Lección n°3: Soluciones débiles de Leray

USFQ, septiembre 2016

Índice

Introducción

En esta lección nos interesamos en las soluciones *débiles* de las ecuaciones de Navier-Stokes:

$$\partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} - \vec{\nabla} p, \quad div(\vec{u}) = 0,$$

y esta identidad debe ser considerada desde el punto de vista de las distribuciones.

Sabemos por las lecciones anteriores que cuando el dato inicial $\vec{u}_0$ es *grande*, un argumento de punto fijo permite obtener soluciones. Más precisamente se tiene la existencia y la unicidad de estas soluciones, pero únicamente en un intervalo de tiempo pequeño, en particular mientras más grande es el dato inicial, más pequeño es el tiempo de existencia. Deseamos ahora estudiar si es posible prolongar el tiempo de existencia de las soluciones y para ello seguiremos los pasos de Jean Leray en 1934 y las etapas son las siguientes:

(i) fijar un espacio funcional basándose en la estructura de la ecuación,

(ii) regularizar el problema y realizar un punto fijo en el problema regularizado,

(iii) obtener un control para prolongar las soluciones regularizadas,

(iv) pasar al límite de la regularización para obtener soluciones globales del problema inicial.

1. Lema de Rellich-Lions

En nuestro estudio de las soluciones débiles de las ecuaciones de Navier–Stokes, vamos a necesitar el resultado siguiente.

Teorema 1 *Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ y sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones definidas sobre $I\times\Omega$ tales que para todo $\varphi \in \mathcal{D}(I\times\Omega)$ se tenga:*

1) para $\alpha > 0$: $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|\varphi u_n\|_{L^2(I,H^\alpha(\Omega))} < +\infty$ y,

2) para $\beta < 0$ y $1 < p \leq 2$: $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|\varphi \partial_t u_n\|_{L^p(I,H^\beta(\Omega))} < +\infty$,

entonces existe una subsucesión $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge fuertemente hacia un límite $u \in (L^2_t L^2_x)_{loc}$: para todo $\varphi \in \mathcal{D}(I\times\Omega)$ se tiene $\lim\limits_{k\to+\infty} \displaystyle\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t,x)^2 |u_{n_k}(t,x) - u(t,x)|^2 dxdt = 0.$

2. Motivación

Antes de lanzarnos en cálculos complicados, puede ser útil estudiar la estructura de la ecuación para tener una intuición de lo que se podría eventualmente *obtener*. Consideramos pues la ecuación

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} - \vec{\nabla} p, \quad div(\vec{u}) = 0, \quad > 0, \\ \vec{u}(0,x) = \vec{u}_0, \end{cases}$$

sobre la cual no realizamos ninguna hipótesis sobre el dato inicial $\vec{u}_0$, pero en cambio vamos a suponer a fines pedagógicos que todas las funciones son lo suficientemente regulares para poder realizar ciertas operaciones.

Si multiplicamos toda esta ecuación por $\vec{u}$ e integramos en variable de espacio[1] obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^3} \big(\partial_t \vec{u} \cdot \vec{u}\big)(t,x)dx \;=\; \int_{\mathbb{R}^3} \big(\Delta \vec{u} \cdot \vec{u}\big)(t,x)dx - \int_{\mathbb{R}^3} \big((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} \cdot \vec{u}\big)(t,x)dx - \int_{\mathbb{R}^3} \big(\vec{\nabla} p \cdot \vec{u}\big)(t,x)dx$$

y por medio de integraciones por partes (puramente formales), se tiene

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} \partial_t |\vec{u}|^2(t,x)dx \;=\; -\int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i,j=1}^{3} (\partial_i u_j)^2(t,x)dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i,j=1}^{3} \partial_i u_i (u_j^2)(t,x)dx + \int_{\mathbb{R}^3} p(\vec{\nabla} \cdot \vec{u})(t,x)dx,$$

utilizando la propiedad $div(\vec{u}) = 0$ obtenemos la identidad

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} \partial_t |\vec{u}|^2(t,x)dx = -\int_{\mathbb{R}^3} |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2(t,x)dx,$$

es decir

$$\partial_t \|\vec{u}(t,\cdot)\|_{L^2}^2 = -2\|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}(t,\cdot)\|_{L^2}^2, \tag{1}$$

Esta identidad nos proporciona informaciones sobre el comportamiento temporal de la cantidad $\|\vec{u}(t,\cdot)\|_{L^2}$ y esto sugiere que la norma L^2 sea la norma adecuada para medir el tamaño de la función $\vec{u}$ en variable de espacio. Pero si adoptamos esta norma en la parte de izquierda, para la parte derecha de esta identidad tendremos que controlar la cantidad $\|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}(t,\cdot)\|_{L^2}$, lo que sugiere utilizar el espacio $\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$.

Si integramos con respecto al tiempo la identidad (1) obtendríamos la identidad

$$\|\vec{u}(t,\cdot)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\vec{u}(s,\cdot)\|_{\dot{H}^1}^2 ds = \|\vec{u}_0\|_{L^2}^2,$$

y este control nos indica que las cantidades $L_t^\infty L_x^2$ y $L_t^2 \dot{H}_x^1$ se mantienen en el tiempo, lo cual sugiere utilizar estas normas para estudiar soluciones. A pesar de que todos estos cálculos sean *totalmente heurísticos*, este control nos proporciona una buena intuición (veremos más adelante cómo dar un sentido riguroso a estos cálculos) y buscaremos soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes en el espacio $L^\infty\big([0,T], L^2(\mathbb{R}^3)\big) \cap L^2\big([0,T], \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)\big)$ para un cierto tiempo $0 < T < +\infty$, con la norma

$$\|\cdot\|_T = \|\cdot\|_{L_t^\infty(L_x^2)} + \|\cdot\|_{L_t^2(\dot{H}_x^1)}.$$

Una vez que el espacio funcional ha sido fijado, vamos a ver ahora que no va a ser posible utilizarlo *directamente* y que será necesario realizar ciertas modificaciones.

