Lección n°1: Breve introducción al criterio de Serrin y ciertas herramientas de base.

Escuela Politécnica Nacional 2023

1. Introducción

El objetivo de esta serie de lecciones consiste en presentar una demostración del teorema de regularidad local de las ecuaciones de Navier-Stokes desarrollado por Serrin en [6]. Este resultado permite obtener una mejor comprensión del comportamiento local de las soluciones débiles de las ecuaciones de Navier-Stokes, y es a su vez una campo activo en la investigación actual. Es importante remarcar que estás lecciones están inspiradas especialmente en [4, Capítulo 12] y del libro [2].

Antes de enunciar el resultado principal de esta lección, es pertinente presentar ciertas definiciones y resultados importantes alrededor de las ecuaciones de Navier-Stokes.

1.1. Las ecuaciones de Navier-Stokes

Recordemos que las ecuaciones de Navier-Stokes están dadas por

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} - \vec{\nabla}p + \vec{f}, \quad div(\vec{u}) = 0, \\ \vec{u}(0,x) = \vec{u}_0(x), \qquad x \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

donde $\vec{u} : [0,+\infty[\times\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ representa la velocidad, $p : [0,+\infty[\times\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ es la presión asociada, $\vec{f} : [0,+\infty[\times\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una fuerza exterior dada y $\vec{u}_0 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ el dato inicial.

Diremos que $(\vec{u}, p)$ es una solución débil de las ecuaciones de Navier Stokes, si para todo $\varphi \in \mathcal{D}([0,+\infty[\times\mathbb{R}^3)$ tal que $div(\varphi) = 0$ se tiene

$$\langle \vec{u} - \Delta\vec{u} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}, \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = 0. \tag{1}$$

donde la presión está obtenida implícitamente a partir del hecho que $\vec{u}$ verifica (1) (ver [4, Lema 6.3]).

Es bien conocido que si trabajamos en el cuadro de soluciones débiles podemos considerar espacios más generales y obtener estimaciones más precisas. En efecto, en 1934, J. Leray en demostró la existencia de soluciones débiles globales en tiempo de las ecuaciones de Navier-Stokes que verifican una desigualdad de energía. Por simplicidad, recordemos este resultado en el caso de una fuerza exterior nula.

Teorema 1.1 *Si $\vec{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ es un dato inicial, entonces existe al menos una solución débil global en tiempo $(\vec{u}, p)$ de las ecuaciones de Navier-Stokes, y además se tiene la siguiente desigualdad de energía para casi todo $t \in [0,+\infty[$:*

$$\|\vec{u}(t,\cdot)\|_{L^2} + 2\int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} |\vec{\nabla}\otimes\vec{u}(x,s)|^2 dx ds \leq \|\vec{u}_0\|_{L^2}. \tag{2}$$

Este resultado amerita algunas observaciones:

1. Primero, diremos toda solución débil que verifica la desigualdad de energía (2) es llamada solución débil de Leray. En el caso cuando no se considera fuerza exterior, al momento de la escritura de estas lecciones no se conoce si estás soluciones son únicas.

2. La información que tenemos sobre estas soluciones, *i.e.* la desigualdad de energía, no es suficiente para establecer si estás soluciones son regulares.

Así, el objetivo de estas lecciones consiste en comprender el comportamiento **local** de las soluciones débiles de tipo Leray. Más precisamente, veremos que si consideramos un cierto control adicional sobre velocidad $\vec{u}$, es posible obtener una ganancia de información. En efecto, Serrin en [6] demostró que si para $\Omega \subset]0,+\infty[\times\mathbb{R}^3$ un conjunto abierto y acotado, la solución débil de Leray $(\vec{u}, p)$ verifica que $\vec{u} \in L^\infty_{t,x}(\Omega)$, entonces la velocidad $\vec{u}$ es regular respecto a la variable espacial en el interior de Ω.

