Lección n°4: Ecuación del Calor

UPS, julio 2015

Índice

Introdución

La ecuación del Calor, es una de las ecuaciones en derivadas parciales más importantes y esta importancia se debe comprender desde varios aspectos distintos. En efecto, no solo se trata de resolver una ecuación (que ya es un problema difícil en sí) sino que las técnicas desarrolladas para estudiar esta ecuación han sido un aporte fundamental en las matemáticas actuales.

El impacto de esta ecuación puede verse en el desarrollo de las series de Fourier, de la transformada de Fourier, en geometría Riemanniana, en Probabilidades, en análisis armónico, etc.

Presentación del problema

Sea $u :]0, +\infty[\times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de dos variables: $u = u(t, x)$ en donde t representa el tiempo y x es un vector del espacio $\mathbb{R}^n$.

La ecuación del calor consiste en estudiar la propagación del calor en, digamos, una placa homogénea. La ecuación que se obtiene es la siguiente

$$\partial_t u(t, x) - \Delta u(t, x) = \partial_t u(t, x) - \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}^2 u(t, x) = 0. \tag{1}$$

En esta lección vamos a ver cómo estudiar esta ecuación y utilizaremos posteriormente las técnicas desarrolladas aquí.

1. Problema Homogéneo y Solución fundamental

Antes de lanzarnos en cálculos, es necesario estudiar un poco la estructura de esta ecuación, para ello empezaremos trabajando sobre el espacio $\mathbb{R}^n$.

- Invariancia por traslación: si $u(t, x)$ es una solución de la ecuación del calor (1), entonces, para todo $\tau \in \mathbb{R}^n$ se tiene que $u(t, x + \tau)$ también es solución de la ecuación del calor.
- Invariancia por rotación: si $u(t, x)$ es una solución de la ecuación (1), entonces para todo ángulo $\theta \in [0, 2\pi]$ se tiene que $u(t, R_\theta[x])$ también es solución de la ecuación del calor, donde R_θ es la matriz de rotación en el espacio $\mathbb{R}^n$ de ángulo θ.

- Invariancia por dilatación: si $u(t,x)$ es una solución de la ecuación (1), para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ se tiene que $u_\lambda(t,x) = u(\lambda t, \lambda^{1/2}x)$ también es solución.

Estas propiedades de esta ecuación nos conducen a buscar soluciones que poseen ciertas características particulares. En efecto, la invariancia por traslación nos permite suponer que las soluciones pueden ser *radiales* en la variable de espacio, es decir que podemos escribir $u(t,x) = \phi(t,|x|)$, donde $\phi :]0,+\infty[\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función de dos variables. Además, utilizando la propiedad de dilatación, y fijando $\lambda = t^{-1}$ para $t > 0$, tenemos que si $u(t,x)$ es solución de la ecuación del calor, entonces la función $\phi(1,|x|/t^{1/2})$ también es solución, lo cual nos incita a buscar una solución que sea de la forma $\psi(|x|/t^{1/2})$ donde $\psi :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ es una función de una sola variable.

Estos razonamientos nos permiten estudiar una ecuación en derivadas parciales como una ecuación diferencial ordinaria.

Para buscar una solución a la ecuación del calor, vamos a estudiar las funciones con la estructura siguiente

$$u(t,x) = \frac{1}{t^\alpha}\varphi\left(\frac{x}{t^\beta}\right), \quad (x \in \mathbb{R}^n, t > 0), \tag{2}$$

de tal manera, que lo que deseamos encontrar es la función $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ y las constantes α y β.

$\Longrightarrow$ Si calculamos $\partial_t u(t,x)$ en la fórmula (2) tenemos

$$\partial_t u(t,x) = \partial_t\left[\frac{1}{t^\alpha}\varphi\left(\frac{x}{t^\beta}\right)\right] = -\alpha t^{-(\alpha+1)}\varphi\left(\frac{x}{t^\beta}\right) - \beta t^{-(\alpha+1)}\nabla\varphi\left(\frac{x}{t^\beta}\right)\cdot x t^{-\beta}$$

$\Longrightarrow$ Si calculamos $\Delta u(t,x)$ tenemos en cambio

$$\Delta u(t,x) = \Delta\left[\frac{1}{t^\alpha}\varphi\left(\frac{x}{t^\beta}\right)\right] = t^{-(\alpha+2\beta)}\Delta\varphi\left(\frac{x}{t^\beta}\right)$$