3. Cálculos preliminares

A partir de las ideas de la sección precedente y utilizando el proyector de Leray $\mathbb{P}$ definido en la lección anterior, nos interesamos ahora en el problema

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - \mathbb{P}\big((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}\big), \quad div(\vec{u}) = 0, \\ \vec{u}(0,x) = \vec{u}_0, \end{cases}$$

[1] Suponiendo que este sea posible, pues en regla general no lo es!

en donde suponemos que $\vec{u}_0 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con $\vec{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$. Con estos datos deseamos realizar un punto fijo en el espacio funcional $L^\infty\big([0,T], L^2(\mathbb{R}^3)\big) \cap L^2\big([0,T], \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)\big)$ dotado de la norma

$$\|\vec{u}\|_T = \|\vec{u}\|_{L^\infty_t(L^2_x)} + \|\vec{u}\|_{L^2_t(\dot{H}^1_x)} = \sup_{0\leq t\leq T} \|\vec{u}(t,\cdot)\|_{L^2_x} + \left(\int_0^T \|\vec{u}(t,\cdot)\|^2_{\dot{H}^1_x} dt\right)^{1/2}, \tag{2}$$

para un cierto tiempo T tal que $0 < T < T^*$ que será fijado posteriormente.

Para ello consideramos la formulación integral de las ecuaciones de Navier-Stokes:

$$\vec{u}(t,x) = \underbrace{h_t * \vec{u}_0(x)}_{(i)} - \underbrace{\int_0^t h_{(t-s)} * \mathbb{P}\big((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\big)(s,x)ds}_{(ii)}, \tag{3}$$

y vamos a estudiar los términos (i) y (ii) en función de la norma (2) para obtener las condiciones necesarias de aplicación del principio de contracción de Picard estudiado en la Lección 2.

- Parte (i). Para este término tenemos el resultado siguiente

Proposición 1 *Si $\vec{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$, entonces*

$$\|h_t * \vec{u}_0\|_T \leq \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \|\vec{u}_0\|_{L^2}.$$

Prueba. Tenemos la desigualdad $\|h_t * \vec{u}_0\|_{L^2} \leq \|\vec{u}_0\|_{L^2}\|h_t\|_{L^1} = \|\vec{u}_0\|_{L^2}$ que es válida para todo $t > 0$ puesto que el núcleo del calor h_t está normalizado en norma L^1 y entonces se tiene

$$\|h_t * \vec{u}_0\|_{L^\infty_t(L^2_x)} \leq \|\vec{u}_0\|_{L^2}. \tag{4}$$

Si estudiamos la cantidad $\|h_t * \vec{u}_0\|_{L^2_t(\dot{H}^1_x)}$ escribimos

$$\begin{aligned}\|h_t * \vec{u}_0\|^2_{L^2_t(\dot{H}^1_x)} &= \int_0^T \|h_t * \vec{u}_0\|^2_{\dot{H}^1_x} dt = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} e^{-2t|\xi|^2} |\xi|^2 |\widehat{\vec{u}_0}(\xi)|^2 d\xi dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^3}\int_0^T e^{-2t|\xi|^2}|\xi|^2|\widehat{\vec{u}_0}(\xi)|^2 dt d\xi = \int_{\mathbb{R}^3}\int_0^{2|\xi|^2 T} e^{-\tau}|\xi|^2|\widehat{\vec{u}_0}(\xi)|^2 \frac{d\tau}{2|\xi|^2} d\xi \leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} |\widehat{\vec{u}_0}(\xi)|^2 d\xi,\end{aligned}$$

y se tiene la mayoración

$$\|h_t * \vec{u}_0\|_{L^2_t(\dot{H}^1_x)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\|\vec{u}_0\|_{L^2}. \tag{5}$$

De esta manera, con las desigualdades (4) y (5), como se tiene por definición

$$\|\cdot\|_T = \|\cdot\|_{L^\infty_t(L^2_x)} + \|\cdot\|_{L^2_t(\dot{H}^1_x)},$$

se obtiene la desigualdad buscada. ∎

- Parte (ii). Para este término, vamos a empezar con un resultado general.

Proposición 2 *Sea $0 < T < T^*$, si $\vec{f} \in L^2\big([0,T^*], \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)\big)$ entonces*

$$\left\|\int_0^t h_{(t-s)} * \mathbb{P}\big(\vec{f}(s,\cdot)\big)ds\right\|_T \leq (2+\sqrt{2})\|\vec{f}\|_{L^2_t(\dot{H}^{-1}_x)}.$$

Prueba. Empezamos con la norma $\|\cdot\|_{L^\infty_t(L^2_x)}$ y entonces escribimos

$$\left\|\int_0^t h_{(t-s)} * \mathbb{P}\big(\vec{f}(s,\cdot)\big)ds\right\|_{L^\infty_t(L^2_x)} = \sup_{0\leq t\leq T}\left\|\int_0^t h_{(t-s)} * \mathbb{P}\big(\vec{f}(s,\cdot)\big)ds\right\|_{L^2_x}.$$