Antes de ahondar en esta teoría y poder enunciar dicho resultado de una manera más formal, necesitamos presentar ciertas definiciones y herramientas de base.

2. Espacios locales

Empezamos primero introduciendo ciertos espacios y recordando varias propiedades. Definimos $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$, con $1 \leq p \leq +\infty$, como el espacio de las funciones L^p*-localmente integrables*, es decir

$$L^p_{loc}(\mathbb{R}^n) = \left\{ \varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} : \left(\int_K |\varphi(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty, \quad \text{para todo compacto } K \subset \mathbb{R}^n \right\},$$

además si $p = +\infty$, tenemos

$$L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n) = \left\{ \varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} : \underset{x \in K}{supess} |\varphi(x)| < +\infty, \quad \text{para todo compacto } K \subset \mathbb{R}^n \right\},$$

el cual notará el espacio de las funciones *localmente acotadas*. Es fácil ver que para $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq +\infty$ tenemos las inclusiones

$$L^\infty_{loc} \subset L^{p_2}_{loc} \subset L^{p_1}_{loc} \subset L^1_{loc}.$$

Es claro que a partir de estas inclusiones, el hecho de pertenecer a L^∞_{loc} es en realidad una condición muy fuerte dado que exige pertenecer a todos los espacios localmente integrables. Sin embargo, el imponer información local, es más débil que imponer una información global sobre la solución, en efecto, se tiene que $L^p \subset L^p_{loc}$, para todo $1 \leq p \leq +\infty$.

Estas definiciones se pueden generalizar para funciones vectoriales fácilmente considerando componente por componente y de manera similar para funciones definidas en $[0, +\infty[\times \mathbb{R}^3$. Estas últimas las notaremos por $(L^p_t L^q_x)_{loc}$ con $1 \leq p, q \leq +\infty$, para las funciones que son localmente integrables en tiempo y espacio.

2.1. Espacios de Sobolev locales

Antes de pasar a la versión local de los espacios de Soboloev, recomendamos al lector, ver el libro [2] y sus referencias o las lecciones del año 2013 en la pagina de AMARUN sobre espacios de Sobolev.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un conjunto abierto y acotado de frontera regular. Definimos los espacios de Sobolev *homogeneos* $\dot{H}^k(\Omega)$ con $k \in \mathbb{N}$ como el espacio de distribuciones $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que sus derivadas en el sentido de distribuciones $D^\alpha \varphi$, para $|\alpha| \leq k$, pertenecen al espacio $L^2(\Omega)$. Similarmente, esta definición se generaliza para funciones vectoriales.

Dado que para nuestros fines necesitamos trabajar con espacios de Sobolev de orden fraccionario, donde intervienen ciertos operadores no locales, (transformada de Fourier), debemos cambiar ligeramente la definición usual. Diremos que una función $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ pertenece al espacio de Sobolev $\dot{H}^s(\Omega)$ para $s \geq 0$, si existe una función $\phi \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^3)$ tal que la restricción sobre Ω coincide con la función φ: $\phi_{|\Omega} = \varphi$. Podemos normar este espacio por

$$\|\varphi\|_{\dot{H}^s(\Omega)} = \text{ínf} \left\{ \|\phi\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)} : \phi \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^3) \quad \text{y} \quad \phi_{|\Omega} = \varphi \right\}.$$

Con el fin de caracterizar los espacios de Sobolev locales, introducimos el siguiente concepto:

Definición 1 (Localización de los espacios de Sobolev) *Sea $B(x_0, r)$ una bola euclidiana con $x_0 \in \mathbb{R}^3$ y $0 < r < +\infty$. Si $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una función vectorial diremos que dicha función pertenece al espacio de Sobolev $\dot{H}^s(B(x_0, r))$ con $s \in \mathbb{R}$, si para una función positiva $\phi \in \mathcal{C}^\infty_0(\mathbb{R}^3)$ tal que*