$\Longrightarrow$ Si en los dos cálculos anteriores notamos $y = t^{-\beta}x$ obtenemos que la ecuación del calor se puede reescribir como

$$\alpha t^{-(\alpha+1)}\varphi(y) + \beta t^{-(\alpha+1)}\nabla\varphi(y)\cdot y + t^{-(\alpha+2\beta)}\Delta\varphi(y) = 0.$$

$\Longrightarrow$ Si fijamos ahora $\beta = 1/2$ es posible simplificar un poco la expresión anterior para obtener

$$\alpha\varphi(y) + \frac{1}{2}\nabla\varphi(y)\cdot y + \Delta\varphi(y) = 0.$$

$\Longrightarrow$ Usando ahora la invariancia por rotación, podemos suponer que la función φ es radial y por lo tanto se escribe $\varphi(x) = \phi(|x|)$ y de esta manera obtenemos la ecuación siguiente en la variable r:

$$\alpha\phi + \frac{1}{2}r\phi' + \phi'' + \frac{n-1}{r}\phi' = 0.$$

$\Longrightarrow$ Si suponemos que $\alpha = n/2$ entonces obtenemos

$$(r^{n-1}\phi')' + \frac{1}{2}(r^n\phi)' = 0 \iff (r^{n-1}\phi') + \frac{1}{2}r^n\phi = C,$$

donde C es una constante que por el momento podemos fijar igual a 0, lo que nos permite escribir

$$\phi' = -\frac{1}{2}r\phi,$$

de donde se deduce, finalmente, que $\phi = Ae^{-\frac{r^2}{4}}$.

$\Longrightarrow$ Volviendo al inicio de nuestros cálculos y recordando los valores de α y β obtenemos para terminar que la función
$$\frac{C}{t^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$
es una solución de la ecuación del calor.

Estos cálculos nos conducen a la siguiente definición:

Definición 1 (Solución fundamental de la Ecuación del Calor) *La función*
$$\Phi(t,x) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & si\ x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ 0 & si\ x \in \mathbb{R}^n, t < 0, \end{cases}$$
es la solución fundamental de la ecuación del calor.

Por todos los cálculos anteriores tenemos que $\partial_t\Phi(t,x) - \Delta\Phi(t,x) = 0$ si $x \neq 0$ para todo $t > 0$.

Observación 1

- *La solución fundamental es una función positiva radial.*
- *Esta función es singular en el punto* $(0,0)$*.*
- *Si* $t > 0$*, esta función es de clase* $\mathcal{C}^\infty$*.*
- *La solución fundamental de la ecuación del calor es una función* gaussiana.

1.1. Propiedades de la solución fundamental de la ecuación del calor

Antes de continuar nuestro estudio de la ecuación del calor, es importante presentar algunas propiedades de su solución fundamental. En efecto, esta función, también llamada el *núcleo del calor*, posee muchísimas aplicaciones.

Lema 1 *Para todo* $t > 0$ *se tiene*
$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t,x)dx = 1.$$

Prueba. Simplemente basta escribir
$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t,x)dx = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}dx = \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2}dx = \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}}\prod_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_i^2}dx_i = 1.$$

■

Corolario 1 *Si* $t > 0$*, entonces para todo* $1 \leq p \leq +\infty$ *se tiene que* $\Phi(t,\cdot) \in L^p(\mathbb{R}^n)$*.*

Proposición 1 *Se tienen las siguientes estimaciones para la solución fundamental de la ecuación del calor* Φ*:*

(i) para todo $t>0$*:*

$$|\Phi(t,x)| \leq \begin{cases} c|x|^{-n} & si\ |x|^2 \geq t \\ ct^{-n/2} & si\ |x|^2 \leq t \end{cases}$$

(ii) Si $\alpha \in \mathbb{N}^n$ *es un multi-índice, y si* $k \in \mathbb{N}$ *entonces*

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial t^k} D^\alpha \Phi(t,x)\right| \leq \begin{cases} c|x|^{-[n+|\alpha|+2k]} & si\ |x|^2 \geq t \\ \\ ct^{-[n+|\alpha|+2k]/2} & si\ |x|^2 \leq t \end{cases}$$

