Lección n°7: Formulación Variacional

UPS, julio 2015

Índice

1. Introducción **1**

2. Un ejemplo completo **1**
2.1. Condiciones de Dirichlet y de Neumann 1
2.2. Resolución del problema (Condiciones de Dirichlet) 2

3. Ejemplos **5**
3.1. Condiciones de Neumann en un intervalo 5
3.2. Condiciones de Dirichlet en un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ 7

1. Introducción

En esta lección vamos a ver cómo es posible aplicar las herramientas desarrolladas en la lección anterior al estudio de las ecuaciones en derivadas parciales.

Este manera de trabajar se la conoce como *formulación variacional* y permite estudiar de forma relativamente simple y directa (una vez que se disponen de las herramientas adecuadas) algunos resultados como la existencia, la unicidad y la regularidad de las soluciones de ciertas ecuaciones en derivadas parciales.

¿En qué consiste esta formulación variacional?

La idea principal consiste en transformar una ecuación en derivadas parciales en un lenguaje que hace intervenir espacios funcionales adecuados en los cuales se puede aplicar el teorema de Lax-Milgram que nos proporciona directamente la existencia y la unicidad.

Dado que el teorema de Lax-Milgram utiliza como base de trabajo los espacios de Hilbert y dado que deseamos estudiar ecuaciones en donde intervienen derivadas de funciones, el marco de trabajo *natural* será el de los espacios de Sobolev.

2. Un ejemplo completo

En esta sección vamos a estudiar un problema completo para mostrar el método variacional. El problema que nos proponemos estudiar es el siguiente: encontrar una función $u :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ que sea solución de la ecuación

$$-u''(x) + u(x) = f(x) \text{ sobre } I =]0,1[, \tag{1}$$

donde $f :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua.

Con estas informaciones no es posible resolver este problema y es necesario añadir condiciones de *borde*. Estas condiciones de borde (también llamadas condiciones de contorno) provienen de la modelización matemática de problemas diversos (provenientes de la física, de la biología, de la química, etc), y es indispensable fijar correctamente estas condiciones de tal forma que los espacios funcionales correspondientes sean de alguna utilidad.

Es posible reagrupar en dos grandes familias estas condiciones de borde.

2.1. Condiciones de Dirichlet y de Neumann

Definición 1 (Condiciones de Dirichlet) *Cuando las condiciones de borde (o de contorno) hacen intervenir únicamente restricciones sobre la función incógnita y no se exigen condiciones sobre los valores en el borde de sus derivadas, entonces estas condiciones se denominan* Condiciones de Dirichlet.

Definición 2 (Condiciones de Neumann) *Cuando las condiciones de borde (o de contorno) hacen intervenir únicamente restricciones sobre las derivadas de la función incógnita y no se exigen condiciones sobre los valores en el borde de la función, entonces estas condiciones se denominan* Condiciones de Neumann.

En algunos casos, la modelización hace intervenir *condiciones mixtas* en las cuales se exigen restricciones en el borde tanto de la función incógnita como de sus derivadas.

2.2. Resolución del problema (Condiciones de Dirichlet)

Con estas definiciones de condiciones de borde, volvamos a nuestro estudio de la ecuación (1) y para ello empezaremos con condiciones de Dirichlet. Debemos entonces estudiar el problema que consiste en encontrar una función $u :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ que sea solución de

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x) & \text{sobre }]0,1[, \\ \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

donde $f :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua.

Para hacer un estudio variacional de esta ecuación seguiremos las siguientes etapas.

1) Construcción de la formulación variacional.
Hay que recordar que el objetivo de esta formulación es utilizar los resultados relativos a los espacios de Hilbert (el teorema de Lax-Milgram en particular) de manera que hay que tener muchas precauciones al momento de construir formas lineales (o bilineales) y al escoger los espacios funcionales sobre los cuales se desea trabajar.

$\Longrightarrow$ Partimos de la ecuación $-u'' + u = f$ y multiplicamos ambas partes por una función $\phi :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ *simpática*, es decir suficientemente regular y que verifica $\phi(0) = \phi(1) = 0$. De este modo obtenemos

$$-u''\phi + u\phi = f\phi,$$

muy pronto será indispensable precisar en qué espacio funcional *vive* la función ϕ.

