**Lección n°5: Ecuación de Ondas**

UPS, julio 2015

# Índice

**1. Presentación del problema $1D$, Fórmula de D'Alembert** **1**

**2. Presentación del problema $3D$, Unicidad Local** **3**

**3. Resolución de la ecuación de ondas** **6**

**4. Propiedades de las soluciones** **7**
4.1. Ecuación homogénea . . . . . . . . . . 7
4.2. Ecuación no-homogénea . . . . . . . . . . 8
4.3. Decrecimiento en el tiempo . . . . . . . . . . 8

# Introducción

El problema de modelizar la propagación de ondas es muy antiguo y este fenómeno aparece naturalmente en varios problemas físicos como por ejemplo la propagación de olas en un lago, la propagación de ondas acústicas o también como el carácter ondulatorio de la luz.

Empezaremos a estudiar un problema simple, en una dimensión, para luego pasar a varias dimensiones.

# 1. Presentación del problema $1D$, Fórmula de D'Alembert

Sean $u_0, u_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones tal que $u_0 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ y tal que $u_1 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. La ecuación de ondas en una dimensión está entonces dada por el problema:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(t,x) - \partial_x^2 u(t,x) = 0, \\ \\ u(0,x) = u_0(x), \\ \partial_t u(0,x) = u_1(x). \end{cases}$$

Para resolver este problema en una dimensión, nuestro punto de partida es la observación siguiente:

$$\partial_t^2 - \partial_x^2 = (\partial_t - \partial_x)(\partial_t + \partial_x),$$

y esto nos conduce a considerar el siguiente cambio de variable: $a = t - x$ y $b = t + x$, de manera que se tiene $t = \frac{a+b}{2}$ y $x = \frac{b-a}{2}$. De esta manera podemos definir

$$U(a,b) = u\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right),$$

y tenemos entonces la equivalencia

$$\partial_t^2 u(t,x) - \partial_x^2 u(t,x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \partial_a \partial_b U(a,b) = 0.$$

En este punto, vamos a *separar* las variables y escribir

$$U(a,b) = F(a) + G(b).$$

Esta separación de variables nos sugiere que la solución que buscamos se descompone en una parte *progresiva* $F(t-x)$ y una parte *regresiva* $G(t+x)$.

Vamos entonces a resolver la ecuación de ondas por medio de dos ecuaciones de transporte.

- La primera ecuación de transporte está dada de esta manera:
  si notamos $v(t,x) = (\partial_t + \partial_x)u(t,x)$ y $v(0,x) = u_1(x) + u_0'(x)$ tenemos

$$\begin{cases} \partial_t v(t,x) - \partial_x v(t,x) = 0, \\ v(0,x) = u_1(x) + u_0'(x), \end{cases}$$

  de manera que se tiene la solución

$$v(t,x) = v_0(t+x) = u_1(t+x) + u_0'(t+x).$$

- La segunda ecuación de transporte está dada por:

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + \partial_x u(t,x) = v(t,x), \\ u(0,x) = u_0(x), \end{cases}$$

  cuya solución está dada por la expresión

$$\begin{aligned} u(t,x) &= u_0(x-t) + \int_0^t v(s, x-(t-s))ds = u_0(x-t) + \int_0^t u_1(s+x-(t-s)) + u_0'(s+x-(t-s))ds \\ &= u_0(x-t) + \int_0^t u_1(x-t+2s) + u_0'(x-t+2s)ds. \end{aligned}$$

  Con un cambio de variable obtenemos entonces la fórmula de D'Alembert (1747):

$$\boxed{u(t,x) = \frac{1}{2}\left(u_0(x-t) + u_0(x+t)\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} u_1(s)ds.} \quad (1)$$