(iii) para todo $t>0$ *y para todo* $1 \leq p \leq +\infty$ *se tiene*

$$\left\|\frac{\partial^k}{\partial t^k} D^\alpha \Phi(t,\cdot)\right\|_{L^p} \leq ct^{-\frac{|\alpha|+2k+n(1-1/p)}{2}}$$

(iv) para todo $t>0$ *y para todo* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *con* $1 \leq p \leq +\infty$ *se tiene*

$$\left\|\frac{\partial^k}{\partial t^k} D^\alpha \Phi(t,\cdot) * f\right\|_{L^p} \leq ct^{-\frac{|\alpha|+2k}{2}} \|f\|_{L^p}$$

Notación: a veces escribiremos $\Phi_t(x)$ en vez de $\Phi(t,x)$.

1.2. Problema de valor inicial

Nos interesamos ahora en estudiar el siguiente problema cuando el dato inicial está dado por una función $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \Delta u(t,x) = 0 & \text{sobre }]0,+\infty[\times\mathbb{R}^n, \\ \\ u(0,x) = g(x) & \text{sobre } \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{3}$$

Las propiedades de la solución fundamental de la ecuación del calor nos permiten construir por convolución funciones que resuelven este problema de valor inicial.

Teorema 1 *Sea* $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$*, si para todo* $t>0$ *definimos la función* $u(t,x)$ *por medio de la expresión*

$$u(t,x) = \Phi_t * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t,x-y)g(y)dy,$$

entonces tenemos:

- *la función* u *pertenece al espacio* $\mathcal{C}^\infty(]0,+\infty[\times\mathbb{R}^n)$*,*
- *la función* u *es solución del problema de valor inicial (3), con* $t>0$ *y* $x \in \mathbb{R}^n$*,*
- *para todo punto* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *se tiene*

$$\lim_{\substack{(t,x)\to(0,x_0) \\ t>0, x\in\mathbb{R}^n}} u(t,x) = g(x_0).$$

Demostración. Empezamos con el primer punto. Lo primero que debemos hacer es asegurarnos que la función $u(t,x)$ está *bien definida* y para ello escribimos

$$|u(t,x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\Phi(t,x-y)||g(y)|dy \leq \|g\|_{L^\infty}.$$

Dado que la función Φ pertenece al espacio $\mathcal{C}^\infty(]0,+\infty[\times\mathbb{R}^n)$, por las propiedades del producto de convolución obtenemos el resultado deseado.

Para el segundo punto escribimos

$$\partial_t u(t,x) - \Delta u(t,x) = (\partial_t \Phi_t) * g(x) - (\Delta \Phi_t) * g(x) = (\partial_t \Phi_t - \Delta \Phi_t) * g(x) = 0.$$

Para el último punto procedemos de la siguiente manera: fijemos $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $\varepsilon > 0$ sea $\delta > 0$ tal que

$$|g(y) - g(x_0)| < \varepsilon \quad \text{si} \quad |y - x_0| < \delta,$$

lo que se tiene pues hemos supuesto que la función g es continua. Tenemos entonces, si $|x - x_0| < \delta/2$:

$$\begin{aligned}
|u(t,x) - g(x_0)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t, x-y)\big[g(y) - g(x_0)\big] dy \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\Phi(t,x-y)||g(y) - g(x_0)| dy \\
&\leq \int_{B(x_0,\delta)} |\Phi(t,x-y)||g(y) - g(x_0)| dy + \int_{B(x_0,\delta)^c} |\Phi(t,x-y)||g(y) - g(x_0)| dy \\
&\leq \varepsilon + \int_{B(x_0,\delta)^c} |\Phi(t,x-y)||g(y) - g(x_0)| dy,
\end{aligned}$$

de manera que solo debemos estudiar esta última integral. Para ello notamos que si $|x - x_0| \leq \delta/2$, entonces

$$\begin{aligned}
\int_{B(x_0,\delta)^c} |\Phi(t,x-y)||g(y) - g(x_0)| dy &\leq 2\|g\|_{L^\infty} \int_{B(x_0,\delta)^c} |\Phi(t,x-y)| dy \\
&\leq \frac{C}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{B(x_0,\delta)^c} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy \leq \frac{C}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\{|y|>\delta\}} e^{-\frac{|y-(x-x_0)|^2}{4t}} dy.
\end{aligned}$$