$\Longrightarrow$ Integramos sobre todo el conjunto de estudio (en este caso $\Omega =]0,1[$) para obtener

$$\int_\Omega -u''\phi dx + \int_\Omega u\phi dx = \int_\Omega f\phi dx. \tag{3}$$

$\Longrightarrow$ En este punto realizamos una *integración por partes* en la primera integral para obtener

$$\int_\Omega u'\phi' dx + \int_\Omega u\phi dx = \int_\Omega f\phi dx. \tag{4}$$

Es fundamental observar aquí que la integración por partes es *interesante* porque permite pasar una derivada de la función u a la función ϕ: es por esta razón que hemos exigido que la función ϕ sea regular y sobre todo que hemos pedido que $\phi(0) = \phi(1) = 0$ para no alterar la identidad anterior con términos que no se escriban por medio de integrales.

En particular, vemos que *toda* función $\phi \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ permite pasar de la expresión (3) a la fórmula (4): en efecto, ϕ admite una derivada, se anula en los bordes de Ω y es de cuadrado integrable.

$\Longrightarrow$ Si suponemos además que $u \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$, todas estas consideraciones hacen que cada uno de los términos de la expresión (4) *tiene sentido.*

$\Longrightarrow$ Tenemos entonces que la formulación variacional de la ecuación (2) está dada por el siguiente problema:

Sea f una función de cuadrado integrable definida sobre Ω. Encontrar una función $u \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ tal que se tenga, para todo $\phi \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ la identidad

$$\int_\Omega u'\phi' dx + \int_\Omega u\phi dx = \int_\Omega f\phi dx. \tag{5}$$

A la función u que resuelve este problema se la denomina la *solución débil* de la ecuación (2).

Observación 1 *La formulación variacional (también llamada formulación débil) de la ecuación (2) exige menos condiciones sobre la función u: en particular solo se pide que la función u y su primera derivada u' sean de cuadrado integrable. Así mismo, en esta formulación, es suficiente que la función f sea de cuadrado integrable y no hace falta exigir que f sea continua.*

Observación 2 *Toda solución* fuerte, *es decir toda función u continua tal que sus dos derivadas u' y u'' son continuas y acotadas es* inmediatamente *una solución débil. En efecto: en estas condiciones la identidad (5) se tiene para toda función $\phi \in \mathcal{C}_c^1(\Omega)$, dado que el espacio $\mathcal{C}_c^1(\Omega)$ es denso en $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ se tiene el resultado para toda función $\phi \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$.*

Observación 3 *La* construcción de la formulación variacional *consiste entonces en* encontrar *los buenos espacios funcionales que permiten por un lado* debilitar *las condiciones exigidas sobre la función incógnita u y que permiten por otro lado aplicar la teoría desarrollada sobre los espacios de Hilbert.*

Observación 4 *La formulación variacional no precisa las condiciones de borde como es el caso del problema fuerte. Estas condiciones se podrán recuperar, con un poco de trabajo, a partir de los espacios funcionales escogidos.*

2) Existencia y Unicidad de una solución débil.

Una vez que tenemos el marco funcional bien delimitado, podemos empezar a definir los objetos que nos permitirán aplicar el teorema de Lax-Milgram.

$\Longrightarrow$ El espacio de Hilbert de *base* sobre el que vamos a trabajar es $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ dotado del producto interno:

$$(u, \phi)_{\mathbb{H}_0^1} = \int_\Omega u'\phi' dx + \int_\Omega u\phi dx,$$

en particular la forma bilineal que exigen las hipótesis del teorema de Lax-Milgram está dada por

$$B(u, \phi) = (u, \phi)_{\mathbb{H}_0^1} \tag{6}$$

Nótese que por construcción, esta forma bilineal $B(\cdot, \cdot)$ es continua y coerciva.

$\Longrightarrow$ Necesitamos para poder invocar el teorema de Lax-Milgram una forma lineal $T \in (\mathbb{H}_0^1)'$, para ello definimos T por medio de la expresión:

$$\begin{array}{rcl} T : \mathbb{H}_0^1 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \phi & \longmapsto & T(\phi) = \displaystyle\int_\Omega f\phi dx. \end{array}$$

$\Longrightarrow$ Con la forma bilineal B definida en (6) y con la forma lineal T dada en la expresión anterior, vemos que nuestro problema débil se reescribe de la forma

$$B(u, \phi) = \langle T, \phi \rangle.$$

$\Longrightarrow$ Podemos entonces aplicar el teorema de Lax-Milgram para obtener que el problema $B(u, \phi) = \langle T, \phi \rangle$ admite una única solución débil $u \in \mathbb{H}_0^1$ que verifica

$$u = \min_{\phi \in \mathbb{H}_0^1} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\phi'^2 + \phi^2) dx - \int_{\Omega} f \phi dx \right\},$$

y de esta manera se resuelve el problema en su formulación variacional.

