Ejercicios Lección n°1: Espacios Clásicos de funciones

EPN, agosto 2019

Ejercicio 1 — Multi-índices

1. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función suficientemente regular. Enumerar todas las derivadas que corresponden al conjunto $\{D^\alpha f\}_{1\leq|\alpha|\leq 2}$.

2. Si definimos para todo multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ el factorial $\alpha! = \alpha_1! \times \cdots \times \alpha_n!$, si escribimos $\alpha \leq \beta$ siempre y cuando $\alpha_i \leq \beta_i$ para todo $1 \leq i \leq n$ y si $\alpha \geq \beta$ se tiene $\alpha - \beta = (\alpha_1 - \beta_1, \cdots, \alpha_n - \beta_n)$, entonces escribimos
$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}.$$
Con estas notaciones verificar la fórmula de Leibniz siguiente en donde $\varphi, \phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ son dos funciones regulares:
$$D^\alpha(\varphi\phi) = \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta\varphi \, D^{\alpha-\beta}\phi.$$
[*Indicación*: empezar con $|\alpha| = 1, 2$ y en dimensión $n = 1, 2$.]

Ejercicio 2 — Funciones continuas y diferenciables

1. Dar una función que pertenezca al espacio $\mathcal{C}^0_a(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ pero que no pertenezca al espacio $\mathcal{C}^1_a(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

2. Dar una función que pertenezca al espacio $\mathcal{C}^1_a(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ pero que no pertenezca al espacio $\mathcal{C}^2_a(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Ejercicio 3 — Convergencia puntual

1. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de funciones definida como $f_n(x) = e^{-nx^2}$ con $x \in \mathbb{R}$.
   a) Graficar f_n para n=0,1,2,3.
   b) Mostrar que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente hacia $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x = 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \neq 0 \end{cases}$

2. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de funciones definida como $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{1+nx}$ para todo $x \in [0, +\infty[$.
   a) Graficar f_n para n=0,1,2,3. [*Indicación*: usar el hecho $f_n(\frac{\pi}{2n}) = \frac{1}{1+\frac{\pi}{2}}$]
   b) Mostrar que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente hacia $f(x) = 0$.

Ejercicio 4 — Convergencia uniforme

1. Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ la sucesión de funciones definida como $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n}, x \in [-1, 1]$.
   a) Graficar f_n para n=1,2,3.
   b) Mostrar que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente hacia $f(x) = 0$.

2. Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ la sucesión de funciones definida como $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx^2}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
   a) Graficar f_n para n=1,2,3.
   b) Muestre que (f_n) converge uniformemente a una función f.

Ejercicio 5 — Ejemplo de una función infinitamente derivable a soporte compacto

Consideremos la función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{|x|^2}{1-|x|^2}} & \text{si } |x| < 1, \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$$

1. Graficar la función.
2. Mostrar que la función f pertenece a $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

Indicación: Considerar la función

$$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{t}{1-t}} & \text{si } 0 \leq t \leq 1, \\ 0 & \text{si } t > 1 \end{cases} \end{array}$$

la cual satisface

$$g(t) = e^{-t} K(t-1)$$

con

$$\begin{array}{rccl} K: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & g(x) = \begin{cases} e^{-1/t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0. \end{cases} \end{array}$$

Demostrar por inducción para $n \in \mathbb{N}$ la siguiente igualdad para todo $t > 0$

$$K^{(n)}(t) = P_n\left(\frac{1}{t}\right) K(t),$$

con P_n un polinomio de grado n. Por último, demostrar que $K \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

Ejercicio 6 — Límite de espacios de Banach

1. Para un $k \in \mathbb{N}$ fijo, explicitar las normas de los espacios $\mathcal{C}_a^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ y $\mathcal{C}_a^{k+1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.
2. Recordar las inclusiones entre estos dos espacios. ¿Qué relación se observa al nivel de las normas?
3. Definimos el espacio $\mathcal{C}_a^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ como el límite

$$\mathcal{C}_a^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = \lim_{N \to +\infty} \bigcap_{k=0}^{N} \mathcal{C}_a^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}),$$

   Si mantenemos las normas anteriores, ¿qué fenómeno se observaría sobre el espacio $\mathcal{C}_a^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$?

4. Consideremos ahora, para todo $n \in \mathbb{N}$, las funcionales

$$p_n(\varphi) = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ |\alpha| \leq n}} |D^\alpha \varphi(x)|.$$

   Verificar que las funcionales p_n son semi-normas y construir una métrica a partir de ellas.

5. ¿Qué diferencia hay entre estas semi-normas y las semi-normas dadas en el espacio $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$?