Como se tiene $|y| \leq |y - (x - x_0)| + |x - x_0| \leq |y - (x - x_0)| + \delta/2$ y como estamos integrando sobre el conjunto $\{|y| > \delta\}$ tenemos la mayoración $\frac{1}{2}|y| \leq |y - (x - x_0)|$ y de esta manera podemos escribir

$$\begin{aligned}
\int_{B(x_0,\delta)^c} |\Phi(t,x-y)||g(y) - g(x_0)| dy &\leq \frac{C}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\{|y|>\delta\}} e^{-\frac{|y-(x-x_0)|^2}{4t}} dy \leq \frac{C}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\{|y|>\delta\}} e^{-\frac{|y|^2}{16t}} dy \\
&\leq \frac{C}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\delta}^{+\infty} e^{-\frac{\rho^2}{16t}} \rho^{n-1} d\rho \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0,
\end{aligned}$$

estos cálculos demuestran que si $|x - x_0| \leq \delta/2$ y si $t > 0$ es suficientemente pequeño se tiene $|u(t,x) - g(x_0)| < 2\varepsilon$ y con estos cálculos hemos mostrado el tercer punto. ■

Observación 2

- *Este teorema nos indica que si partimos de un dato inicial g que es apenas continuo, la solución de la ecuación del calor asociada $u(t,x)$ es* inmediatamente *regular. Este hecho muestra el poder regularizante del operador Laplaciano.*
- *Dado que la solución fundamental es una función positiva, si el dato inicial g es una función acotada y positiva, entonces la solución que se construye por convolución también es positiva para todo tiempo $t > 0$. Dicho de otra manera, si la temperatura inicial es positiva en algún lado, entonces la temperatura en un tiempo futuro es positiva en todo el espacio.*

2. Problema no-homogéneo

Consideramos ahora el siguiente problema, donde $f : [0,+\infty[\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función dada:

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \Delta u(t,x) = f(t,x) & \text{sobre }]0,+\infty[\times\mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = 0 & \text{sobre } \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{4}$$

Por simplicidad, hemos fijado $g \equiv 0$, veremos posteriormente cómo considerar un caso más general.

Teorema 2 *Sea $f : [0,+\infty[\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función a soporte compacto y tal que $f \in \mathcal{C}^1([0,+\infty[;\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n))$. Si definimos una función $u(t,x)$ por medio de la expresión*

$$u(t,x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t-s, x-y) f(s,y)dyds,$$

para $x \in \mathbb{R}^n$ y $t > 0$, entonces se tiene que

- *$u \in \mathcal{C}^1(]0,+\infty[;\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n))$,*
- *la función u es solución del problema no homogéneo (4) para $x \in \mathbb{R}^n$ y $t > 0$,*
- *además, para todo punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ se tiene el límite:*

$$\lim_{\substack{(t,x)\to(0,x_0) \\ t>0, x\in\mathbb{R}^n}} u(t,x) = 0.$$

Demostración.

- Para empezar verifiquemos que, con estas hipótesis, se tiene que $u(\cdot,\cdot)$ es una función bien definida. En efecto, se tiene

$$\begin{aligned} |u(t,x)| &= \left|\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(s,y) f(t-s, x-y)dyds\right| = \left|\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} Ce^{-|u|^2} f(t-s, x-s^{1/2}u)duds\right| \\ &\leq \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} Ce^{-|u|^2} |f(t-s, x-s^{1/2}u)|duds \leq C\|f(\cdot,\cdot)\|_{L^1([0,+\infty[;L^\infty(\mathbb{R}^n))}. \end{aligned}$$

Esta estimación muestra que la función $u(t,x)$ es acotada en las variables de tiempo y espacio.

$\Longrightarrow$ Mostremos ahora que $u(t,\cdot) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$ y para ello escribimos para todo $i,j = 1,...,n$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(t,x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(s,y) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(t-s, x-y)dyds,$$

de manera que, por los mismos cálculos anteriores se tiene que $u(t,\cdot) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$.