Observación 5 *Como vemos, la* existencia *y la* unicidad *de soluciones del problema débil (5) es una consecuencia* directa *del teorema de Lax-Milgram una vez que se ha fijado el marco funcional adecuado.*

Observación 6 *Si bien obtenemos la existencia y la unicidad, este método no es constructivo: no hay ninguna forma de obtener concretamente una solución. Sin embargo, esta etapa es* indispensable *si se desea buscar una solución por otros métodos (métodos numéricos por ejemplo).*

3) Regularidad de la solución débil.
Por el método variacional, hemos obtenido una solución débil $u \in \mathbb{H}_0^1$, es decir que se la puede derivar (débilmente) al menos una vez. ¿Pero es posible ir un poco más lejos? Es decir, ¿es posible decir un poco más sobre la regularidad de la solución obtenida?

$\Longrightarrow$ La primera observación que hacemos es que, dado que hemos supuesto que $f \in L^2(\Omega)$, podemos escribir a partir de la formulación débil (5) la identidad

$$\int_{\Omega} u' \phi' dx = \int_{\Omega} (f - u) \phi dx,$$

que es válida para todo ϕ suficientemente regular a soporte compacto contenido en Ω.

$\Longrightarrow$ Esta expresión muestra, por definición, que la función u' pertenece al espacio de Sobolev $\mathbb{H}^1(\Omega)$, de manera que se obtiene muy fácilmente que $u \in \mathbb{H}^2(\Omega)$.

Estamos entonces en capacidad de decir que la solución débil obtenida es más regular pues pertenece al espacio de Sobolev $\mathbb{H}^2(\Omega)$.

4) Recuperación de la solución fuerte.
Lo que queremos hacer aquí es ver si es posible, gracias a este método variacional, obtener soluciones fuertes de la ecuación inicial. Es decir, si podemos encontrar una función que sea *fuertemente* dos veces derivables (derivadas continuas y acotadas) y que verifique el problema planteado.

$\Longrightarrow$ Para ello suponer que f es únicamente de cuadrado integrable no será suficiente, y en realidad el problema *fuerte* suponía que f era una función continua y a partir de ahora supondremos que $f \in \mathcal{C}(\Omega)$.

$\Longrightarrow$ Dado que $u \in \mathbb{H}^2(\Omega)$, entonces por la teoría desarrollada en los espacios de Sobolev se tiene que $(u')' \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ y por lo tanto se deduce que $u \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$.

$\Longrightarrow$ Vamos ahora a obtener que la solución débil es en realidad una solución fuerte. Para ello nuestro punto de partida es la fórmula:

$$\int_{\Omega} u' \phi' dx + \int_{\Omega} u \phi dx = \int_{\Omega} f \phi dx,$$

que es válida para toda función $\phi \in \mathcal{C}_c^1(\bar{\Omega})$ tal que $\phi(0) = \phi(1) = 0$. Pero dado que $u \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$ y que $u(0) = u(1) = 0$, podemos escribir

$$\int_{\Omega} (-u'' + u - f) \phi dx = 0,$$

y esta identidad se mantiene para todo $\phi \in \mathcal{C}_c^1(\Omega)$.

$\Longrightarrow$ Dado que el espacio $\mathcal{C}_c^1(\Omega)$ es denso en el espacio $L^2(\Omega)$ se obtiene que $(-u'' + u - f) = 0$ en casi todas partes, pero dado que cada uno de los términos es continuo, se obtiene esta identidad en todo punto.

Con todas estas etapas hemos entonces encontrado una función $u :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ que es solución *fuerte* del problema

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x) & \text{sobre }]0,1[, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

donde $f :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua.

Esquema de Trabajo

1) Construcción de la formulación variacional $\Longrightarrow$ fijar el *buen* marco funcional.

2) Existencia y Unicidad de una solución débil $\Longrightarrow$ aplicar los *buenos* teoremas.

3) Regularidad de la solución débil $\Longrightarrow$ utilizar las *buenas* propiedades de los espacios de Sobolev

4) Recuperación de la solución fuerte $\Longrightarrow$ resolver el problema.

3. Ejemplos

3.1. Condiciones de Neumann en un intervalo

En el ejemplo anterior habíamos estudiado un problema con condiciones de Dirichlet, ahora vamos a estudiar un problema muy similar pero con condiciones de Neumann.