1) $\phi(x) = 1$ *en* $B(x_0, r)$ *y*

2) $\phi(x) = 0$ *en* $\{x \in \mathbb{R}^3 : |x - x_0| \geq r + \varepsilon\}$*, para cierto* $\varepsilon > 0$ *pequeño,*

tenemos que el producto $\phi\vec{v}$ *pertenece al espacio* $\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)$*.*

Ejemplo 1 *Para todo* $s > 0$*, tenemos que* $\vec{v} \in \dot{H}^s(B(x_0, r))$ *si* $(-\Delta)^{\frac{s}{2}}(\phi\vec{v}) \in L^2(\mathbb{R}^3)$ *donde* ϕ *es una función test que vale 1 en* $B(x_0, r)$*.*

2.1.1. Ecuaciones de Navier-Stokes locales

Recordemos que estamos interesados en el comportamiento local de las soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes, dicho de otra manera, la única información que poseemos sobre este sistema es local. Esto no es un inconveniente dado que se puede fácilmente adaptar nuestro problema al cuadro local.

Para fijar las ideas consideramos un punto $(t, x) \in]0, +\infty[\times\mathbb{R}^3$ y estudiaremos el comportamiento de la solución alrededor de este punto. En efecto, sea $Q_r(t, x) = Q_r$ un bola parabólica dada por

$$Q_r =]t - r^2, t[\times B(x_0, r), \tag{3}$$

Así, dada $\vec{f} \in L^2_t L^2_x(Q_r)$ una fuerza exterior y $\vec{u}$ una función que pertenece a $L^\infty_t L^2_x(Q_r) \cap L^2_t \dot{H}^1_x(Q_r)$, diremos que $\vec{u}$ es una solución débil de las ecuaciones de Navier-Stokes en Q_r si para toda función test $\vec{\varphi} \in \mathcal{D}(Q_r)$, con $div(\varphi) = 0$ tenemos

$$\left\langle \partial_t\vec{u} - \Delta\vec{u} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} - \vec{f}\ ,\ \vec{\phi} \right\rangle_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}} = 0, \tag{4}$$

Además, dada una solución $\vec{u}$ débil de (4) se puede construir fácilmente una distribución $p \in \mathcal{D}'(Q_r)$ que llamaremos la presión del sistema tal que $(\vec{u}, p)$ verifican las ecuaciones de Navier Stokes.

Observación 2.1 *Es importante remarcar que estamos concentrados en el estudio local de una solución* $(\vec{u}, p)$*, más precisamente, nos interesa el comportamiento de la solución alrededor un punto* (t, x) *con* $t \neq 0$*. Por este motivo, la naturaleza del valor inicial no es de nuestro interés por este instante. Sin embargo podemos decir, que si el dato inicial pertenece* $L^2(\mathbb{R}^3)$ *entonces la solución es una solución débil de Leray globales en tiempo.*

Habiendo introducido todos los criterios necesarios, estamos listos para enunciar el teorema principal

3. Criterio de regularidad local de Serrín

Como mencionamos al inicio de esta lección, es posible obtener una ganancia de regularidad a partir de ciertas hipótesis adicionales sobre la solución $\vec{u}$. En efecto, tenemos el siguiente teorema

Teorema 3.1 *Sea* $\vec{u} \in L^\infty_t L^2_x(Q_r) \cap L^2_t \dot{H}^1_x(Q_r)$*,* $p \in \mathcal{D}'(Q_r)$ *y* $\vec{f} \in L^2_t L^2_x(Q_r)$*. Si* $\vec{u}$ *es una solución débil de las ecuaciones de Navier-Stokes en* Q_r

$$\partial_t\vec{u} = \Delta\vec{u} - (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} - \vec{\nabla}p + \vec{f}, \quad div(\vec{u}) = 0, \tag{5}$$

y si además, tenemos que $\vec{u}$ *es acotado en* Q_r*,* i.e.