$\Longrightarrow$ Verifiquemos ahora que se tiene regularidad en la variable de tiempo. Para ello escribimos

$$\partial_t u(t,x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(s,y) \partial_t f(t-s, x-y)dyds + \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t,y) f(0, x-y)dyds,$$

y de esta manera vemos que $u \in \mathcal{C}^1(]0,+\infty[;\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n))$.

- Para ver que u es solución de la ecuación de Cauchy no-homogénea escribimos:

$$\partial_t u(t,x) - \Delta u(t,x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(s,y) \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) f(t-s, x-y)dyds + \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t,y) f(0, x-y)dyds,$$

para poder estudiar estas integrales, es necesario aislar la singularidad que se tiene en el punto $(0,0)$ y para ello escribimos:

$$\begin{aligned} \partial_t u(t,x) - \Delta u(t,x) &= \underbrace{\int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(s,y) \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) f(t-s, x-y)dyds}_{I_1} \\ &\quad + \underbrace{\int_\varepsilon^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(s,y) \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) f(t-s, x-y)dyds}_{I_2} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t,y) f(0, x-y)dyds}_{I_3}. \end{aligned}$$

Observamos ahora que

$$|I_1| \leq \left(\|\partial_t f\|_{L^\infty(]0,+\infty[;L^\infty(\mathbb{R}^n))} + \|\Delta f\|_{L^\infty(]0,+\infty[;L^\infty(\mathbb{R}^n))} \right) \int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(s,y)dyds \leq C\varepsilon.$$

Para el término I_2 tenemos en cambio, por una integración por partes:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_\varepsilon^t \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\partial}{\partial s} - \Delta_y \right) \Phi(s,y) f(t-s, x-y) dyds \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\varepsilon, y) f(t-\varepsilon, x-y)dy - \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t,y) f(0, x-y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\varepsilon, y) f(t-\varepsilon, x-y)dy - \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t,y) f(0, x-y)dy, \end{aligned}$$

y de esta manera podemos escribir $\partial_t u(t,x) - \Delta u(t,x) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\varepsilon, y) f(t-\varepsilon, x-y)dy = f(t,x)$.

- El límite se calcula de la misma manera que en el teorema anterior. ■

Finalmente, combinando los dos teoremas anteriores obtenemos:

Teorema 3 *Sea $f : [0, +\infty[\times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función a soporte compacto y tal que $f \in \mathcal{C}^1([0, +\infty[; \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n))$. Sea $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Si consideramos el problema*

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \Delta u(t,x) = f(t,x) & \textit{sobre }]0, +\infty[\times \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = g(x) & \textit{sobre } \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Entonces la función $u(t,x)$ definida por medio de la expresión

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t, x-y) g(y)dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t-s, x-y) f(s,y)dyds,$$

para $x \in \mathbb{R}^n$ y $t > 0$ es solución del problema anterior.

3. Fórmulas de promedio

De la misma manera que en la ecuación de Laplace habíamos obtenido unas ciertas fórmulas de promedio, en la ecuación del calor obtendremos resultados similares y cuyas aplicaciones juegan esencialmente el mismo rol como tendremos la oportunidad de verlo pronto.

Definición 2

- *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, para todo $T > 0$ notaremos*

$$\Omega_T =]0, T] \times \Omega,$$

  y notaremos $\Gamma_T = \bar{\Omega}_T \setminus \Omega_T$.

- *Para $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ y $r > 0$ definimos el conjunto*

$$E(x,t,r) = \left\{ (s,y) \in \mathbb{R}^{n+1} : s \leq t; \quad \Phi(t-s, x-y) \geq \frac{1}{r^n} \right\}.$$

Estas definiciones serán de utilidad en los cálculos siguientes. Mostremos ahora el resultado a continuación.