Estudiaremos primero la norma L^2 en la variable de espacio para después considerar la norma L^∞ en la variable temporal. Entonces, por dualidad tenemos:

$$\left\|\int_0^t h_{(t-s)} * \mathbb{P}\big(\vec{f}(s,\cdot)\big)ds\right\|_{L^2_x} = \sup_{\|\varphi\|_{L^2}\leq 1}\left|\int_{\mathbb{R}^3}\left(\int_0^t h_{(t-s)} * \mathbb{P}\big(\vec{f}(s,x)\big)ds\right)\varphi(x)dx\right|$$

$$= \sup_{\|\varphi\|_{L^2}\leq 1}\left|\int_{\mathbb{R}^3}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3} h_{(t-s)}(x-y)\mathbb{P}\big(\vec{f}(s,y)\big)\varphi(x)dydsdx\right| = \sup_{\|\varphi\|_{L^2}\leq 1}\left|\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3} h_{(t-s)} * \varphi(-y)\mathbb{P}\big(\vec{f}(s,y)\big)dyds\right|$$

$$\leq \sup_{\|\varphi\|_{L^2}\leq 1}\left(\int_0^t \|h_{(t-s)} * \varphi\|_{\dot{H}^1_x}\|\mathbb{P}\big(\vec{f}(s,\cdot)\big)\|_{\dot{H}^{-1}_x}ds\right) \leq \|\mathbb{P}\big(\vec{f}(\cdot,\cdot)\big)\|_{L^2_t(\dot{H}^{-1}_x)}\sup_{\|\varphi\|_{L^2}\leq 1}\left(\int_0^t \|h_{(t-s)} * \varphi\|^2_{\dot{H}^1_x}ds\right)^{1/2},$$

y utilizando la estimación (5) de la proposición anterior se tiene

$$\left\|\int_0^t h_{(t-s)} * \mathbb{P}\big(\vec{f}(s,\cdot)\big)ds\right\|_{L^2_x} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\|\mathbb{P}\big(\vec{f}(\cdot,\cdot)\big)\|_{L^2_t(\dot{H}^{-1}_x)}.$$

Entonces, tomando la norma $L^\infty([0,T])$ en la variable temporal y utilizando la continuidad del proyector de Leray en los espacios de Sobolev, se obtiene

$$\left\|\int_0^t h_{(t-s)} * \mathbb{P}\big(\vec{f}(s,\cdot)\big)ds\right\|_{L^\infty_t(L^2_x)} \leq \sqrt{2}\|\vec{f}(\cdot,\cdot)\|_{L^2_t(\dot{H}^{-1}_x)}. \tag{6}$$

Ahora, para estudiar la norma $L^2_t(\dot{H}^1_x)$, recordamos el resultado siguiente que ya ha sido demostrado en la lección anterior.

Lema 1 (Regularidad maximal del núcleo del calor) *Sea $g \in L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$, definimos el operador $T(g)$ por medio de la expresión*

$$T(g)(t,x) = \int_0^t h_{(t-s)} * \Delta g(s,x)ds.$$

Entonces T es un operador de convolución continuo de $L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ en $L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ y se tiene la desigualdad

$$\|T(g)\|_{L^2_t(L^2_x)} \leq \|g\|_{L^2_t(L^2_x)}.$$

Vamos a utilizar este resultado para estudiar la cantidad $\left\|\int_0^t h_{(t-s)} * \mathbb{P}\big(\vec{f}(s,\cdot)\big)ds\right\|_{L^2_t(\dot{H}^1_x)}$, en efecto escribimos

$$\left\|\int_0^t h_{(t-s)} * \mathbb{P}\big(\vec{f}(s,\cdot)\big)ds\right\|_{L^2_t(\dot{H}^1_x)} = \left\|\int_0^t h_{(t-s)} * (-\Delta)^{\frac{1}{2}}\mathbb{P}\big(\vec{f}(s,\cdot)\big)ds\right\|_{L^2_t(L^2_x)}$$

$$= \left\|\int_0^t h_{(t-s)} * \Delta(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}\mathbb{P}\big(\vec{f}(s,\cdot)\big)ds\right\|_{L^2_t(L^2_x)},$$

y si definimos $\vec{g}(s,x) = (-\Delta)^{-\frac{1}{2}}\mathbb{P}\big(\vec{f}(s,\cdot)\big)$, por hipótesis sobre la función $\vec{f}$ tenemos que $\vec{g} \in L^2_t(L^2_x)$ y obtenemos entonces la expresión

$$\left\|\int_0^t h_{(t-s)} * \mathbb{P}\big(\vec{f}(s,\cdot)\big)ds\right\|_{L^2_t(\dot{H}^1_x)} = \left\|\int_0^t h_{(t-s)} * \Delta\vec{g}(s,\cdot)ds\right\|_{L^2_t(L^2_x)},$$

entonces aplicando el Lema 1 obtenemos directamente

$$\left\| \int_0^t h_{(t-s)} * \Delta \vec{g}(s,\cdot) ds \right\|_{L_t^2(L_x^2)} \leq \|\vec{g}\|_{L_t^2(L_x^2)} = \|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}} \mathbb{P}\big(\vec{f}(s,\cdot)\big)\|_{L_t^2(L_x^2)}.$$

Utilizando la continuidad del proyector de Leray en los espacios de Sobolev tenemos

$$\left\| \int_0^t h_{(t-s)} * \mathbb{P}\big(\vec{f}(s,\cdot)\big) ds \right\|_{L_t^2(\dot{H}_x^1)} \leq 2\|\vec{f}\|_{L_t^2(\dot{H}_x^{-1})}. \tag{7}$$