  La descomposición en ondas progresivas y regresivas está dada por medio de las expresiones siguientes:

$$F(t-x) = \frac{1}{2}u_0(x-t) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{0} u_1(s)ds$$

$$G(t+x) = \frac{1}{2}u_0(x+t) + \frac{1}{2}\int_{0}^{x+t} u_1(s)ds$$

## Consecuencias de la fórmula de D'Alembert

$\Longrightarrow$ Si los datos iniciales $u_0$ y $u_1$ son acotados entonces se tiene un control sobre la solución de la ecuación de ondas:

**Proposición 1 (Crecimiento)** *Si $u_0, u_1 \in L^\infty(\mathbb{R})$, entonces la solución (1) de la ecuación de ondas verifica el siguiente control:*

$$|u(t,x)| \leq C(1+t),$$

*para todo $x \in \mathbb{R}$ y todo $t > 0$.*

**Prueba.** Simplemente escribimos

$$
\begin{aligned}
|u(t,x)| &\leq \left|\frac{1}{2}\left(u_0(x-t)+u_0(x+t)\right)\right| + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}|u_1(s)|ds \\
&\leq \|u_0\|_{L^\infty} + \|u_1\|_{L^\infty} t \\
&\leq C(1+t),
\end{aligned}
$$

de esta manera vemos que tenemos un control sobre el crecimiento de la solución de la ecuación de ondas uniforme en la variable de espacio. ∎

$\Longrightarrow$ La unicidad de la solución es inmediata a partir de la fórmula (1).

$\Longrightarrow$ Con esta fórmula explícita, es posible obtener la proposición que sigue.

**Proposición 2 (Estabilidad)** *Sean $u_0, \bar{u}_0$ y $u_1, \bar{u}_1$ datos iniciales tales que*

$$
\|u_0 - \bar{u}_0\|_\infty \leq \varepsilon \qquad \text{y} \qquad \|u_1 - \bar{u}_1\|_\infty \leq \varepsilon,
$$

*para algún $\varepsilon > 0$. Si notamos $u(t,x)$ y $\bar{u}(t,x)$ las soluciones de la ecuación de onda asociadas a estos datos iniciales, entonces para todo $t \in [0,T]$ se tiene*

$$
|u(t,x) - \bar{u}(t,x)| \leq \varepsilon(1+T).
$$

**Prueba.** Escribimos:

$$
\begin{aligned}
|u(t,x) - \bar{u}(t,x)| &\leq \|u_0 - \bar{u}_0\|_\infty + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}|u_1(s) - \bar{u}_1(s)|ds \\
&\leq \|u_0 - \bar{u}_0\|_\infty + t\|u_1 - \bar{u}_1\|_\infty \\
&\leq \varepsilon(1+T).
\end{aligned}
$$

Esta estimación muestra la estabilidad de las soluciones de la ecuación de ondas con respecto a la variación de los datos iniciales. ∎

## 2. Presentación del problema $3D$, Unicidad Local

Cambiamos nuestro punto de vista y consideramos ahora las siguientes funciones: $u_0 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $u_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f : [0,T] \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ y la función buscada será $u : [0,T] \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$.

Adoptaremos además la notación siguiente

$$
\Box = \partial_t^2 - \Delta,
$$

y al operador diferencial $\Box$ lo llamaremos el *D'Alembertiano*. Con estas precisiones la ecuación de ondas en $3D$ está dada por el problema:

$$
\begin{cases}
\Box u(t,x) = f(t,x), \\
u(0,x) = u_0(x), \qquad \partial_t u(0,x) = u_1(x),
\end{cases}
$$

con $t \in [0,T]$ y $x \in \mathbb{R}^3$.

Antes de estudiar la existencia de soluciones, es preferible estudiar la unicidad local de dichas soluciones.