Ejercicio 7 — Convolución

Para dos funciones φ, ϕ del espacio $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ definimos el producto de convolución por la expresión

$$\varphi * \phi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y)\phi(x-y)dy.$$

1. Mostrar que la función $\varphi * \phi$ también pertenece al espacio $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
2. Supongamos que existe una función $\delta \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tal que se tenga la identidad $\varphi * \delta = \varphi$ para toda función $\varphi \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Verificar que en este caso se tendría la expresión
$$\varphi(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y)\delta(-y)dy. \tag{1}$$
3. Considerar la sucesión de funciones $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ definida por
$$\varphi_n(x) = \begin{cases} n^2x+n & \text{si } -\frac{1}{n} \leq x \leq 0, \\ -n^2x+n & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{si } |x| > \frac{1}{n}. \end{cases}$$
Graficar estas funciones φ_n para n=1,2,3 y verificar que para todo $n \geq 1$ se tiene $\varphi_n \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ y $\displaystyle\int_{-1/n}^{1/n} \varphi_n(x)dx = 1$.
4. Utilizando (1) verificar que para todo $n \geq 1$ se tiene la expresión $n = \displaystyle\int_{-1/n}^{1/n} \varphi_n(y)\delta(-y)dy$ y con la ayuda del punto anterior obtener la identidad
$$\int_{-1/n}^{1/n} \varphi_n(y)(n-\delta(-y))dy = 0.$$
5. Como hemos supuesto que se tiene $\delta \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, verificar que existe $n \geq 1$ tal que $n - \delta(-y) > 0$ sobre el intervalo $]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$ y deducir que $\varphi_n(y)(n-\delta(-y)) > 0$.
6. A partir de los dos últimos puntos obtener una contradicción y deducir que no existe ninguna función $\delta \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ que verifique $\varphi * \delta = \varphi$ para todo $\varphi \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Ejercicio 8 — Espacio de funciones Lipschitz *Lip*

Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función tipo Lipschitz. Se define el espacio de funciones Lipschitz $Lip(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ como:

$$Lip(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} : \|f\|_{Lip} < +\infty\}$$

con

$$\|f\|_{Lip} = \|f\|_\infty + \sup_{x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}.$$

Ahora consideremos la función

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & |x|e^{-|x|^2} \end{array}$$

1. En dimensión $n = 1$, graficar la función f.
2. Demostrar que $f \in Lip(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$.
3. Demostrar que $f \in \mathcal{C}_a^0(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$.
4. Demostrar que $f \notin \mathcal{C}_a^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$.
5. Demostrar que $\mathcal{C}_a^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}) \subset Lip(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$.

Ejercicio 9 — Espacio de funciones Hölder $\mathcal{C}_a^\gamma$

En este ejercicio consideraremos el espacio de funciones de tipo Hölder. Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Se define el espacio de funciones Hölder $\mathcal{C}_a^\gamma(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ con $\gamma \in]0,1[$ como:

$$\mathcal{C}_a^\gamma(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} : \|f\|_{\mathcal{C}_a^\gamma} < +\infty, \ \gamma \in]0,1[\right\}$$

con

$$\|f\|_{\mathcal{C}_a^\gamma} = \|f\|_\infty + \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\gamma}.$$

Demostrar las siguientes inclusiones:

1. $Lip(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \subset C_a^\gamma(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.
2. $C_a^\gamma(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \subset C_a^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

Ejercicio 10 — Contraejemplo en la inclusión $\mathcal{C}_a^\gamma(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \subset Lip(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$

El objetivo de este ejercicio es proporcionar un contraejemplo para demostrar que $\mathcal{C}_a^\gamma(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \not\subset Lip(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Para esto consideremos la siguiente función con $\gamma \in]0,1[$,

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & |x|^\gamma e^{-|x|^2}. \end{array}$$

1. Para $n = 1$. Realizar un gráfico de la función con $\gamma = 0{,}5$.
2. Sean $s, t \in \mathbb{R}^n$ tal que $s > t > 0$ y $\gamma \in]0,1[$. Demuestre la siguiente desigualdad:
$$|s^\gamma - t^\gamma| \leq |s-t|^\gamma.$$
3. Utilizando el anterior punto demuestre que $f \in \mathcal{C}_a^\gamma(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.
4. Demuestre que $f \notin Lip(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.
[*Indicación*: Usar reducción al absurdo]

Ejercicio 11 — $\mathcal{C}_a^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \not\subset \mathcal{C}_a^\gamma(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$

Dé una función que pertenezca a $\mathcal{C}_a^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ y que no pertenezca a $\mathcal{C}_a^\gamma(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.