Con esta desigualdad anterior y con la estimación (6) podemos construir la norma $\|\cdot\|_T$ para obtener

$$\left\| \int_0^t h_{(t-s)} * \mathbb{P}\big(\vec{f}(s,\cdot)\big) ds \right\|_T \quad \leq \quad (2+\sqrt{2})\|\vec{f}(\cdot,\cdot)\|_{L_t^2(\dot{H}_x^{-1})},$$

lo que termina la demostración de la Proposición 2. ■

Gracias a este resultado general, tenemos que si el término no lineal $(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}$ pertenece al espacio $L_t^2(\dot{H}_x^{-1})$ podríamos eventualmente cerrar el punto fijo del problema integral (3) utilizando la norma $\|\cdot\|_T$.

Problema

Es en este punto particular que se concentra todo el problema: dado que la única información que disponemos es $\vec{u} \in L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^2 \dot{H}_x^1$, a partir de ella no podemos concluir que se tiene $(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} \in L_t^2(\dot{H}_x^{-1})$ pero solo se puede deducir que $(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} \in L_t^2(\dot{H}_x^{-3/2})$ y esto no es suficiente para cerrar el punto fijo.

4. Regularización de Leray

La idea original de Jean Leray consiste en introducir una regularización del término no lineal $(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}$ que nos permita realizar los cálculos.

Para ello consideramos una función positiva $\theta \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ tal que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \theta(x)dx = 1$ y para todo $\varepsilon > 0$ definimos la función $\theta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^3}\theta(x/\varepsilon)$. Por las propiedades del producto de convolución, si $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$ entonces se tiene que $f * \theta_\varepsilon$ es una función mucho más regular y en particular tenemos, para todo $\varepsilon > 0$ fijo, que la función $f * \theta_\varepsilon$ pertenece al espacio $H^s(\mathbb{R}^3)$ para todo $s > 0$. Además se tiene el límite $\|f * \theta_\varepsilon\|_{L^2} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \|f\|_{L^2}$, lo que nos permite volver a la función inicial. Entonces, con esta función auxiliar θ_ε vamos a reemplazar el término no lineal $(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}$ de la parte (ii) de la formulación integral (3) por una versión regularizada:

$$([\vec{u} * \theta_\varepsilon]\cdot\vec{\nabla})\vec{u}, \qquad (\varepsilon > 0)$$

y obtenemos

$$\int_0^t h_{(t-s)} * \mathbb{P}\Big(([\vec{u} * \theta_\varepsilon]\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\Big)(s,x) ds,$$

de esta manera vamos a estudiar la norma $\|\cdot\|_T$ de esta expresión.

Sabemos por la Proposicion 2 que si tenemos un control en norma $L_t^2(\dot{H}_x^{-1})$ es útil para poder cerrar el punto fijo y vimos que el término $(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}$ no pertenece a este espacio. Aquí es donde se podrá apreciar el efecto regularizante de la convolución pues veremos que $([\vec{u} * \theta_\varepsilon]\cdot\vec{\nabla})\vec{u}$ si pertenece a este espacio.

Proposición 3 *Sea $0 < T < T^*$. Si $\vec{u}$ es un campo de vectores de divergencia nula tal que $\vec{u} \in L^\infty\big([0,T], L^2(\mathbb{R}^3)\big) \cap L^2\big([0,T], \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)\big)$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ tenemos la desigualdad*

$$\|([\vec{u} * \theta_\varepsilon]\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\|_{L_t^2(\dot{H}_x^{-1})} \leq C\varepsilon^{-3/2}\sqrt{T}\|\vec{u}\|^2_{L_t^\infty(L_x^2)}. \tag{8}$$

Prueba. Consideramos primero la variable de espacio, como se tiene $div(\vec{u} * \theta_\varepsilon) = div(\vec{u}) * \theta_\varepsilon = 0$, podemos escribir

$$\begin{aligned} \|([\vec{u} * \theta_\varepsilon] \cdot \vec{\nabla})\vec{u}\|_{\dot{H}^{-1}_x} &= \|div([\vec{u} * \theta_\varepsilon] \otimes \vec{u})\|_{\dot{H}^{-1}_x} = \|[\vec{u} * \theta_\varepsilon] \otimes \vec{u}\|_{L^2_x} \leq \|[\vec{u} * \theta_\varepsilon]\|_{L^\infty_x} \|\vec{u}\|_{L^2_x} \\ &\leq \|\vec{u}\|_{L^2_x} \|\theta_\varepsilon\|_{L^2_x} \|\vec{u}\|_{L^2_x} \leq C\varepsilon^{-3/2} \|\vec{u}\|^2_{L^2_x}, \end{aligned}$$

tomando la norma L^2 en la variable temporal obtenemos

$$\|([\vec{u} * \theta_\varepsilon] \cdot \vec{\nabla})\vec{u}\|_{L^2_t(\dot{H}^{-1}_x)} \leq C\varepsilon^{-3/2}\sqrt{T}\|\vec{u}\|^2_{L^\infty_t(L^2_x)},$$

lo que termina la prueba de la proposición. ■

Vamos a ver cómo utilizar este resultado para la obtención de soluciones del problema regularizado.

5. El Teorema de Leray

Las soluciones débiles de Navier-Stokes se obtienen por medio del siguiente teorema.