**Proposición 3 (Unicidad Local)** *Sea $u \in \mathcal{C}^2([0,T] \times \mathbb{R}^3)$ una función. Si para un $x_0 \in \mathbb{R}^3$ y para un $R > 0$ se tiene*

- *$u(0, \cdot) = 0$ y $\partial_t u(0, \cdot) = 0$ sobre la bola $B(x_0, R)$ y si además*
- *$\Box u = 0$ sobre el cono $\{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 : 0 < t < T; |x - x_0| + t < R\}$,*

*entonces se tiene que $u \equiv 0$ sobre este cono.*

**Demostración.** Esta proposición va a ser una consecuencia del siguiente lema que será demostrado más adelante.

**Lema 1** *Consideramos el cono $\Gamma = \{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 : 0 < t < T; |x - x_0| + t < R\}$ y sea $u(t,x)$ una función regular definida sobre $\Gamma$. Si notamos*

$$e_0(t,x) = \frac{1}{2}\left(|\partial_t u(t,x)|^2 + |\nabla u(t,x)|^2\right),$$

*entonces, para todo $t \in [0, \min(T,R)]$ se tiene la desigualdad*

$$\int_{\{|x-x_0|<R-t\}} e_0(t,x)dx \leq \int_{\{|x-x_0|<R\}} e_0(0,x)dx + \int_0^t \int_{\{|x-x_0|<R-s\}} (\partial_t u)(s,x)\Box u(s,x)dxds.$$

Daremos la demostración de este resultado un poco después. Veamos ahora cómo este resultado permite obtener la proposición enunciada en las líneas anteriores.

$\Longrightarrow$ En efecto, si se tiene que $\Box u = 0$ sobre el cono $\Gamma$, entonces el segundo término de la desigualdad anterior es nulo y obtenemos la mayoración

$$\int_{\{|x-x_0|<R-t\}} e_0(t,x)dx \leq \int_{\{|x-x_0|<R\}} e_0(0,x)dx.$$

$\Longrightarrow$ Pero se tiene por definición que

$$e_0(0,x) = \frac{1}{2}\left(|\partial_t u(0,x)|^2 + |\nabla u(0,x)|^2\right),$$

pero por hipótesis se tiene $\partial_t u(0,x) = 0$ y $u(0,x) = 0$, de donde se obtiene que $\nabla u(0,x) = 0$ y por lo tanto el primer término también es nulo, de donde se obtiene que

$$\int_{\{|x-x_0|<R-t\}} e_0(t,x)dx = \int_{\{|x-x_0|<R-t\}} \frac{1}{2}\left(|\partial_t u(t,x)|^2 + |\nabla u(t,x)|^2\right)dx = 0.$$

$\Longrightarrow$ A partir de esta identidad se deduce que $\partial_t u \equiv 0$ y $\nabla u \equiv 0$, de donde se obtiene, junto con los datos iniciales nulos que $u \equiv 0$ sobre $\Gamma$ y de esta manera hemos demostrado la proposición. ■

Pasemos ahora a la demostración del lema que quedó pendiente.

**Demostración del Lema 1.** Empezamos definiendo para todo $t \in ]0,T[$ el cono $\Gamma_t$ como el conjunto

$$\Gamma_t = \{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : 0 < s < t,\ |x - x_0| + s < R\},$$

y de esta manera tenemos

$$\int_0^t \int_{|x-x_0|<R-s} (\partial_t u)(s,x)\Box u(s,x)dxds = \int_{\Gamma_t} (\partial_t u)(s,x)\Box u(s,x)dxds.$$

$\Longrightarrow$ Definimos el vector $p(t,x) = \partial_t u(t,x)\nabla u(t,x)$, de manera que tenemos la relación

$$div(p) = \partial_t u \Delta u + \nabla(\partial_t u) \cdot \nabla u.$$

$\Longrightarrow$ Observamos ahora que se tiene, con esta definición la identidad:

$$\partial_t e_0(t,x) = \partial_t u \Box u + div(p).$$

En efecto, podemos escribir

$$\begin{aligned}
\partial_t e_0 &= \partial_t \left( \frac{1}{2} \left( |\partial_t u(t,x)|^2 + |\nabla u(t,x)|^2 \right) \right) = \partial_t u \partial_t^2 u + (\partial_{x_1} u \partial_t(\partial_{x_1} u) + ... + \partial_{x_3} u \partial_t(\partial_{x_3} u)) \\
&= \partial_t u \partial_t^2 u + \nabla(\partial_t u) \cdot \nabla u \\
&= \partial_t u (\partial_t^2 u - \Delta u) + \partial_t \Delta u + \nabla(\partial_t u) \cdot \nabla u = \partial_t u \Box u + div(p).
\end{aligned}$$

