



Lección n°4: Soluciones fuertes-débiles

USFQ, septiembre 2016

Unicidad Fuerte-Débil

Con los resultados demostrados en las lecciones anteriores tenemos la situación siguiente:

- Por un lado, si aplicamos un argumento de punto fijo en un marco funcional adaptado, obtenemos soluciones únicas de las ecuaciones de Navier-Stokes, pero su tiempo de existencia es muy pequeño y está relacionado con el tamaño del dato inicial. Para datos iniciales grandes, no sabemos prolongar el tiempo de existencia de este tipo de soluciones.
- Por otro lado, disponemos de las soluciones débiles de Leray, que están definidas globalmente y cuyo tiempo de existencia no depende del tamaño del dato inicial. Pero el precio a pagar por este resultado de existencia global es la unicidad de las soluciones: obtenemos una familia de soluciones.

Lo que queremos estudiar aquí es si existe una diferencia entre las soluciones obtenidas por medio de un punto fijo y las soluciones obtenidas por el procedimiento de Leray. Evidentemente esta pregunta solo tiene sentido en el pequeño intervalo de tiempo en donde ambas soluciones existen.

Vamos a ver que en este pequeño intervalo común de existencia, estos dos tipos de soluciones coinciden, de donde se deduce que la *pérdida* de unicidad interviene al intentar prolongar las soluciones, es decir que aparece *después* del tiempo maximal de existencia de las soluciones *mild*.

Teorema 1 (Unidad Fuerte-Débil) Sean $\vec{u}_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$ con $\text{div}(\vec{u}_0) = 0$ y $\vec{f} \in L^2([0, T], L^2(\mathbb{R}^3))$ dos datos iniciales. Si el problema de Navier-Stokes asociado a estos datos iniciales

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} = \nu \Delta \vec{u} - (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} - \nabla p + \vec{f}, & \text{div}(\vec{u}) = 0, \quad \nu > 0, \\ \vec{u}(0, x) = \vec{u}_0, \end{cases}$$

admite una solución \vec{u}_M sur $[0, T] \times \mathbb{R}^3$ tal que $L^\infty([0, T], H^1(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0, T], H^2(\mathbb{R}^3))$, y si \vec{u}_L es una solución de Leray sobre $[0, T] \times \mathbb{R}^3$, entonces sobre el intervalo de tiempo $[0, T]$ tenemos la identidad

$$\vec{u}_M = \vec{u}_L.$$

Prueba. Consideremos $\vec{w} = \vec{u}_L - \vec{u}_M$ y entonces escribimos

$$\begin{aligned} \|\vec{w}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 &= \|\vec{u}_L - \vec{u}_M\|_{L^2}^2 = \|\vec{u}_L\|_{L^2}^2 + \|\vec{u}_M\|_{L^2}^2 - 2\langle \vec{u}_M, \vec{u}_L \rangle_{L^2 \times L^2} \\ &= \|\vec{u}_L\|_{L^2}^2 - \|\vec{u}_M\|_{L^2}^2 - 2\langle \vec{u}_M, \vec{w} \rangle_{L^2 \times L^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

A partir de esta identidad, vamos a utilizar las informaciones que tenemos a la mano para poder aplicar el Lema de Grönwall y de esta manera obtener $\vec{w} = 0$, *i.e.* que se tiene la unicidad buscada.

Nuestro punto de partida es la identidad siguiente

$$\int_{\mathbb{R}^3} \vec{u}_M \cdot \vec{u}_L dx = \|\vec{u}_0\|_{L^2}^2 + \int_0^t \langle \partial_t \vec{u}_M, \vec{u}_L \rangle_{H^{-1} \times H^1} ds + \int_0^t \langle \vec{u}_M, \partial_t \vec{u}_L \rangle_{H^2 \times H^{-2}} ds. \quad (2)$$

En efecto, tenemos $\vec{u}_M \in L_t^2 H_x^2$, y entonces $\partial_t \vec{u}_M \in L_t^2 H_x^{-1}$, además sabemos que $\vec{u}_L \in L_t^2 H_x^1$, y entonces $\partial_t \vec{u}_L \in L_t^2 H_x^{-2}$: esto muestra que todos los términos de la derecha de la expresión anterior están bien definidos. Por otro lado tenemos $\partial_t(\vec{u}_M \cdot \vec{u}_L) = \partial_t \vec{u}_M \cdot \vec{u}_L + \vec{u}_M \cdot \partial_t \vec{u}_L$ y por lo tanto podemos escribir

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \partial_t(\vec{u}_M \cdot \vec{u}_L) dx &= \int_{\mathbb{R}^3} \partial_t \vec{u}_M \cdot \vec{u}_L dx + \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u}_M \cdot \partial_t \vec{u}_L dx \\ \partial_t \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u}_M \cdot \vec{u}_L dx &= \langle \partial_t \vec{u}_M, \vec{u}_L \rangle_{H^{-1} \times H^1} + \langle \vec{u}_M, \partial_t \vec{u}_L \rangle_{H^2 \times H^{-2}}, \end{aligned}$$

de tal manera que integrando con respecto a la variable de tiempo obtenemos la expresión anterior.