Teorema 2 *Sea $\vec{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ con $div(\vec{u}_0) = 0$. Entonces:*

1) Para todo $\varepsilon > 0$, el problema regularizado

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} = \Delta\vec{u} - ([\vec{u} * \theta_\varepsilon] \cdot \vec{\nabla})\vec{u} - \vec{\nabla}p, \quad div(\vec{u}) = 0, \quad > 0, \\ \vec{u}(0, x) = \vec{u}_0, \end{cases} \tag{9}$$

admite una única solución, que depende de ε, que será notada por $\vec{u}_\varepsilon$, que pertenece al espacio $L^\infty\big([0, T], L^2(\mathbb{R}^3)\big) \cap L^2\big([0, T], \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)\big)$ para todo $0 < T < +\infty$.

2) Se tiene la identidad de energía

$$\|\vec{u}_\varepsilon(t, \cdot)\|^2_{L^2} + 2\int_0^t \|\vec{u}_\varepsilon(s, \cdot)\|^2_{\dot{H}^1} ds = \|\vec{u}_0\|^2_{L^2}.$$

3) Existe una subsucesión $\varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ y una función $\vec{u}$ que pertenece al espacio $L^\infty\big([0, T], L^2(\mathbb{R}^3)\big) \cap L^2\big([0, T], \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)\big)$ tal que la sucesión $(\vec{u}_{\varepsilon_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge débilmente hacia $\vec{u}$. Además esta función $\vec{u}$ verifica las ecuaciones de Navier-Stokes

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} = \Delta\vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} - \vec{\nabla}p, \quad div(\vec{u}) = 0, \quad > 0, \\ \vec{u}(0, x) = \vec{u}_0. \end{cases}$$

4) La solución $\vec{u}$ que se obtiene al pasar al límite verifica la desigualdad de energía

$$\|\vec{u}(t, \cdot)\|^2_{L^2} + 2\int_0^t \|\vec{u}(s, \cdot)\|^2_{\dot{H}^1} ds \leq \|\vec{u}_0\|^2_{L^2}.$$

Demostración.

1) Problema Aproximado. Nos interesamos en el problema (9) y en su formulación integral:

$$\vec{u}(t, x) = h_t * \vec{u}_0(x) - \int_0^t h_{(t-s)} * \mathbb{P}\Big(([\vec{u} * \theta_\varepsilon] \cdot \vec{\nabla})\vec{u}\Big)(s, x) ds, \tag{10}$$

y vamos a realizar un argumento de punto fijo en el espacio $L^\infty\big([0,T],L^2(\mathbb{R}^3)\big)\cap L^2\big([0,T],\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)\big)$ dotado de la norma

$$\|\cdot\|_T=\|\cdot\|_{L^\infty_t(L^2_x)}+\|\cdot\|_{L^2_t(\dot{H}^1_x)}.$$

Por la Proposición 1 tenemos

$$\|h_t*\vec{u}_0\|_T\leq\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\|\vec{u}_0\|_{L^2}, \tag{11}$$

de manera que únicamente debemos estudiar el término $\left\|\int_0^t h_{(t-s)}*\mathbb{P}\big(([\vec{u}*\theta_\varepsilon]\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\big)(s,\cdot)ds\right\|_T$ y para ello tenemos:

Proposición 4 *Si $\vec{u}$ pertenece al espacio $L^\infty\big([0,T],L^2(\mathbb{R}^3)\big)\cap L^2\big([0,T],\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)\big)$ entonces tenemos la desigualdad*

$$\left\|\int_0^t h_{(t-s)}*\mathbb{P}\big(([\vec{u}*\theta_\varepsilon]\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\big)(s,\cdot)ds\right\|_T\leq C\varepsilon^{-3/2}\sqrt{T}\|\vec{u}\|_T\|\vec{u}\|_T. \tag{12}$$

Prueba.

- Para la cantidad $\left\|\int_0^t h_{(t-s)}*\mathbb{P}\big(([\vec{u}*\theta_\varepsilon]\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\big)(s,\cdot)ds\right\|_{L^\infty_t(L^2_x)}$ procedemos por dualidad. En efecto, por las propiedades del producto de convolución y del proyecto de Leray podemos escribir

$$\left\|\int_0^t h_{(t-s)}*\mathbb{P}\big(([\vec{u}*\theta_\varepsilon]\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\big)ds\right\|_{L^2_x}=\sup_{\|\varphi\|_{L^2}\leq 1}\left|\int_{\mathbb{R}^3}\left(\int_0^t h_{(t-s)}*\mathbb{P}\big(([\vec{u}*\theta_\varepsilon]\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\big)(s,x)ds\right)\varphi(x)dx\right|$$

$$\leq\sup_{\|\varphi\|_{L^2}\leq 1}\int_0^t\|h_{(t-s)}*\varphi\|_{\dot{H}^1_x}\|\mathbb{P}\big(([\vec{u}*\theta_\varepsilon]\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\big)\|_{\dot{H}^{-1}_x}ds\leq C\sup_{\|\varphi\|_{L^2}\leq 1}\int_0^t\|h_{(t-s)}*\varphi\|_{\dot{H}^1_x}\|([\vec{u}*\theta_\varepsilon]\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\|_{\dot{H}^{-1}_x}ds.$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz en la variable temporal obtenemos

$$\left\|\int_0^t h_{(t-s)}*\mathbb{P}\big(([\vec{u}*\theta_\varepsilon]\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\big)(s,\cdot)ds\right\|_{L^2_x}\leq C\|([\vec{u}*\theta_\varepsilon]\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\|_{L^2_t(\dot{H}^{-1}_x)}\times\sup_{\|\varphi\|_{L^2}\leq 1}\left(\int_0^t\|h_{(t-s)}*\varphi\|^2_{\dot{H}^1_x}\right)^{1/2},$$