A partir de esta identidad podemos entonces escribir

$$\partial_t u \Box u = \partial_t e_0 - div(p).$$

Haremos un pequeño cambio de notación y notaremos

$$\vec{F} = (F_0, F_1, F_2, F_3) = (e_0, -\partial_t u \partial_{x_1} u, -\partial_t u \partial_{x_2} u, -\partial_t u \partial_{x_3} u),$$

y de esta manera podemos escribir

$$\partial_t u \Box u = div_{t,x}(\vec{F}).$$

El objetivo de esta transformación tiene que ver con el uso del teorema de la divergencia.

$\Longrightarrow$ Con esta identidad podemos entonces escribir

$$\int_{\Gamma_t} (\partial_t u)(s,x) \Box u(s,x) dx ds = \int_{\Gamma_t} div_{t,x}(\vec{F}) dx ds = \int_{\partial \Gamma_t} \vec{F} \cdot \nu dS, \tag{2}$$

observamos en particular que la frontera $\partial\Gamma_t$ se divide en tres partes:

$$\partial \Gamma_t = R_1 \cup R_2 \cup R_3,$$

y de esta forma vamos a calcular tres integrales por separado:

$$\int_{\partial\Gamma_t} \vec{F} \cdot \nu dS = \int_{R_1} \vec{F} \cdot \nu dS + \int_{R_2} \vec{F} \cdot \nu dS + \int_{R_3} \vec{F} \cdot \nu dS$$

- Para $R_1 = \{(0,x) : |x - x_0| < R\}$ se tiene que esta cantidad está parametrada únicamente por $x$, de manera que podemos escribir

$$\int_{R_1} \vec{F} \cdot \nu dS = -\int_{|x-x_0|<R} F_0(0,x) dx = -\int_{|x-x_0|<R} e_0(0,x) dx.$$

- Para $R_2 = \{(t,x) : |x - x_0| < R - t\}$, esta conjunto también esta parametrado únicamente por $x$ de modo que se tiene

$$\int_{R_2} \vec{F} \cdot \nu dS = -\int_{|x-x_0|<R-t} F_0(t,x) dx = \int_{|x-x_0|<R-t} e_0(t,x) dx.$$

- Para $R_3 = \{(s,x) : 0 < s < t;\ |x - x_0| + s < R\}$, aquí podemos escribir

$$\begin{aligned}
\int_{R_3} \vec{F} \cdot \nu dS &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{R-t \leq |x-x_0| < R} F_0(R - |x-x_0|, x) + \sum_{i=1}^{3} \frac{x_i - x_{0,i}}{|x - x_0|} F_i(R - |x - x_0|, x) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{R-t \leq |x-x_0| < R} e_0(R - |x-x_0|, x) - \frac{x - x_{.0}}{|x - x_0|} \cdot p(R - |x - x_0|, x) dx
\end{aligned}$$

Con estas fórmulas, podemos volver a la expresión (2) para obtener

$$\int_{\Gamma_t} (\partial_t u)(s,x)\Box u(s,x)dxds = -\int_{|x-x_0|<R} e_0(0,x)dx + \int_{|x-x_0|<R-t} e_0(t,x)dx$$
$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{R-t\leq|x-x_0|<R} e_0(R-|x-x_0|,x) - \frac{x-x_{\cdot 0}}{|x-x_0|}\cdot p(R-|x-x_0|,x)dx,$$

que volvemos a escribir de la siguiente manera

$$\int_0^t\int_{|x-x_0|<R-s}(\partial_t u)(s,x)\Box u(s,x)dxds + \int_{|x-x_0|<R} e_0(0,x)dx = \int_{|x-x_0|<R-t} e_0(t,x)dx$$
$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{R-t\leq|x-x_0|<R} e_0(R-|x-x_0|,x) - \frac{x-x_{\cdot 0}}{|x-x_0|}\cdot p(R-|x-x_0|,x)dx.$$