Teorema 4 *Sea $u \in \mathcal{C}^1_t\mathcal{C}^2_x(\Omega_T)$ una solución de la ecuación del calor. Entonces se tiene la identidad:*

$$u(t,x) = \frac{1}{4r^n}\int\int_{E(x,t,r)} u(s,y)\frac{|x-y|^2}{(t-s)^2}dyds.$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $x = 0$ y que $t = 0$ de manera que vamos a considerar $E(r) = E(0,0,r)$. Escribimos entonces

$$\varphi(r) = \frac{1}{r^n}\int\int_{E(r)} u(s,y)\frac{|y|^2}{s^2}dyds = \int\int_{E(1)} u(r^2s, ry)\frac{|y|^2}{s^2}dyds.$$

Derivando esta cantidad con respecto a r tenemos

$$\begin{aligned}
\varphi'(r) &= \int\int_{E(1)} \sum_{i=1}^n y_i\partial_{y_i}u(r^2s,ry)\frac{|y|^2}{s^2} + 2r\partial_s u(r^2s,ry)\frac{|y|^2}{s^2}dyds \\
&= \frac{1}{r^{n+1}}\int\int_{E(r)} \underbrace{\sum_{i=1}^n y_i\partial_{y_i}u(s,y)\frac{|y|^2}{s^2}}_{I_1} + \underbrace{2\partial_s u(s,y)\frac{|y|^2}{s^2}}_{I_2}\,dyds.
\end{aligned}$$

Utilizamos ahora la función siguiente:

$$\psi = -\frac{n}{2}\log(-4\pi s) + \frac{|y|^2}{4s} + n\log(r),$$

en particular, se tiene que $\psi = 0$ sobre $\partial E(r)$ puesto que $\Phi(-s,y) = r^{-n}$ sobre $\partial E(r)$. A partir de esta función podemos reescribir

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r^{n+1}}\int\int_{E(r)} I_2 dyds &= \frac{1}{r^{n+1}}\int\int_{E(r)} 4\partial_s u(s,y)\sum_{i=1}^n y_i\partial_{y_i}\psi dyds \\
&= -\frac{1}{r^{n+1}}\int\int_{E(r)} 4n\partial_s u(s,y)\psi + 4\sum_{i=1}^n y_i\partial_{y_i}\partial_s u(s,y)\psi dyds,
\end{aligned}$$

de manera que, integrando por partes, se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r^{n+1}}\int\int_{E(r)} I_2 dyds &= \frac{1}{r^{n+1}}\int\int_{E(r)} -4n\partial_s u(s,y)\psi + 4\sum_{i=1}^n y_i\partial_{y_i}u(s,y)\left(-\frac{n}{2s} - \frac{|y|^2}{4s^2}\right)dyds \\
&= \frac{1}{r^{n+1}}\int\int_{E(r)} -4n\partial_s u(s,y)\psi - \frac{2n}{s}\sum_{i=1}^n y_i\partial_{y_i}u(s,y)dyds - \frac{1}{r^{n+1}}\int\int_{E(r)} I_1 dyds,
\end{aligned}$$

Dado que u es solución de la ecuación del calor, podemos escribir:

$$\begin{aligned}
\varphi'(r) &= \frac{1}{r^{n+1}}\int\int_{E(r)} -4n\Delta u\psi - \frac{2n}{s}\sum_{i=1}^n y_i\partial_{y_i}u\; dyds = \sum_{i=1}^n \frac{1}{r^{n+1}}\int\int_{E(r)} 4n\partial_{y_i}u\partial_{y_i}\psi - \frac{2n}{s}y_i\partial_{y_i}u\; dyds \\
&= 0.
\end{aligned}$$

De manera que la función φ es constante y por lo tanto

$$\varphi(r) = \lim_{t\to 0}\varphi(t) = u(0,0)\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^n}\int\int_{E(t)} \frac{|y|^2}{s^2}dyds = 4u(0,0).$$

■

Esta fórmula de promedio nos permite obtener una serie de resultados importantes.

Teorema 5 (Principio del máximo sobre conjunto acotados) *Sea $u \in \mathcal{C}_t^1\mathcal{C}_x^2(\Omega_T) \cap \mathcal{C}_t\mathcal{C}_x(\bar{\Omega}_T)$ una solución de la ecuación del calor en Ω_T. Entonces tenemos*

- $\max\limits_{\bar{\Omega}_T} u = \max\limits_{\Gamma_T} u,$
- *Si el conjunto Ω es conexo y si existe un punto $(t_0, x_0) \in \Omega_T$ tal que*

$$u(t_0, x_0) = \max_{\bar{\Omega}_T} u,$$

entonces la función u es constante sobre $\bar{\Omega}_{t_0}$.