y con la desigualdad (5) se tiene

$$\left\|\int_0^t h_{(t-s)}*\mathbb{P}\big(([\vec{u}*\theta_\varepsilon]\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\big)(s,\cdot)ds\right\|_{L^2_x}\leq C\|([\vec{u}*\theta_\varepsilon]\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\|_{L^2_t(\dot{H}^{-1}_x)},$$

y en este punto podemos aplicar la mayoración (8) para obtener la desigualdad

$$\left\|\int_0^t h_{(t-s)}*\mathbb{P}\big(([\vec{u}*\theta_\varepsilon]\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\big)(s,\cdot)ds\right\|_{L^\infty_t(L^2_x)}\leq C\varepsilon^{-3/2}\sqrt{T}\|\vec{u}\|^2_{L^\infty_t(L^2_x)}. \tag{13}$$

- Para la cantidad $\left\|\int_0^t h_{(t-s)}*\mathbb{P}\big(([\vec{u}*\theta_\varepsilon]\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\big)(s,\cdot)ds\right\|_{L^2_t(\dot{H}^1_x)}$ utilizamos la regularidad maximal del núcleo del calor:

$$\left\|\int_0^t h_{(t-s)}*\mathbb{P}\big(([\vec{u}*\theta_\varepsilon]\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\big)(s,\cdot)ds\right\|_{L^2_t(\dot{H}^1_x)}=\left\|\int_0^t h_{(t-s)}*\Delta\left(\frac{\mathbb{P}\big(([\vec{u}*\theta_\varepsilon]\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\big)(s,\cdot)}{(-\Delta)^{\frac{1}{2}}}\right)ds\right\|_{L^2_t(L^2_x)}$$

$$\leq\left\|\frac{\mathbb{P}\big(([\vec{u}*\theta_\varepsilon]\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\big)(s,\cdot)}{(-\Delta)^{\frac{1}{2}}}\right\|_{L^2_t(L^2_x)}\leq\left\|\mathbb{P}\big(([\vec{u}*\theta_\varepsilon]\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\big)(s,\cdot)\right\|_{L^2_t(\dot{H}^{-1}_x)}\leq C\varepsilon^{-3/2}\sqrt{T}\|\vec{u}\|^2_{L^\infty_t(L^2_x)}, \tag{14}$$

De esta manera, con las estimaciones (13) y (14) podemos reconstruir la norma $\|\cdot\|_T$ para obtener el control siguiente

$$\left\|\int_0^t h_{(t-s)} * \mathbb{P}\big(([\vec{u} * \theta_\varepsilon]\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\big)(s,\cdot)ds\right\|_T \quad \leq \quad C\varepsilon^{-3/2}\sqrt{T}\|\vec{u}\|_T^2,$$

lo que termina la prueba de la proposición. ■

Ahora, con la desigualdad (12) y con la estimación (11) podemos aplicar el principio de contracción de Picard al problema integral (10) y reescribimos

$$\vec{u}(t,x) = h_t * \vec{u}_0(x) - \int_0^t h_{(t-s)} * \mathbb{P}\big(([\vec{u} * \theta_\varepsilon]\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\big)(s,x)ds,$$

de la siguiente manera $e = e_0 - B(e,e)$, donde $e_0 = h_t * \vec{u}_0$ y $B(e,e) = \displaystyle\int_0^t h_{(t-s)} * \mathbb{P}\big(([e * \theta_\varepsilon]\cdot\vec{\nabla})e\big)ds$. En particular, si se tiene

$$\|e_0\|_T \leq \delta, \qquad \text{y} \qquad \|B(e,e)\|_T \leq C_B\|e\|_T\|e\|_T,$$

entonces la ecuación $e = e_0 - B(e,e)$ una única solución si $0 < \delta < \frac{1}{4C_B} < 1$. Es decir, por las estimaciones (11) y (12) tenemos

$$\delta = C\|\vec{u}_0\|_{L^2} \qquad \text{y} \qquad C_B = C\varepsilon^{-3/2}\sqrt{T},$$

de manera que logramos obtener una solución del problema

$$\begin{cases} \partial_t\vec{u} = \Delta\vec{u} - ([\vec{u} * \theta_\varepsilon]\cdot\vec{\nabla})\vec{u} - \vec{\nabla}p, \quad div(\vec{u}) = 0, \varepsilon > 0, \\ \vec{u}(0,x) = \vec{u}_0, \end{cases}$$

sobre un intervalo de tiempo $[0,T]$ donde $0 < T < +\infty$ es suficientemente pequeño para verificar

$$T \leq \frac{\varepsilon^3}{C\|\vec{u}_0\|_{L^2}^2}.$$

Observación 1 *Las soluciones que acabamos de obtener dependen del parámetro ε y serán notadas $\vec{u}_\varepsilon$. El tiempo T de existencia dependen también de $\varepsilon > 0$.*