$\Longrightarrow$ Concentramos ahora nuestro estudio en el término $e_0 - \frac{x-x_{\cdot 0}}{|x-x_0|}\cdot p$, y por definición de $p$ tenemos

$$e_0(s,x) - \frac{x-x_{\cdot 0}}{|x-x_0|}\cdot p(s,x) = e_0(s,x) - \frac{x-x_{\cdot 0}}{|x-x_0|}\cdot \partial_t u\nabla u \geq e_0(s,x) - \left|\frac{x-x_{\cdot 0}}{|x-x_0|}\right| |\partial_t u|\,|\nabla u|,$$

ahora usando la definición de $e_0$ podemos escribir

$$\begin{aligned} e_0(s,x) - \left|\frac{x-x_{\cdot 0}}{|x-x_0|}\right| |\partial_t u|\,|\nabla u| &= \frac{1}{2}\left(|\partial_t u|^2 + |\nabla u|^2\right) - \left|\frac{x-x_{\cdot 0}}{|x-x_0|}\right| |\partial_t u|\,|\nabla u| \\ &\geq \frac{1}{2}\left(|\partial_t u|^2 + |\nabla u|^2\right) - |\partial_t u|\,|\nabla u| \\ &\geq \frac{1}{2}\left(|\partial_t u| - |\nabla u|\right)^2 > 0, \end{aligned}$$

de donde se deduce que todo este término es siempre positivo y con lo cual podemos escribir la mayoración

$$\int_0^t\int_{|x-x_0|<R-s}(\partial_t u)(s,x)\Box u(s,x)dxds + \int_{|x-x_0|<R} e_0(0,x)dx \geq \int_{|x-x_0|<R-t} e_0(t,x)dx,$$

lo que termina la prueba del lema. ■

# 3. Resolución de la ecuación de ondas

Una vez que hemos obtenido el resultado anterior de unicidad local, podemos con toda comodidad enunciar y demostrar el resultado siguiente:

**Teorema 1** *Si $u_0, u_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ son dos funciones tales que $u_0 \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^3)$ y $u_1 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$ y si $f : [0,T]\times\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función tal que $f \in \mathcal{C}^2([0,T]\times\mathbb{R}^3)$, entonces existe una única solución $u \in \mathcal{C}^2([0,T]\times\mathbb{R}^3)$ del problema*

$$\begin{cases} \Box u = f, \\ u(0,x) = u_0(x), \\ \partial_t u(0,x) = u_1(x). \end{cases}$$

*Esta solución se escribe por medio de la expresión*

$$u(t,x) = \partial_t S(t)u_0(x) + S(t)u_1(x) + \int_0^t S(t-s)f(s,x)ds,$$

*donde $S(t)g(x)$ está definida por medio de la transformada de Fourier y se tiene*

$$\widehat{S(t)g}(\xi) = g(\xi)\frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}.$$

**Demostración**. Podemos suponer, que las funciones $u_0$ y $u_1$ son nulas fuera de la bola $B(x_0, R)$ y que $f$ es nula fuera del cono invertido $\Gamma = \{(t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 : |x-x_0| < R+t\}$. De esta manera, por el resultado de unicidad local, se tiene que la solución $u$ de la ecuación de ondas es nula sobre el complementario del cono invertido $\Gamma$.

