], H^s)$. Si es posible además construir tal solución para $T > 0$ arbitrario y u_0 de tamaño arbitrario, diremos que la ecuación está **globalmente bien puesta**.

Para entender el problema de existencia global, antes necesitaremos entender una noción simple de criticalidad.

2. Sobre criticalidad

La ecuación (1) posee ciertas cantidades formalmente conservadas, es decir, que no varían a través del tiempo. A manera de ejemplo, al igual que en el caso lineal, la **masa**

$$\int |u(t,x)|^2 dx \tag{6}$$

se conserva durante todo el flujo en tiempo de la ecuación. Una segunda es la **energía**

$$\frac{1}{2}\int |\nabla u(t,x)|^2 dx \mp \frac{1}{4}\int |u(t,x)|^4 dx. \tag{7}$$

(Probar estos resultados como ejercicio, suponiendo que la solución es suficientemente suave y decae rápidamente.)

Uno puede también preguntarse si es posible definir una solución para (1) si el dato inicial está sólo en L^2. La respuesta este problema es negativa, pero requiere de técnicas más avanzadas, pues (1) en dimensión tres corresponde a una ecuación **supercrítica** en términos de datos L^2.

En términos muy intuitivos (y poco rigurosos), criticalidad quiere decir lo siguiente: si $u(t,x)$ es solución de (1), entonces para cualquier $\lambda > 0$

$$\lambda u(\lambda^2 t, \lambda x)$$

también es solución de la ecuación, con dato inicial $\lambda u_0(\lambda x)$. Para este dato, se cumple que la norma $\dot{H}^{1/2}$ se preserva:

$$\|\lambda u_0(\lambda x)\|_{\dot{H}^{1/2}} = \|u_0\|_{\dot{H}^{1/2}},$$

por lo que diremos que la ecuación (1) es $H^{1/2}$ crítica. Otro ejemplo famoso de ecuación $H^{1/2}$ crítica es Navier-Stokes.

Por otro lado, cualquier norma $\dot{H}^s$, $s > \frac{1}{2}$ será tal que la ecuación será **subcrítica** para datos iniciales en ese espacio, y cualquier norma por debajo de $s = \frac{1}{2}$ será para (1) supercrítica, gracias a la identidad siguiente:

$$\|\lambda u_0(\lambda x)\|_{\dot{H}^s} = \lambda^{s-\frac{1}{2}}\|u_0\|_{\dot{H}^s}.$$

Dicho de otra forma, tomar datos sólo en L^2 en (1) probablemente lleve a un problema mal puesto, pero inclusive tomando datos en $H^{1/2-\varepsilon}$ la respuesta es la misma: la ecuación se comporta de manera muy negativa.

Por otro lado, si tomamos datos en el espacio subcrítico H^1 (como más arriba lo hicimos), la energía (7) está bien definida, por lo que se dice también que la ecuación es **energía subcrítica**. Por otro lado, tomar datos sólo en L^2, donde está definida la masa (6) solamente, equivale a decir que la ecuación es **masa supercrítica**.

Por lo tanto, (1) es "masa supercrítica", y "energía subcrítica".

3. Soluciones globales

¿Es posible decidir si la solución local construida vía el método de punto fijo es también global en tiempo? Este problema puede llegar a ser muy complicado, pero en nuestro caso será razonablemente simple de probar. Por simplicidad, consideremos el caso $d = 1$.

Sabemos desde ya (ver Lección 2) que la ecuación de Schrödinger

$$\begin{aligned} i\partial_t u + \partial_x^2 u = & \pm |u|^2 u, \quad (t,x) \in \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x, \quad u = u(t,x) \in \mathbb{C}, \\ u(t=0) = & \, u_0 \in L^2(\mathbb{R}), \end{aligned} \tag{8}$$

posee una solución $u = u(t)$ de su formulación integral, definida en L^2. Esta ecuación también posee una masa y una energía conservadas, que veremos más adelante. En efecto, una propiedad sorprendente de (8) es el hecho que posee *infinitas cantidades* conservadas, consecuencias de una propiedad más fundamental denominada *integrabilidad completa* de la ecuación.

Dos observaciones adicionales pueden hacerse, que el lector puede verificar a modo de ejercicio:

1. Un análisis simple revela que también existe una solución única para cierto tiempo $T > 0$ y datos $u_0 \in H^1$ (basta rehacer la demostración de la lección anterior sin usar Strichartz, sólo la inyección de Sobolev $H^1 \to L^\infty$).

2. El mismo resultado (de existencia de una solución única para datos H^1) puede obtenerse si se cambia el exponente $p = 3$ en

$$i\partial_t u + \partial_x^2 u = \pm |u|^{p-1}u, \quad (t,x) \in \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x, \quad u = u(t,x) \in \mathbb{C},$$
$$u(t=0) = u_0 \in H^1(\mathbb{R}),$$

por cualquier $1 < p < 5$. el caso $p = 5$ es más bien crítico, pues las estimaciones de Strichartz hechas en la Lección anterior ya no son necesariamente válidas (el lector puede convencerse de este hecho intentando rehacer la demostración en el caso $p = 5$).