2) Desigualdad de energía. Empezamos observando que se tiene la identidad $div(\vec{u}_\varepsilon * \theta_\varepsilon) = div(\vec{u}_\varepsilon) * \theta_\varepsilon = 0$, lo que nos permite (ahora sí) escribir de forma rigurosa la identidad

$$\int_{\mathbb{R}^3} ([\vec{u}_\varepsilon * \theta_\varepsilon]\cdot\vec{\nabla})\vec{u}_\varepsilon\cdot\vec{u}_\varepsilon dx = 0,$$

y como $\vec{u}_\varepsilon \in L_t^\infty(L_x^2)\cap L_t^2(\dot{H}_x^1)$ se tiene

$$\frac{d}{dt}\|\vec{u}_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^2}^2 \quad = \quad 2\int_{\mathbb{R}^3}\partial_t\vec{u}_\varepsilon\cdot\vec{u}_\varepsilon dx = -2\|\vec{u}_\varepsilon\|_{\dot{H}_x^1}^2,$$

de manera que integrando con respecto al tiempo obtenemos

$$\|\vec{u}_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^2}^2 + 2\int_0^t \|\vec{u}_\varepsilon(s,\cdot)\|_{\dot{H}^1}^2 ds = \|\vec{u}_0\|_{L^2}^2.$$

Este control es fundamental puesto que nos proporciona un control uniforme en ε y se tiene entonces que la familia $(\vec{u}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ es *acotada* en el espacio $L_t^\infty(L_x^2)\cap L_t^2(\dot{H}_x^1)$ y esta particularidad será utilizada al pasar al límite $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Sin embargo, en este punto, el hecho más importante que se deduce de este control está relacionado con el tiempo de existencia de las soluciones $\vec{u}_\varepsilon$ del problema aproximado. En efecto, al tener que la norma $\|\vec{u}_\varepsilon\|_T$ es acotada uniformemente con respecto el tiempo $t \in]0,T[$, es posible considerar tiempos de existencia grandes: dicho de otra manera, es posible repetir el argumento de punto fijo para poder considerar soluciones $\vec{u}_\varepsilon$ en un intervalo de tiempo tan grande como se desee.

3) Paso al límite. Sabemos que la familia $(\vec{u}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ es acotada en el espacio $L^\infty_t(L^2_x)\cap L^2_t(\dot{H}^1_x)$ y que además $\vec{u}_\varepsilon$ es solución del problema

$$\partial_t\vec{u}_\varepsilon = \Delta\vec{u}_\varepsilon - \mathbb{P}\big(([\vec{u}_\varepsilon * \theta_\varepsilon]\cdot\vec{\nabla})\vec{u}_\varepsilon\big), \quad div(\vec{u}_\varepsilon)=0.$$

Dado que $\Delta\vec{u}_\varepsilon \in L^2_t(\dot{H}^{-1}_x)$ y $([\vec{u}_\varepsilon * \theta_\varepsilon]\cdot\vec{\nabla})\vec{u}_\varepsilon \in L^2_t(\dot{H}^{-3/2}_x)$, obtenemos que la derivada tamporal de $\vec{u}_\varepsilon$ verifica $\partial_t\vec{u}_\varepsilon \in L^2_t(H^{-3/2}_x)$. De esta manera tenemos las informaciones siguientes

- $\underset{\varepsilon>0}{sup}\,\|\varphi\vec{u}_\varepsilon\|_{L^2([0,T],H^1(\mathbb{R}^3))} < +\infty$,

- $\underset{\varepsilon>0}{sup}\,\|\varphi\partial_t\vec{u}_\varepsilon\|_{L^2([0,T],H^{-3/2}(\mathbb{R}^3))} < +\infty$,

en donde $\varphi \in \mathcal{D}(I\times\mathbb{R}^3)$.

Estas condiciones son exactamente las hipótesis del Lema de Rellich-Lions (dado en el Teorema 1), de esta manera, si aplicamos este resultado obtenemos una subsucesión $(\vec{u}_{\varepsilon_n})_{n\in\mathbb{N}}$, con $\varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, y una función $\vec{u}$ tal que:

* en cada subintervalo de $[0,T]$ se tiene la convergencia fuerte de $(\vec{u}_{\varepsilon_n})_{n\in\mathbb{N}}$ hacia $\vec{u}$ en $L^2_{loc}([0,T]\times\mathbb{R}^3)$,

* en cada subintervalo de $[0,T]$ se tiene la convergencia débil estrella $(\vec{u}_{\varepsilon_n})_{n\in\mathbb{N}}$ hacia $\vec{u}$ en $L^\infty([0,T],L^2(\mathbb{R}^3))$ y en $L^2([0,T],\dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$.

Pero estas informaciones no son suficientes para obtener la convergencia del término no lineal $([\vec{u}_{\varepsilon_n} * \theta_{\varepsilon_n}]\cdot\vec{\nabla})\vec{u}_{\varepsilon_n}$ hacia $(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}$ y necesitaremos las observaciones siguientes.

Como la familia $\vec{u}_{\varepsilon_n}$ es acotada en el espacio $L^\infty([0,T],L^2(\mathbb{R}^3))$, se tiene que $\vec{u}_{\varepsilon_n} * \theta_{\varepsilon_n}$ converge fuertemente hacia $\vec{u}$ en $L^2_{loc}([0,T]\times\mathbb{R}^3)$ pero también en $L^p([0,T],L^2(\mathbb{R}^3)_{loc})$ para todo $1<p<+\infty$. Además como $\vec{u}_{\varepsilon_n}$ también es acotada en $L^2([0,T],\dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$, se tiene que $\vec{\nabla}\otimes\vec{u}_{\varepsilon_n}$ converge débilmente estrella hacia $\vec{\nabla}\otimes\vec{u}$ en $L^2_{loc}([0,T]\times\mathbb{R}^3)$. Podemos entonces escribir

$$\|([\vec{u}_{\varepsilon_n} * \theta_{\varepsilon_n}]\cdot\vec{\nabla})\vec{u}_{\varepsilon_n}\|_{L^q_t(H^{-3/2}_{loc})} \leq \|\vec{u}_{\varepsilon_n} * \theta_{\varepsilon_n}\|_{L^p_t(L^2_{loc})}\|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}_{\varepsilon_n}\|_{L^2_t(L^2_{loc})},$$

con $\frac{1}{q}=\frac{1}{p}+\frac{1}{2}$ y $1<q<2$.