Tenemos entonces que la función $u$ es a soporte compacto y podemos entonces aplicar la transformada de Fourier en el D'Alembertiano para obtener

$$\widehat{\Box u}(\xi) = \widehat{\partial_t^2 - \Delta u}(\xi) = \partial_t^2\widehat{u}(t,\xi) - \widehat{\Delta u}(t,\xi) = \partial_t^2\widehat{u}(t,\xi) + |\xi|^2\widehat{u}(t,\xi).$$

Si notamos ahora $U_\xi(t) = \widehat{u}(t,\xi)$ y $F_\xi(t) = \widehat{f}(t,\xi)$, la ecuación que debemos resolver es entonces

$$\partial_t^2 U_\xi(t) + |\xi|^2 U_\xi(t) = F_\xi(t), \tag{3}$$

con los datos iniciales $U_\xi(0) = \widehat{u}_0(\xi)$ y $\partial_t U_\xi(0) = \widehat{u}_1(\xi)$. Para todo $\xi$ fijo, la ecuación (3) es una ecuación diferencial ordinaria en la variable $t$ que se resuelve de forma directa para obtener

$$\boxed{U_\xi(t) = \widehat{u}_0(\xi)\cos(t|\xi|) + \widehat{u}_1(\xi)\frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|} + \int_0^t \frac{\sin((t-s)|\xi|)}{|\xi|}F_\xi(s)ds,}$$

ésta es la resolución *en frecuencia* de la ecuación de ondas.

Para continuar, observamos que se tiene la identidad

$$\partial_t\left(\frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}\right) = \cos(t|\xi|),$$

y notando $\widehat{S(t)g}(\xi) = g(\xi)\frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}$ tenemos, al tomar la transformada de Fourier inversa de la solución en frecuencia de la ecuación de ondas, el resultado a continuación:

$$\boxed{u(t,x) = \partial_t\left(S(t)u_0(x)\right) + S(t)u_1(x) + \int_0^t S(t-s)f(s,x)ds. \qquad (4)}$$

Esta expresión es la solución de la ecuación de ondas. ■

**Observación 1** *La expresión (4) es válida en toda dimensión, pero en el caso de la dimensión 3, es posible dar una expresión más concreta de la operación $S(t)g(x)$. En efecto, se puede demostrar que esta operación es un* promedio *en el sentido siguiente, si $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^3)$, entonces*

$$S(t)g(x) = \frac{t}{4\pi}\int_{\mathbb{S}^2} g(x+t\sigma)d\sigma.$$

# 4. Propiedades de las soluciones

## 4.1. Ecuación homogénea

Aquí estudiamos el problema

$$\begin{cases} \Box u = 0, \\ u(0,x) = u_0(x) \in \mathcal{C}_c^3, \\ \partial_t u(0,x) = u_1(x) \in \mathcal{C}_c^2. \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ Entonces, utilizando la fórmula (4) y la Observación 1 podemos escribir que la solución de este problema es

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \partial_t S(t)u_0(x) + S(t)u_1(x) = \partial_t\left(\frac{t}{4\pi}\int_{\mathbb{S}^2} u_0(x+t\sigma)d\sigma\right) + \frac{t}{4\pi}\int_{\mathbb{S}^2} u_1(x+t\sigma)d\sigma \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{S}^2} u_0(x+t\sigma) + t\nabla u_0(x+t\sigma)\cdot\sigma + tu_1(x+t\sigma)d\sigma. \end{aligned} \tag{5}$$

$\Longrightarrow$ A partir de esta última fórmula se puede ver que si $u_0 \in \mathcal{C}^3$ y si $u_1(x) \in \mathcal{C}^2$, entonces la solución $u$ será *a lo mucho* de clase $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$ y no hay ganancia de regularidad.

$\Longrightarrow$ Haciendo el cambio de variable $z = x + t\sigma$ tenemos la expresión

$$u(t,x) = \frac{1}{4\pi t^2} \int_{|x-z|=t} u_0(z) + \nabla u_0(z) \cdot (z-x) + tu_1(z) d\sigma(z), \tag{6}$$

de donde deducimos los dos puntos siguientes:

- **Unicidad**: con la fórmula anterior, si dos soluciones $u$ y $\bar{u}$ provienen de los mismos datos iniciales, entonces son iguales.
- **Principio de Huygens fuerte**: la fórmula (6) nos dice que la solución $u(t,x)$ depende únicamente de los datos iniciales sobre la esfera $|x-z| = t$.