Deseamos entonces estudiar la siguiente ecuación:

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x) & \text{sobre }]0,1[, \\ u'(0) = u'(1) = 0, \end{cases} \tag{7}$$

donde $f :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua.

Como vemos, en este problema no exigimos condiciones de borde sobre la función u sino sobre sus derivadas y esta particularidad será tomada en cuenta al momento de considerar los espacios funcionales adecuados: en efecto, en este caso, no disponemos de información sobre el valor de la función u en el borde.

Seguimos pues el esquema de trabajo expuesto anteriormente.

1) Construcción de la formulación variacional.
Nuestro objetivo sigue siendo obtener espacios funcionales que nos permitan aplicar el teorema de Lax-Milgram.

$\Longrightarrow$ Partimos de la ecuación $-u'' + u = f$ y multiplicamos ambas partes por una función $\phi :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ *simpática*, es decir suficientemente regular. De este modo obtenemos

$$-u''\phi + u\phi = f\phi.$$

$\Longrightarrow$ Integramos sobre todo el conjunto de estudio (en este caso $\Omega =]0,1[$) para obtener

$$\int_\Omega -u''\phi dx + \int_\Omega u\phi dx = \int_\Omega f\phi dx. \tag{8}$$

$\Longrightarrow$ En este punto realizamos una *integración por partes* en la primera integral para obtener

$$\int_\Omega u'\phi' dx + \int_\Omega u\phi dx = \int_\Omega f\phi dx. \tag{9}$$

En particular, vemos que *toda* función $\phi \in \mathbb{H}^1(\Omega)$ permite pasar de la expresión (8) a la fórmula (9).

$\Longrightarrow$ Aquí *ya no podemos suponer* que $u \in \mathbb{H}^1_0(\Omega)$, pues *no disponemos* de los valores de u sobre el borde.

En este caso, conviene entonces trabajar sobre el espacio de Sobolev $\mathbb{H}^1(\Omega)$

$\Longrightarrow$ Tenemos entonces que la formulación variacional de la ecuación (7) está dada por el siguiente problema:

> Sea f una función de cuadrado integrable definida sobre Ω. Encontrar una función $u \in \mathbb{H}^1(\Omega)$ tal que se tenga, para todo $\phi \in \mathbb{H}^1(\Omega)$ la identidad
>
> $$\int_\Omega u'\phi' dx + \int_\Omega u\phi dx = \int_\Omega f\phi dx. \tag{10}$$
>
> A la función u que resuelve este problema se la denomina la *solución débil* de la ecuación (7).

Observación 7 *Toda solución* fuerte*, es decir toda función u continua tal que sus dos derivadas u' y u'' son continuas y acotadas (y que verifica las condiciones de borde) es* inmediatamente *una solución débil.*

2) Existencia y Unicidad de una solución débil.

$\Longrightarrow$ El espacio de Hilbert de *base* sobre el que vamos a trabajar es $\mathbb{H}^1(\Omega)$ dotado del producto interno:

$$(u, \phi)_{\mathbb{H}^1} = \int_\Omega u'\phi' dx + \int_\Omega u\phi dx,$$

en particular la forma bilineal que exigen las hipótesis del teorema de Lax-Milgram está dada por

$$B(u, \phi) = (u, \phi)_{\mathbb{H}^1} \tag{11}$$

Nótese que por construcción, esta forma bilineal $B(\cdot, \cdot)$ es continua y coerciva.

$\Longrightarrow$ Necesitamos para poder invocar el teorema de Lax-Milgram una forma lineal $T \in (\mathbb{H}^1)'$, para ello definimos T por medio de la expresión:

$$\begin{array}{rcl} T : \mathbb{H}^1 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \phi & \longmapsto & T(\phi) = \displaystyle\int_\Omega f\phi dx. \end{array}$$

$\Longrightarrow$ Con la forma bilineal B definida en (11) y con la forma lineal T dada en la expresión anterior, vemos que nuestro problema débil se reescribe de la forma

$$B(u, \phi) = \langle T, \phi \rangle.$$

$\Longrightarrow$ Podemos entonces aplicar el teorema de Lax-Milgram para obtener que el problema $B(u, \phi) = \langle T, \phi \rangle$ admite una única solución débil $u \in \mathbb{H}^1$ que verifica

$$u = \min_{\phi \in \mathbb{H}^1} \left\{ \frac{1}{2} \int_\Omega (\phi'^2 + \phi^2) dx - \int_\Omega f\phi dx \right\},$$

y de esta manera se resuelve el problema en su formulación variacional, es decir que tenemos la *existencia* y la *unicidad* de la solución débil.