Tenemos entonces la convergencia débil estrella de $([\vec{u}_{\varepsilon_n} * \theta_{\varepsilon_n}]\cdot\vec{\nabla})\vec{u}_{\varepsilon_n}$ hacia $(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}$ en $L^q_t(H^{-3/2}_{loc})$, pero sabemos también que $([\vec{u}_{\varepsilon_n} * \theta_{\varepsilon_n}]\cdot\vec{\nabla})\vec{u}_{\varepsilon_n}$ es acotada en $L^2_t(H^{-3/2}_{loc})$, de manera que también se obtiene la convergencia débil hacia $(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}$ en este espacio. Para terminar, sabemos que el proyector de Leray $\mathbb{P}$ es continuo en todos estos espacios de manera que se tiene la convergencia débil estrella de la cantidad $\mathbb{P}\big(([\vec{u}_{\varepsilon_n} * \theta_{\varepsilon_n}]\cdot\vec{\nabla})\vec{u}_{\varepsilon_n}\big)$ hacia $\mathbb{P}\big((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\big)$ en el espacio $L^2_t(H^{-3/2}_{loc})$.

De esta manera, hemos obtenido una sucesión $(\vec{u}_{\varepsilon_n})_{n\in\mathbb{N}}$ que es solución del problema aproximado

$$\partial_t\vec{u}_{\varepsilon_n} = \Delta\vec{u}_{\varepsilon_n} - \mathbb{P}\big(([\vec{u}_{\varepsilon_n} * \theta_{\varepsilon_n}]\cdot\vec{\nabla})\vec{u}_{\varepsilon_n}\big), \quad div(\vec{u}_{\varepsilon_n})=0.$$

que converge débilmente hacia $\vec{u}$ solución de las ecuaciones de Navier-Stokes

$$\partial_t\vec{u} = \Delta\vec{u} - \mathbb{P}\big((\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\big), \quad div(\vec{u})=0.$$

4) Desigualdades de energía para las soluciones débiles. La identidad de energía obtenida anteriormente se deducía de las propiedades de la solución $\vec{u}_\varepsilon$ del problema aproximado y vamos a ver que al pasar al límite vamos a pasar de una igualdad a una desigualdad.

Empezamos regularizando en la variable temporal y consideramos una función $\omega \in \mathcal{C}_0^\infty([-\eta,\eta])$ tal que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \omega(t)dt = 1$ y entonces sobre $[\eta, T-\eta]$ tenemos la desigualdad

$$\|\omega * \vec{u}_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^2}^2 \leq \omega * \|\vec{u}_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^2}^2.$$

Retomando los cálculos anteriores tenemos

$$\omega * \|\vec{u}_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^2}^2 + 2\omega * \left(\int_0^t \|\vec{u}_\varepsilon(s,\cdot)\|_{\dot{H}^1}^2 ds\right) = \|\vec{u}_0\|_{L^2}^2,$$

se tiene además la convergencia débil estrella de $\omega * \vec{u}_\varepsilon$ hacia $\omega * \vec{u}$ en $L_t^2(\dot{H}_x^1)$ y la convergencia fuerte de $\omega * \vec{u}_\varepsilon$ hacia $\omega * \vec{u}$ en $L^2([0,T]\times\mathbb{R}^3)_{loc}$. Entonces, con el control sobre la norma L_x^2, a un tiempo t fijo, tenemos la convergencia débil estrella de $\omega * \vec{u}_\varepsilon(t\cdot)$ hacia $\omega * \vec{u}(t,\cdot)$ en $L^2(\mathbb{R}^3)$ y podemos escribir

$$\|\omega * \vec{u}(t,\cdot)\|_{L^2}^2 + 2\omega * \left(\int_0^t \|\vec{u}(s,\cdot)\|_{\dot{H}^1}^2 ds\right) \leq \liminf_{n\to+\infty} \|\omega * \vec{u}_{\varepsilon_n}(t,\cdot)\|_{L^2}^2,$$

lo que nos da la desigualdad

$$\|\omega * \vec{u}(t,\cdot)\|_{L^2}^2 + 2\omega * \left(\int_0^t \|\vec{u}(s,\cdot)\|_{\dot{H}^1}^2 ds\right) \leq \|\vec{u}_0\|_{L^2}^2.$$

Hemos obtenido la desigualdad buscada pero con una regularización temporal adicional, de esta manera si t_0 es un punto de Lebesgue de la aplicación $t \longmapsto \|\vec{u}(t,\cdot)\|_{L^2}$, tenemos

$$\|\vec{u}(t_0,\cdot)\|_{L^2}^2 + 2\int_0^{t_0} \|\vec{u}(s,\cdot)\|_{\dot{H}^1}^2 ds \leq \|\vec{u}_0\|_{L^2}^2.$$

Pero dado que la aplicación $t \longmapsto \|\vec{u}(t,\cdot)\|_{L^2}$ es débilmente continua, es posible prolongar esta desigualdad a todo punto $t \in]0,T[$ y con esto hemos demostrado las desigualdades de energía para las soluciones débiles de las ecuaciones de Navier-Stokes.

Y esto concluye la demonstración del Teorema 2. $\blacksquare$