Demostración. Notemos $M = \max\limits_{\bar{\Omega}_T} u$ y sea $(t_{0,x_0}) \in \Omega_T$ un punto tal que $u(t_0, x_0) = M$. Vemos en particular que para todo $r > 0$ suficientemente pequeño se tiene $E(t_0, x_0, r) \subset \Omega_T$ de manera que podemos usar la fórmula de promedio para escribir

$$M = u(t_0, x_0) = \frac{1}{4r^n} \int\int_{E(t_0,x_0,r)} u(s, y) \frac{|x_0 - y|^2}{(t_0 - s)^2} dyds \leq M,$$

puesto que se tiene la identidad

$$\frac{1}{4r^n} \int\int_{E(t_0,x_0,r)} \frac{|x_0 - y|^2}{(t_0 - s)^2} dyds = 1,$$

Dado que la igualdad se tiene únicamente si u es constante e igual a M en el interior del dominio $E(t_0, x_0, r)$, tenemos que $u(s, y) = M$ para todo $(s, y) \in E(t_0, x_0, r)$.

Deseamos ahora ampliar este resultado a todo el conjunto Ω_T y para ellos vamos a proceder de la siguiente manera: si S es un segmento dentro de Ω_T que conecta el punto (t_0, x_0) con el punto (s_0, y_0) con $s_0 < t_0$, podemos considerar el conjunto

$$r_0 = \{s \geq s_0 : u(t, x) = M \text{ para todo } (t, x) \in S, s \leq t \leq t_0\}.$$

Como la función u es continua, el mínimo es alcanzado y podemos suponer que $r_0 > s_0$. Entonces $u(r_0, z_0) = M$ para algún punto (r_0, z_0) de $S \cap \Omega_T$ y por lo tanto se tiene $u = M$ sobre $E(r_0, z_0, r)$ para un $r > 0$ suficientemente pequeño. Pero como se tiene que $E(r_0, z_0, r)$ contiene el conjunto $S \cap \{r_0 - \sigma \leq t \leq r_0\}$ para algún $\sigma > 0$ pequeño, obtenemos una contradicción y se deduce que $r_0 = s_0$ de manera que $u = M$ sobre todo el segmento S.

Dado que el conjunto Ω es conexo, es posible alcanzar cada uno de sus puntos por medio de segmentos y procediendo como en las líneas anteriores es posible repetir el razonamiento anterior para mostrar que se tiene $u = M$ sobre todo el conjunto Ω_T. ■

De la misma manera que en el caso de la ecuación de Laplace, este principio del máximo nos permite obtener el siguiente resultado de unicidad.

Teorema 6 *Sea $g \in \mathcal{C}(\Gamma_T)$ y sea $f \in \mathcal{C}(\Omega_T)$. Entonces existe una única solución $u \in \mathcal{C}^1(]0, T]; \mathcal{C}^2(\Omega)) \cap \mathcal{C}(\Omega_T)$ del problema de valor inicial y de frontera:*

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) - \Delta u(t, x) = f & \textit{sobre } \Omega_T \\ u = g & \textit{sobre } \Gamma_T \end{cases}$$

Demostración. Una vez que tenemos el principio del máximo, la verificación de este resultado es directa. En efecto, si u y v son dos soluciones del problema anterior, podemos considerar la función $w = \pm(u - v)$, que verifica el mismo problema pero con datos idénticamente nulos. De esta manera su máximo es nulo, lo que fuerza la unicidad de la solución. ■

Nos proponemos ahora estudiar el problema de unicidad de las soluciones cuando $\Omega = \mathbb{R}^n$, pero, al no trabajar en un dominio acotado, será necesario introducir una condición suplementaria y esta condición estará dada por un control adecuado de las soluciones cuando $|x|$ es grande.

Teorema 7 (Principio del máximo) *Sea $u \in \mathcal{C}^1(]0,T], \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)) \cap \mathcal{C}([0,T] \times \mathbb{R}^n)$ una función que es solución del problema*

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \Delta u(t,x) = 0 & \text{sobre } \mathbb{R}^n \\ u(0,x) = g(x) & \text{sobre } \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

donde $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ y que verifica la condición de crecimiento $u(t,x) \leq C_1 e^{C_2|x|^2}$ para todo $0 \leq t \leq T$ y todo $x \in \mathbb{R}^n$, con $C_1, C_2 > 0$ dos constantes.