3) Regularidad de la solución débil.

Pasamos ahora a estudiar la regularidad de la solución débil, es decir si es posible decir un poco más al respecto, más allá de lo que nos dice la etapa anterior en todo caso.

$\Longrightarrow$ Siguiendo el mismo razonamiento anterior y dado que hemos supuesto que $f \in L^2(\Omega)$, podemos escribir a partir de la formulación débil (10) la identidad

$$\int_\Omega u'\phi' dx = \int_\Omega (f - u)\phi dx,$$

de donde se deduce, por definición de derivada débil que $u \in \mathbb{H}^2(\Omega)$.

$\Longrightarrow$ En particular, dado que se tiene $u \in \mathbb{H}^2$ entonces $u \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$.

Estamos entonces en capacidad de decir que la solución débil obtenida es más regular pues pertenece al espacio de Sobolev $\mathbb{H}^2(\Omega)$.

Observación 8 *El hecho de tener que la solución débil verifica* $u \in \mathbb{H}^2(\Omega)$ *y* $u \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ *nos permite dar un* sentido *a las cantidades puntuales* $u'(0)$ *y* $u'(1)$.

4) Recuperación de la solución fuerte.
El problema *fuerte* suponía que f era una función continua y a partir de ahora supondremos que $f \in \mathcal{C}(\Omega)$.

$\Longrightarrow$ A partir de la formulación débil (10) y a partir de las condiciones de Neumann, se tiene la identidad

$$\int_\Omega (-u'' + u - f)\phi dx + u'(1)\phi(1) - u'(0)\phi(0) = 0, \tag{12}$$

que es válida para todo $\phi \in \mathbb{H}^1(\Omega)$.

$\Longrightarrow$ Dado que u es solución del problema variacional, si $\phi \in \mathbb{H}^1(\Omega)$ a partir de la fórmula (12) tendríamos la identidad

$$u'(1)\phi(1) - u'(0)\phi(0) = 0$$

para todo $\phi \in \mathbb{H}^1(\Omega)$, lo cual implica que $u'(1) = u'(0) = 0$.

$\Longrightarrow$ Si suponemos, por un instante, que $\phi \in \mathbb{H}^1_0(\Omega)$, razonando de la misma manera que en el problema anterior tenemos que $-u'' + u = f$ en casi todas partes.

$\Longrightarrow$ Para terminar, basta proceder como en el ejemplo anterior y obtener que las derivadas son en realidad *fuertes* y que se tiene una solución *fuerte* del problema. En efecto, si $u \in \mathbb{H}^2$ se tiene que $u \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$.

Con todas estas etapas hemos entonces encontrado una función $u :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ que es solución *fuerte* del problema

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x) & \text{sobre }]0,1[, \\ \\ u'(0) = u'(1) = 0, \end{cases}$$

donde $f :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua.

3.2. Condiciones de Dirichlet en un subconjunto de $\mathbb{R}^n$

En los dos ejemplos anteriores hemos trabajado sobre un intervalo de la recta real y es ahora necesario pasar a subconjunto del espacio $\mathbb{R}^n$. Si bien algunos aspectos serán similares, es importante recalcar que las propiedades del borde de los conjuntos considerados pueden tener consecuencias importantes.

El problema que consideramos es el siguiente: si Ω es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ de borde regular, encontrar una función $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ que sea solución de la ecuación

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + u(x) = f(x) & \text{en } \Omega, \\ \\ u(x) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{13}$$

donde $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función regular.

Vamos a aplicar las mismas etapas presentadas en los dos ejemplos anteriores.

1) Construcción de la formulación variacional.

$\Longrightarrow$ Partimos de la ecuación $-\Delta u(x) + u(x) = f(x)$ y multiplicamos ambas partes por una función $\phi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *simpática* que pertenece al espacio $\mathbb{H}^1_0(\Omega)$. De este modo obtenemos

$$-\Delta u\phi + u\phi = f\phi.$$

$\Longrightarrow$ Integramos sobre todo el conjunto Ω para obtener

$$\int_\Omega -\Delta u\phi dx + \int_\Omega u\phi dx = \int_\Omega f\phi dx. \tag{14}$$

$\Longrightarrow$ En este punto realizamos una *integración por partes* en la primera integral para obtener

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\phi dx + \int_\Omega u\phi dx = \int_\Omega f\phi dx. \tag{15}$$

En particular, vemos que *toda* función $\phi \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ permite pasar de la expresión (14) a la fórmula (15).