Utilizamos ahora la definición $\vec{w} = \vec{u}_L - \vec{u}_M$ y aplicamos la identidad (2) al último término de (1) para obtener

$$\|\vec{w}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 = \|\vec{u}_L\|_{L^2}^2 - \|\vec{u}_M\|_{L^2}^2 - 2 \left(\int_0^t \langle \partial_t \vec{u}_M, \vec{w} \rangle_{H^{-1} \times H^1} ds + \int_0^t \langle \vec{u}_M, \partial_t \vec{w} \rangle_{H^2 \times H^{-2}} ds \right). \quad (3)$$

Vamos a estudiar cada uno de estos términos por separado.

- Para el término $\|\vec{u}_L\|_{L^2}^2$ utilizamos la desigualdad de energía de Leray:

$$\|\vec{u}_L(t, \cdot)\|_{L^2}^2 \leq \|\vec{u}_0\|_{L^2}^2 + 2 \int_0^t \langle \vec{f}, \vec{u}_L \rangle_{H^{-1} \times H^1} ds - 2\nu \int_0^t \|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}_L\|_{L^2}^2 ds. \quad (4)$$

- Para el término $\|\vec{u}_M\|_{L^2}^2$, como tenemos un poco más de regularidad tenemos

$$\|\vec{u}_M(t, \cdot)\|_{L^2}^2 = \|\vec{u}_0\|_{L^2}^2 + 2 \int_0^t \langle \vec{f}, \vec{u}_M \rangle_{H^{-1} \times H^1} ds - 2\nu \int_0^t \|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}_M\|_{L^2}^2 ds. \quad (5)$$

- Para el término $\int_0^t \langle \partial_t \vec{u}_M, \vec{w} \rangle_{H^{-1} \times H^1} ds$, utilizamos la ecuación verificada por $\partial_t \vec{u}_M$. En efecto, tenemos $\partial_t \vec{u}_M = \nu \Delta \vec{u}_M - (\vec{u}_M \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_M - \vec{\nabla} p + \vec{f}$, y entonces podemos escribir

$$\begin{aligned} \int_0^t \langle \partial_t \vec{u}_M, \vec{w} \rangle_{H^{-1} \times H^1} ds &= \int_0^t \langle \nu \Delta \vec{u}_M - (\vec{u}_M \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_M - \vec{\nabla} p + \vec{f}, \vec{w} \rangle_{H^{-1} \times H^1} ds \\ &= -\nu \int_0^t \langle \vec{\nabla} \otimes \vec{u}_M, \vec{\nabla} \otimes \vec{w} \rangle_{L^2 \times L^2} ds - \int_0^t \langle (\vec{u}_M \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_M, \vec{w} \rangle_{H^{-1} \times H^1} ds + \int_0^t \langle \vec{f}, \vec{w} \rangle_{H^{-1} \times H^1} ds. \end{aligned} \quad (6)$$

- Finalmente, para el término $\int_0^t \langle \vec{u}_M, \partial_t \vec{w} \rangle_{H^2 \times H^{-2}} ds$ utilizamos la relación

$\partial_t \vec{w} = \nu \Delta \vec{w} - \mathbb{P}((\vec{u}_L \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_L - (\vec{u}_M \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_M)$ para obtener

$$\int_0^t \langle \vec{u}_M, \partial_t \vec{w} \rangle_{H^2 \times H^{-2}} ds = \int_0^t \langle \vec{u}_M, \nu \Delta \vec{w} - \mathbb{P}((\vec{u}_L \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_L - (\vec{u}_M \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_M) \rangle_{H^2 \times H^{-2}} ds,$$

pero como \vec{u}_M y \vec{u}_L son de divergencia cero tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^t \langle \vec{u}_M, \partial_t \vec{w} \rangle_{H^2 \times H^{-2}} ds &= -\nu \int_0^t \langle \vec{\nabla} \otimes \vec{u}_M, \vec{\nabla} \otimes \vec{w} \rangle_{L^2 \times L^2} ds - \int_0^t \langle \vec{u}_M, (\vec{u}_L \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_L \rangle_{H^2 \times H^{-2}} ds \\ &\quad + \int_0^t \langle \vec{u}_M, (\vec{u}_M \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_M \rangle_{H^2 \times H^{-2}} ds. \end{aligned} \quad (7)$$