Notemos ahora que las leyes de conservación de (8)

$$\int |u|^2(t,x)dx, \quad \frac{1}{2}\int |u_x|^2(t,x)dx \pm \frac{1}{4}\int |u|^4(t,x)dx$$

controlan la dinámica en tiempos grandes. Esto quiere decir que tanto la norma L^2 de la solución permanece constante, y además una combinación de la norma $\dot{H}^1$ y la norma L^4 permanece constante. Es aquí donde la diferencia entre focalisante y defocalisante es notoria: en el caso defocalisante, la energía

$$\frac{1}{2}\int |u_x|^2(t,x)dx + \frac{1}{4}\int |u|^4(t,x)dx$$

es siempre no negativa y acotada, por lo que es fácil notar que $\int |u_x|^2$ permanece acotada para cualquier instante de tiempo. Por lo mismo, concluimos que la ecuación está **globalmente bien puesta**.

En el caso focalisante, parte de lo anterior ya no se cumple. Tenemos una energía conservada, pero ambos términos poseen signos contrarios, por lo que podría darse el caso que ambos términos diverjan a infinito en tiempo finito, con la energía siempre conservada. Luego, lo único que podemos concluir de la conservación es que en realidad

$$\int |u_x|^2(t,x)dx \leq C\int |u|^4(t,x)dx.$$

Es aquí donde una propiedad muy importante aparece: para $p < 5$, es posible probar la **desigualdad de Gagliardo-Nirenberg**, que dice que

$$\int |f|^{p+1} \leq C_p\Big(\int |f_x|^2\Big)^{\frac{p-1}{4}}\Big(\int |f|^2\Big)^{\frac{p+3}{4}},$$

para cualquier $f \in H^1$, y donde la constante C_p tiene un valor específico conocido. Luego, si $p = 3$, podemos controlar la parte faltante de la norma H^1 usando sólo cantidades conservadas. Por lo mismo, es posible deducir que cualquier solución de (8) obtenida **con datos** H^1 debe ser global en tiempo.

4. Existencia global versus explosión en tiempo finito

Vimos que en el caso de dimensión uno, la ecuación (8) está globalmente bien puesta. Sin embargo, este resultado no siempre es cierto. Un ejemplo de ello lo da la ecuación original (1), puesta en $\mathbb{R}^3$. En el caso defocalisante no hay problemas en decir que la ecuación está globalmente bien puesta siguiendo el mismo análisis del párrafo anterior. Sin embargo, si ahora la ecuación es focalisante, un nuevo fenómeno ocurre: es posible encontrar soluciones que no están definidas para todo tiempo.

Una forma simple de ver esto es vía un fenómeno conocido como **virial**: una cantidad en principio siempre no-negativa, y que mide la concentración de la solución, se vuelve nula en un instante finito. En efecto,

$$V(t) := \frac{1}{2}\int |x|^2|u|^2(t,x)dx,$$

es una cantidad siempre nonegativa. Bajo el intervalo de existencia de la solución $u(t)$, se tiene

$$V'(t) = 2\,\mathrm{Im}\int x\cdot \bar{u}(t,x)\nabla u(t,x)dx,$$

como un simple cálculo usando (1) lo demuestra. Una segunda derivación (ejercicio) muestra que

$$V''(t) = 8E(u)(t) - \frac{1}{4}\int |u|^4(t,x)dx \leq 8E(u)(t).$$

Aquí $E(u)(t)$ no es más que la energía de la solución, que es una cantidad conservada durante la existencia de la misma. Lo anterior nos dice lo siguiente: cualquier dato inicial $u_0 \in H^1$ para el cual $E(u_0) < 0$ produce una solución que no puede estar definida para todo tiempo, pues

$$V''(t) \leq 8E(u_0) < 0,$$

esto es, V es estrictamente cóncava, lo que implica que debe anularse y ser negativa en algún momento, algo que es imposible vista la definición de $V(t)$. Por lo tanto, la solución debe dejar de existir para cierto tiempo.

5. Conclusiones

Hemos visto de manera muy somera los principios más básidos que rigen una ecuación dispersiva, para las ecuaciones de Schrödinger lineal y no lineal. Ambas se comportan a priori de manera similar, sin embargo, para poder resolver esta última, tuvimos la necesidad de introducir una serie de herramientas avanzadas del Análisis Funcional y Armónico.

Los elementos básidos que vimos fueron la noción de dispersión, onda plana, cantidades conservadas y estimaciones de dispersión. Entre los conceptos avanzados, hemos visto las estimaciones de Strichartz, la formulación de Duhamel y el uso del teorema del punto de fijo de Banach para construir una solución local a una ecuación no-lineal.

Otras ecuaciones dispersivas que obedecen formulaciones similares, estimaciones de Strichartz similares (algunas más complicadas que otras), pero en el fondo la filosofía es la misma. Algunos ejemplos de ecuaciones dispersivas son la ecuación de Korteweg-de Vries

$$u_t + (u_{xx} + u^2)_x = 0,$$

y la ecuación de ondas no lineal

$$u_{tt} - u_{xx} + |u|^{p-1}u = 0, \qquad p > 1,$$

entre otras. El lector está invitado a consultar por ejemplo las referencias [1, 2, 3] para más detalles.

Referencias

[1] Tierry Cazenave, *Semilinear Schrödinger equations*, Courant Lecture Notes vol. 10, 2003.

[2] Felipe Linares y Gustavo Ponce, *Introduction to nonlinear dispersive equations*, Universitext 2009, Springer New-York.

[3] Terence Tao, *Nonlinear Dispersive equations: local and global analysis*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 2006, 373pp.