$\Longrightarrow$ Tenemos entonces que la formulación variacional de la ecuación (13) está dada por el siguiente problema:

> Sea f una función de cuadrado integrable definida sobre Ω. Encontrar una función $u \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ tal que se tenga, para todo $\phi \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ la identidad
>
> $$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\phi dx + \int_\Omega u\phi dx = \int_\Omega f\phi dx.$$
>
> A la función u que resuelve este problema se la denomina la *solución débil* de la ecuación (13).

2) Existencia y Unicidad de una solución débil.

$\Longrightarrow$ El espacio de Hilbert de *base* sobre el que vamos a trabajar es $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ dotado del producto interno:

$$(u,\phi)_{\mathbb{H}_0^1} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\phi dx + \int_\Omega u\phi dx,$$

en particular la forma bilineal que exigen las hipótesis del teorema de Lax-Milgram está dada por

$$B(u,\phi) = (u,\phi)_{\mathbb{H}_0^1}$$

Esta forma bilineal $B(\cdot,\cdot)$ es continua y coerciva.

$\Longrightarrow$ Necesitamos para poder invocar el teorema de Lax-Milgram una forma lineal $T \in (\mathbb{H}_0^1)'$, para ello definimos T por medio de la expresión:

$$\begin{aligned} T : \mathbb{H}_0^1 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \phi &\longmapsto T(\phi) = \int_\Omega f\phi dx. \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Con la forma bilineal B definida anteriormente y con la forma lineal T dada en la expresión anterior, vemos que nuestro problema débil se reescribe de la forma

$$B(u,\phi) = \langle T, \phi\rangle.$$

$\Longrightarrow$ Podemos entonces aplicar el teorema de Lax-Milgram para obtener que el problema $B(u,\phi) = \langle T,\phi\rangle$ admite una única solución débil $u \in \mathbb{H}_0^1$ que verifica

$$u = \min_{\phi\in\mathbb{H}_0^1} \left\{ \frac{1}{2}\int_\Omega (|\nabla\phi|^2 + \phi^2)dx - \int_\Omega f\phi dx \right\},$$

y de esta manera se resuelve el problema en su formulación variacional, es decir que tenemos la *existencia* y la *unicidad* de la solución débil.

3) Regularidad de la solución débil.

En el caso de subconjuntos del espacio $\mathbb{R}^n$, la situación es más delicada pues dependerá de la regularidad del borde $\partial\Omega$.

En este caso necesitaremos el siguiente resultado.

Teorema 1 *Sea Ω un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ de borde $\partial\Omega$ regular. Sea $f \in L^2(\Omega)$ y sea $u \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ una función que verifica*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi dx + \int_\Omega u\phi dx = \int_\Omega f\phi dx,$$

para toda función $\phi \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$. Entonces $u \in \mathbb{H}^2(\Omega)$ y se tiene el control

$$\|u\|_{\mathbb{H}^2} \leq C(\Omega)\|f\|_{L^2},$$

en donde la constante $C(\Omega)$ depende únicamente de las propiedades de Ω.

Además, si f es una función regular, entonces $u \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$.

Aceptando este resultado, se obtiene la regularidad adicional que será de utilidad en la etapa siguiente.

4) Recuperación de la solución fuerte.

$\Longrightarrow$ Dado que en la etapa anterior obtenemos que $u \in \mathbb{H}^2(\Omega)$ y que, dado que la función f es regular, también se tiene que $u \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$, entonces por la teoría desarrollada en la lección anterior sobre los espacios de Sobolev tenemos que $u = 0$ sobre el borde $\partial\Omega$.

$\Longrightarrow$ Además, para toda función $\phi \in \mathcal{C}_c^1(\Omega)$ se tiene la identidad

$$\int_\Omega (-\Delta u + u)\phi dx = \int_\Omega f\phi dx,$$

de donde se deduce que $-\Delta u + u = f$ en casi todas partes pues el espacio $\mathcal{C}_c^1(\Omega)$ es denso en $L^2(\Omega)$.

$\Longrightarrow$ Como tenemos por los puntos anteriores que $u \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$, obtenemos finalmente que esta identidad se tiene en todo punto y de esta manera se ha recuperado la solución clásica.