Entonces se tiene

$$\max_{[0,T]\times\mathbb{R}^n} u = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} g.$$

Demostración. Empezamos suponiendo que se tiene $4C_2T < 1$, veremos posteriormente como relajar esta condición. Una vez que se tiene esta mayoración, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño también se tiene $4C_2(T+\varepsilon) < 1$.

Fijemos ahora $y \in \mathbb{R}^n$ y $C_3 > 0$ y definamos una función $v :]0, +\infty[\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ por medio de la expresión

$$v(t,x) = u(t,x) - \frac{C_3}{(T+\varepsilon-t)^{n/2}} e^{\frac{|x-y|^2}{4(T+\varepsilon-t)}}.$$

Por los cálculos realizados anteriormente vemos que se tiene $\partial_t v - \Delta v = 0$ sobre $]0,T] \times \mathbb{R}^n$.

Sea $r > 0$ y sean los conjuntos $\Omega = B(y,r)$ y $\Omega_T =]0,T] \times B(y,r)$, entonces, aplicando los resultados anteriores tenemos

$$\max_{\bar{\Omega}_T} v = \max_{\Gamma_T} v$$

Ahora, si $x \in \mathbb{R}^n$, tenemos por definición

$$v(0,x) = u(0,x) - \frac{C_3}{(T+\varepsilon)^{n/2}} e^{\frac{|x-y|^2}{4(T+\varepsilon)}} \leq u(0,x) = g(x),$$

además, si $|x-y| = r$, para todo $0 \leq t \leq T$ tenemos

$$\begin{aligned} v(t,x) &= u(t,x) - \frac{C_3}{(T+\varepsilon-t)^{n/2}} e^{\frac{r^2}{4(T+\varepsilon-t)}} \leq C_1 e^{C_2|x|^2} - \frac{C_3}{(T+\varepsilon-t)^{n/2}} e^{\frac{r^2}{4(T+\varepsilon-t)}} \\ &\leq C_1 e^{C_2(|y|+r)^2} - \frac{C_3}{(T+\varepsilon)^{n/2}} e^{\frac{r^2}{4(T+\varepsilon)}}, \end{aligned}$$

pero, como se tiene $\frac{1}{4(T+\varepsilon)} = C_2 + \delta$ con $\delta > 0$, podemos escribir

$$v(t,x) \leq C_1 e^{C_2(|y|+r)^2} - C_3(4(C_2+\delta))^{n/2} e^{(C_2+\delta)r^2} \leq \sup_{\mathbb{R}^n} g,$$

si $r > 0$ es suficientemente grande. De esta manera, hemos demostrado que $v(t,y) \leq \sup\limits_{\mathbb{R}^n} g$ si $y \in \mathbb{R}^n$ y si $0 \leq t \leq T$.

Para recuperar el mismo resultado para la función u es suficiente hacer $C_3 \longrightarrow 0$.

Finalmente, si no se tiene $4C_2T < 1$, podemos proceder por segmentos más pequeños, es decir $[0, T_1]$ y luego $[T_1, 2T_1]$ con T_1 un tiempo que verifica esta estimación. ■

Este principio del máximo sobre todo el espacio nos permite dar un criterio de unicidad.

Teorema 8 *Sean $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ y $f \in \mathcal{C}([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ dos funciones dadas. Entonces existe al menos una solución $u \in \mathcal{C}^1(]0,T];\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)) \cap \mathcal{C}([0,t]\times\mathbb{R}^n)$ del problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \Delta u(t,x) = f & \textit{sobre } \mathbb{R}^n \\ u(0,x) = g(x) & \textit{sobre } \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

y que verifica el control $|u(t,x)| \leq C_1 e^{C_2|x|^2}$ sobre $x \in \mathbb{R}^n$, $0 \leq t \leq T$, con $C_{1,2} > 0$ dos constantes.

Demostración. Una vez que se dispone del principio del máximo, la prueba es totalmente directa. Sean u y v dos soluciones que verifican la hipótesis de crecimiento, entonces basta aplicar el teorema anterior a la función $w = \pm(u - v)$ para ver que w es idénticamente nula y obtener de esta manera la unicidad de las soluciones. ■