## 4.2. Ecuación no-homogénea

En esta sección estamos interesados en estudiar el siguiente problema.

$$\begin{cases} \Box u = f, \\ u(0,x) = 0, \\ \partial_t u(0,x) = 0, \end{cases}$$

donde $f \in \mathcal{C}^2([0,T] \times \mathbb{R}^3)$. Una aplicación directa de la fórmula general (4) nos da como solución de este problema la función

$$u(t,x) = \int_0^t S(t-s) f(s,x) ds.$$

$\Longrightarrow$ Notamos que, aún cuando los datos iniciales son nulos, se obtiene una solución no nula.

$\Longrightarrow$ En el caso de la dimensión 3, podemos escribir

$$u(t,x) = \frac{1}{4\pi} \int_{|y|<t} f(t-|y|, x-y) \frac{dy}{|y|}.$$

Con esta expresión vemos que la solución puede expresarse por medio de una convolución.

## 4.3. Decrecimiento en el tiempo

Nos interesamos ahora en la propiedades de decrecimiento en el tiempo de las soluciones de la ecuación de ondas y para ello consideramos el problema:

$$\begin{cases} \Box u = 0, \\ u(0,x) = 0, \\ \partial_t u(0,x) = u_1(x), \end{cases} \tag{7}$$

donde la función $u_1$ es tal que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_1(x)| dx < +\infty$.

**Teorema 2** *Sea $u$ la solución del problema (7). Entonces se tiene la estimación:*

$$\|u(\cdot,\cdot)\|_\infty \leq \frac{C}{t} \|\nabla u_1\|_{L^1}.$$

**Demostración**. En este caso particular, la solución de la ecuación de ondas se escribe de la forma

$$u(t,x) = S(t)u_1(x) = \frac{t}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} u_1(t + x\sigma) d\sigma = \frac{1}{4\pi} \int_{|x-z|=t} u_1(z) d\sigma(z).$$

Utilizando el teorema de la divergencia podemos escribir entonces

$$\frac{1}{4\pi}\int_{|x-z|=t} u_1(z)d\sigma(z) = \frac{1}{4\pi t}\int_{|x-z|<t} \nabla\cdot\left(\frac{z-x}{t}u_1(z)\right)d\sigma(z) = \frac{1}{4\pi t}\int_{|x-z|<t}\frac{3}{t}u_1(z)+\frac{z-x}{t}\cdot\nabla u_1(z)d\sigma(z).$$

Es decir que obtenemos la desiguladad

$$\begin{aligned}
|u(t,x)| &\leq \frac{3}{4\pi t^2}\int_{|x-z|<t}|u_1(z)|d\sigma(z)+\frac{1}{4\pi t}\int_{|x-z|<t}\left|\frac{z-x}{t}\right||\nabla u_1(z)|d\sigma(z)\\
&\leq \frac{3}{4\pi t^2}\int_{\mathbb{R}^3}|u_1(z)|\mathbb{1}_{\{|x-z|<t\}}(z)d\sigma(z)+\frac{1}{4\pi t}\|\nabla u\|_{L^1}\\
&\leq \frac{3}{4\pi t^2}\left(\int_{\mathbb{R}^3}|u_1(z)|^{3/2}dz\right)^{2/3}\left(\int_{\mathbb{R}^3}\mathbb{1}_{\{|x-z|<t\}}(z)dz\right)^{1/3}+\frac{1}{4\pi t}\|\nabla u_1\|_{L^1}\\
&\leq \frac{C}{4\pi t}\|u_1\|_{L^{3/2}}+\frac{1}{4\pi t}\|\nabla u_1\|_{L^1}.
\end{aligned}$$

En este punto aplicamos la desigualdad de Sobolev $\|u_1\|_{L^{3/2}} \leq C\|\nabla u_1\|_{L^1}$ y obtenemos la mayoración

$$|u(t,x)| \leq \frac{C}{t}\|\nabla u_1\|_{L^1},$$

que es el resultado buscado. ■