De esta manera, con las expresiones (4) – (7) podemos regresar a la identidad (3) para escribir

$$\begin{aligned} \|\vec{w}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 &\leq -2\nu \int_0^t \|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}_L\|_{L^2}^2 ds + 2\nu \int_0^t \|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}_M\|_{L^2}^2 ds + 4\nu \int_0^t \langle \vec{\nabla} \otimes \vec{u}_M, \vec{\nabla} \otimes \vec{w} \rangle_{L^2 \times L^2} ds \\ &+ 2 \int_0^t \langle (\vec{u}_M \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_M, \vec{w} \rangle_{H^{-1} \times H^1} ds + 2 \int_0^t \langle \vec{u}_M, (\vec{u}_L \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_L \rangle_{H^2 \times H^{-2}} ds - 2 \int_0^t \langle \vec{u}_M, (\vec{u}_M \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_M \rangle_{H^2 \times H^{-2}} ds. \end{aligned}$$

Ahora, utilizando el hecho que $\operatorname{div}(\vec{u}_M) = \operatorname{div}(\vec{u}_L) = 0$ tenemos las identidades

$$\langle (\vec{u}_M \cdot \vec{\nabla})\vec{u}_M, \vec{w} \rangle_{H^{-1} \times H^1} = -\langle \vec{u}_M, (\vec{u}_M \cdot \vec{\nabla})\vec{w} \rangle_{H^2 \times H^{-2}},$$

y

$$\langle \vec{u}_M, (\vec{u}_L \cdot \vec{\nabla})\vec{u}_M \rangle_{H^2 \times H^{-2}} = \langle \vec{u}_M, (\vec{u}_M \cdot \vec{\nabla})\vec{u}_M \rangle_{H^2 \times H^{-2}} = 0,$$

de manera que

$$\begin{aligned} \|\vec{w}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 &\leq -2\nu \int_0^t \|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}_L\|_{L^2}^2 ds + 2\nu \int_0^t \|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}_M\|_{L^2}^2 ds + 4\nu \int_0^t \langle \vec{\nabla} \otimes \vec{u}_M, \vec{\nabla} \otimes \vec{w} \rangle_{L^2 \times L^2} ds \\ &\quad + 2 \int_0^t \langle \vec{u}_M, (\vec{w} \cdot \vec{\nabla})\vec{w} \rangle_{H^2 \times H^{-2}} ds. \end{aligned}$$

Utilizando el hecho que $\vec{w} = \vec{u}_L - \vec{u}_M$ en el tercer término de la desigualdad anterior, tenemos

$$\begin{aligned} \|\vec{w}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 &\leq -2\nu \int_0^t \|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}_L\|_{L^2}^2 ds - 2\nu \int_0^t \|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}_M\|_{L^2}^2 ds + 4\nu \int_0^t \langle \vec{\nabla} \otimes \vec{u}_M, \vec{\nabla} \otimes \vec{u}_L \rangle_{L^2 \times L^2} ds \\ &\quad + 2 \int_0^t \langle \vec{u}_M, (\vec{w} \cdot \vec{\nabla})\vec{w} \rangle_{H^2 \times H^{-2}} ds, \end{aligned}$$

lo que nos da

$$\|\vec{w}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 \leq -2\nu \int_0^t \|\vec{\nabla} \otimes \vec{w}\|_{L^2}^2 ds + 2 \int_0^t \langle \vec{u}_M, (\vec{w} \cdot \vec{\nabla})\vec{w} \rangle_{H^2 \times H^{-2}} ds.$$