$$\vec{u} \in L^\infty_t L^\infty_x(Q_r),$$

entonces para todo $0 < \rho < r$ *tenemos*

$$\vec{u} \in L^\infty\big(]t - \rho^2, t[, \dot{H}^1(B(x_0, \rho))\big) \cap L^2\big(]t - \rho^2, t[, \dot{H}^2(B(x_0, \rho))\big).$$

Este resultado merece ciertos comentarios:

(i) Recordemos que nuestra hipótesis sobre la solución está dada por

$$\vec{u} \in L^\infty_t L^2_x \cap L^2_t \dot{H}^1_x(Q_r),$$

y usando el criterio de regularidad de Serrín (Teorema 3.1), en realidad logramos obtener que

$$\vec{u} \in L^\infty_t \dot{H}^1_x \cap L^2_t \dot{H}^2_x(Q'_r),$$

con $Q'_r \subset Q_r$. Así, se puede ver claramente la ganancia de regularidad, respecto a la variable espacial, en efecto pasamos de $L^\infty_t L^2_x$ al espacio $L^\infty_t \dot{H}^1_x$ y del espacio $L^2_t \dot{H}^1_x$ al espacio $L^2_t \dot{H}^2_x$.

Notemos que los espacios que miden la información en la variable temporal L^∞_t y L^2_t no hay cambio, y eso es debido a la falta de información sobre la presión. Estudiaremos más en detalle esta propiedad en la lección 4.

(ii) Si la fuerza es suficientemente regular, podemos iterar este proceso para tener en realidad que las soluciones son regulares, en efecto podemos mostrar que para casi todo $s \in [t - r^2, t]$, $\vec{u}(s, \cdot) \in \dot{H}^k(B(x_0, r))$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

(iii) Es importante remarcar que la hipótesis adicional $\vec{u} \in L^\infty_t L^\infty_x(Q_r)$ es en realidad una hipótesis muy restrictiva, y que no puede ser deducida a partir de las informaciones usuales de una solución débil. En efecto dado que $\vec{u} \in L^\infty_t L^2_x(Q_r) \cap L^2_t \dot{H}^1_x(Q_r)$, por las inyecciones de Sobolev, tenemos que $\dot{H}^1 \subset L^6$. Así, podemos deducir que $\vec{u} \in L^\infty_t L^2_x(Q_r) \cap L^2_t L^6_x(Q_r)$, lo cual implica utilizando interpolación en espacios de Lebesgue:

$$\vec{u} \in L^p_t L^q_x(Q_r) \qquad \text{con} \quad \frac{2}{p} + \frac{3}{q} = \frac{3}{2} \quad \text{y} \quad 2 \leq p \leq +\infty,\ 2 \leq q \leq 6, \tag{6}$$

lo cual claramente, el par $(p, q) = (\infty, \infty)$ no verifica. Dicho de otra manera, esta es una verdadera hipótesis y no existe alguna razón particular para pensar que esta se satisface.

Referencias

[1] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* Universitext, Springer. (2011).

[2] D. Chamorro. *Introduction aux équations de Navier-Stokes.* hal:03487812v2

[3] P.G. Lemarié-Rieusset. *Recent Developments in the Navier-Stokes problem.* Chapman & Hall/CRC. (2002).

[4] P.G. Lemarié-Rieusset. *The Navier-Stokes problem in the 21st century.* Chapman & Hall/CRC. (2016).

[5] J. Robinson. *An introduction to the classical theory of the Navier– Stokes equations.* Lecture notes, IMECC-Unicamp. (2010).

[6] J. Serrin. *On the interior regularity of weak solutions of the Navier–Stokes equations.* Arch. Rat. Mech. Anal., 9:187-195. (1962).

[7] J. Serrin. *The initial value problem for the Navier–Stokes equations.* In Nonlinear Problems (Rudolph E. Langer, ed.), 69–98. Madison: The University of Wisconsin press. (1963).