Ahora, hacemos la mayoración siguiente

$$\|\vec{w}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 \leq -2\nu \int_0^t \|\vec{\nabla} \otimes \vec{w}\|_{L^2}^2 ds + 2 \int_0^t \|\vec{u}_M\|_{L^\infty} \|\vec{w}\|_{L^2} \|\vec{w}\|_{\dot{H}^1} ds,$$

y con las desigualdades de Young obtenemos

$$\|\vec{w}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 \leq -2\nu \int_0^t \|\vec{\nabla} \otimes \vec{w}\|_{L^2}^2 ds + \frac{1}{2\nu} \int_0^t \|\vec{u}_M\|_{L^\infty}^2 \|\vec{w}\|_{L^2}^2 ds + 2\nu \int_0^t \|\vec{w}\|_{\dot{H}^1}^2 ds,$$

lo que nos permite escribir

$$\|\vec{w}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{2\nu} \int_0^t \|\vec{u}_M\|_{L^\infty}^2 \|\vec{w}\|_{L^2}^2 ds,$$

para terminar basta aplicar el Lema de Grönwall puesto que tenemos la mayoración

$$\int_0^t \|\vec{u}_M\|_{L^\infty}^2 \leq C \left(\|\vec{u}_M\|_{L^2(\dot{H}^1)} \|\vec{u}_M\|_{L^2(\dot{H}^2)} \right)^{1/2} < +\infty.$$

Hemos obtenido que $\|\vec{w}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 = 0$ lo que nos da la unicidad buscada. ■

Este teorema admite un corolario muy interesante.

Corolario 1 Sean $\vec{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ y $\vec{f} \in L^2([0, +\infty[, L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0, +\infty[, \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3))$. Entonces el problema de Navier-Stokes

$$\partial_t \vec{u} = \nu \Delta \vec{u} + \mathbb{P}(\vec{f} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}), \quad \operatorname{div}(\vec{u}) = 0, \quad \vec{u}(0, \cdot) = \vec{u}_0,$$

admite una solución débil \vec{u} definida sobre $[0, +\infty[\times \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{u} \in L^\infty([0, +\infty[, L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0, +\infty[, \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$ que la desigualdad fuerte de Leray.

Además tenemos el comportamiento en el tiempo siguiente

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2} = 0.$$

Prueba. Nuestro punto de partida es la obtención por regularización de una solución \vec{u} que pertenece al espacio $L^\infty([0, +\infty[, L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0, +\infty[, \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$ y que verifica la desigualdad de energía

$$\|\vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 + 2\nu \int_0^t \|\vec{u}(s, \cdot)\|_{\dot{H}^1}^2 ds \leq \|\vec{u}_0\|_{L^2}^2 + 2 \int_0^t \langle f(s, \cdot), \vec{u}(s, \cdot) \rangle_{H^{-1} \times H^1} ds.$$

Sabemos también, por el teorema de Fujita-Kato, que si $\vec{u}(t_0, \cdot) \in H^1(\mathbb{R}^3)$, $\vec{f} \in L^2([t_0, +\infty[, L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([t_0, +\infty[, \dot{H}^{-1/2}(\mathbb{R}^3))$ y si además se tiene $\|\vec{u}(t_0, \cdot)\|_{\dot{H}^{1/2}} < \varepsilon_0 \nu$ y $\int_{t_0}^{+\infty} \|\vec{f}(s, \cdot)\|_{\dot{H}^{-1/2}} ds < \varepsilon_0^2 \nu^3$, entonces el problema de Navier-Stokes de datos iniciales $(\vec{u}(t_0, \cdot), \vec{f})$ admite una solución global \vec{u}_M definida sobre $[t_0, +\infty[$ que pertenece al espacio $\mathcal{C}([t_0, +\infty[, H^1(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([t_0, +\infty[, \dot{H}^2(\mathbb{R}^3))$.

Ahora, dado que \vec{u} pertenece al espacio $L_t^\infty(L_x^2) \cap L_t^2(\dot{H}_x^1)$, entonces por interpolación entre estos espacios tenemos $\vec{u} \in L_t^4(\dot{H}_x^{1/2})$. De esta manera el conjunto de tiempos t tales que $\|\vec{u}(t, \cdot)\|_{\dot{H}_x^{1/2}} \geq \varepsilon_0 \nu$ es de medida finita puesto que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_t^{+\infty} \|\vec{f}(s, \cdot)\|_{\dot{H}^{-1/2}}^2 ds = 0,$$

y como el complementario del conjunto de puntos de Lebesgue de la aplicación $t \mapsto \|\vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2}$ es de medida nula, existe un punto $t_0 > 0$ tal que

- $\|\vec{u}(t_0, \cdot)\|_{\dot{H}^{1/2}} < \varepsilon_0 \nu$,
- $\int_{t_0}^{+\infty} \|\vec{f}(s, \cdot)\|_{\dot{H}^{-1/2}}^2 ds < \varepsilon_0^2 \nu^3$,
- \vec{u} es una solución de Leray sobre $[t_0, +\infty[$, en particular para todo $t \in]t_0, +\infty[$ tenemos la desigualdades

$$\|\vec{u}(t, \cdot)\|_{L^2}^2 + 2\nu \int_{t_0}^t \|\vec{u}(s, \cdot)\|_{\dot{H}^1}^2 ds \leq \|\vec{u}(t_0, \cdot)\|_{L^2}^2 + 2 \int_{t_0}^t \langle f(s, \cdot), \vec{u}(s, \cdot) \rangle_{H^{-1} \times H^1} ds.$$

Entonces, por el teorema de unicidad fuerte-débil, sabemos que \vec{u} coincide sobre $[t_0, +\infty[$ con la solución \vec{u}_M que pertenece al espacio $\mathcal{C}([t_0, +\infty[, H^1(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([t_0, +\infty[, \dot{H}^2(\mathbb{R}^3))$.

Entonces, para demostrar este corolario basta verificar que se tiene

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\vec{u}_M(t, \cdot)\|_{L^2} = 0.$$

De esta manera, para $t_0 < \tau < t$ tenemos

$$\vec{u}_M(t, x) = h_{\nu(t-\tau)} * \vec{u}_M(\tau, x) - \int_\tau^t h_{\nu(t-s)} * \mathbb{P}(\operatorname{div}(\vec{u}_M \otimes \vec{u}_M)) ds + \int_\tau^t h_{\nu(t-s)} * \mathbb{P}(\vec{f}) ds,$$

y escribimos

$$\|\vec{u}_M(t, \cdot)\|_{L^2} \leq \|h_{\nu(t-\tau)} * \vec{u}_M(\tau, \cdot)\|_{L^2} + \left\| \int_\tau^t h_{\nu(t-s)} * \mathbb{P}(\operatorname{div}(\vec{u}_M \otimes \vec{u}_M)) ds \right\|_{L^2} + \left\| \int_\tau^t h_{\nu(t-s)} * \mathbb{P}(\vec{f}) ds \right\|_{L^2},$$

y utilizando cálculos realizados en lecciones anteriores tenemos

$$\begin{aligned} \|\vec{u}_M(t, \cdot)\|_{L^2} &\leq \|h_{\nu(t-\tau)} * \vec{u}_M(\tau, \cdot)\|_{L^2} + C_\nu \left(\int_\tau^t \|\mathbb{P}(\operatorname{div}(\vec{u}_M \otimes \vec{u}_M))\|_{\dot{H}^{-1}}^2 ds \right)^{1/2} \\ &\quad + C_\nu \left(\int_\tau^t \|\mathbb{P}(\vec{f}(s, \cdot))\|_{\dot{H}^{-1}}^2 ds \right)^{1/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|h_{\nu(t-\tau)} * \vec{u}_M(\tau, \cdot)\|_{L^2} + C_\nu \left(\int_\tau^t \|\vec{u}_M\|_{\dot{H}^1}^2 \|\vec{u}_M\|_{\dot{H}^{1/2}}^2 ds \right)^{1/2} + C_\nu \left(\int_\tau^t \|\vec{f}(s, \cdot)\|_{\dot{H}^{-1}}^2 ds \right)^{1/2} \\
&\leq \|h_{\nu(t-\tau)} * \vec{u}_M(\tau, \cdot)\|_{L^2} + C_\nu \sup_{s>t_0} \|\vec{u}_M(s, \cdot)\|_{\dot{H}^{1/2}} \left(\int_\tau^t \|\vec{u}_M\|_{\dot{H}^1}^2 ds \right)^{1/2} + C_\nu \left(\int_\tau^t \|\vec{f}(s, \cdot)\|_{\dot{H}^{-1}}^2 ds \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

De esta manera obtenemos

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \|\vec{u}_M(t, \cdot)\|_{L^2} \leq \sup_{s>t_0} \|\vec{u}_M(s, \cdot)\|_{\dot{H}^{1/2}} \left(\int_\tau^{+\infty} \|\vec{u}_M\|_{\dot{H}^1}^2 ds \right)^{1/2} + C_\nu \left(\int_\tau^{+\infty} \|\vec{f}(s, \cdot)\|_{\dot{H}^{-1}}^2 ds \right)^{1/2},$$

para terminar basta hacer tender τ hacia $+\infty$ para obtener

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\vec{u}_M(t, \cdot)\|_{L^2} = 0,$$

lo que termina la prueba del corolario. ■