Ejercicios Lección n°2: Espacios L^p, Convolución y Transformada de Fourier EPN, agosto 2019

Ejercicio 1 — L^p no está incluído en L^q (y recíprocamente)

Sean $a, b > 0$ dos parámetros reales. Consideremos la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como:

$$f(x) = \begin{cases} |x|^{-a} & \text{si } |x| \leq 1, \\ |x|^{-b} & \text{si } |x| > 1. \end{cases}$$

Sean $1 \leq p \leq q \leq +\infty$.

1. Para valores fijos de a y b, realizar la gráfica de la función.
2. ¿Qué valores debe tomar a y b para que la función f pertenezca al espacio $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?.
3. ¿Qué valores deben tomar a y b para que la función f pertence al espacio $L^q(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?
4. ¿Qué se puede concluir sobre las relaciones de inclusiones en estos espacios?
5. Generalizar este ejemplo al caso $\mathbb{R}^n$.

Ejercicio 2 — Una desigualdad de interpolación

Sean $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq +\infty$ y sean $f \in L^{p_1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \cap L^{p_2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

1. Mostrar que para todo $1 \leq p \leq +\infty$ tal que $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_1} + \frac{1-\theta}{p_2}$, con $\theta \in [0, 1]$, se tiene la desigualdad
$$\|f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^{p_1}}^{\theta} \|f\|_{L^{p_2}}^{1-\theta}.$$
2. Posicionar p con respecto a p_1 y p_2 en función de los valores de θ.
3. Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, ¿a qué espacios de Lebesgue L^p pertenece?

Ejercicio 3 — Cuestión de soporte y de regularidad

Sobre $\mathbb{R}$ considerar la función $\varphi(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$.

1. Determinar $\varphi * \varphi$ y graficar esta función. ¿Qué sucede con el soporte de esta función?
2. ¿Qué puede decir sobre la regularidad de la función $\varphi * \varphi$?
3. Determinar el soporte de las funciones $f * g$ en los siguientes casos:
   - si $f(x) = \mathbb{1}_{[-2,-1]}(x)$ y $g(x) = \mathbb{1}_{[-4,-3]}(x)$,
   - si $f(x) = \mathbb{1}_{[-2,-1]}(x)$ y $g(x) = \mathbb{1}_{[1,2]}(x)$,
   - si $f(x) = \mathbb{1}_{[-4,-3]}(x)$ y $g(x) = \mathbb{1}_{[1,2]}(x)$,
   - si $f(x) = g(x) = \mathbb{1}_{[-4,-3]}(x)$,
   - si $f(x) = g(x) = \mathbb{1}_{[1,2]}(x)$,
   - si $f(x) = e^{-y}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$ y $g(x) = \mathbb{1}_{[1,2]}(x)$.
4. Sean $f, g, h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones reales definidas por $f(x) = \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$, $g(x) = \mathbb{1}_{[-2,-1]}(x)$ y $h(x) = \mathbb{1}_{[2,3]}(x)$. En cada una de las situaciones a continuación, calcular los productos de convolución y determinar el soporte de la función resultante
   - $f * f$, $g * g$, $h * h$,
   - $f * g$, $g * f$, $f * h$ y $g * h$,
   - $g * (f + h)$, $h * (f + g)$.

Ejercicio 4 — Dos identidades

1. Si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ y si $y \in \mathbb{R}$ es un vector, verificar que se tienen las identidades

$$(f * g)_{\tau_y} = f * g_{\tau_y} = f_{\tau_y} * g.$$

2. Consideremos la función $f(x) = \exp(-\pi x^2)$ definida sobre $\mathbb{R}$.

   a) Calcular la integral $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} dx$.

   b) Calcular $\|f\|_{L^1}$.

   c) Verificar que se tiene

$$\|f * f\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi y^2} e^{-\pi(x-y)^2} dy dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi y^2} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi(x-y)^2} dx \right) dy.$$

   d) Obtener la expresión $\|f * f\|_{L^1} = 1$.

   e) Deducir que se tiene la identidad $\|f * f\|_{L^1} = \|f\|_{L^1} \|f\|_{L^1}$.

Ejercicio 5 — Desigualdades de Young

Sean $f, g, h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, tres funciones medibles.

1. Si $f \in L^{6/5}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $g \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ y $h \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, ¿a qué espacio de Lebesgue pertenece la función $(f * g) * h$? ¿ y la función $f * (g * h)$?

2. Responder a la misma pregunta cuando esta vez se supone que $f \in L^{3/2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $g \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ y $h \in L^{5/6}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

3. Considerar las funciones $f(x) = e^{\alpha x}$ y $f(x) = e^{\beta x}$, definidas sobre todo el espacio $\mathbb{R}$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Mostrar que estas funciones nunca pueden ser convolables: nunca se puede considerar $f * g$ pues en este caso este producto no puede ser correctamente definido.

Ejercicio 6 — Una identidad útil

Sean $f, g, h \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ tres funciones continuas a soporte compacto.

1. Mostrar que se tiene la identidad

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(x) h(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) (\check{g} * h)(x) dx.$$

2. Si ahora se tiene $h \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ y $f \in L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ con $1 < p < +\infty$, ¿a qué espacio de Lebesgue L^q debe pertenecer la función g para que estas expresiones estén bien definidas?
   [*Indicación*: usar las desigualdades de Hölder y de Young.]

Ejercicio 7 — Desigualdad de Hardy

Sea $1 < p < +\infty$ y para $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función medible definimos

$$\widetilde{f}(x) = e^{\frac{x}{p}} f(e^x).$$

Si $f \in L^p(]0, +\infty[)$, definimos para $x > 0$ el operador T por

$$T(f)(x) = \frac{1}{x} \int_x^{+\infty} f(t) dt.$$

1. Verificar que el operador T es un operador lineal.

2. Demostrar que para una función $f \in L^p(]0,+\infty[)$ se tiene la identidad

$$\|f\|_{L^p(]0,+\infty[)} = \|\widetilde{f}\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

3. Sea $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función determinada por

$$g(x) = e^{-\frac{x}{p'}} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x),$$

con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Mostrar que se tiene que $g \in L^1(\mathbb{R})$ y calcular la norma $\|g\|_{L^1}$.

4. Verificar que si $f \in L^p(]0,+\infty[)$, entonces se tiene $\widetilde{Tf} = \widetilde{f} * g$.

5. Deducir que el operador T es un operador lineal continuo del espacio $L^p(]0,+\infty[)$ en $L^p(]0,+\infty[)$ y obtener la desigualdad

$$\|T(f)\|_{L^p(]0,+\infty[)} \leq p' \|f\|_{L^p(]0,+\infty[)}.$$

A esta desigualdad se la conoce como *desigualdad de Hardy.*

Ejercicio 8 — Identidades de convolución

Para todo $1 < p < +\infty$ definimos la función real $f(x) = e^{-p'x^2}$ en donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

1. Calcular la cantidad $\|f\|_{L^p}$.

2. Sea $g(x) = e^{-q'x^2}$ con $1 < q < +\infty$ y $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$. Calcular $f * g$.

3. Mostrar que se tiene la identidad

$$\|f * g\|_{L^r} = C\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q},$$

con $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ y deducir el valor exacto de la constante C.

Ejercicio 9 — Lema de Riemann Lebesgue

1. Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Demuestre que se tiene la estimación

$$\|\hat{f}\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}.$$

2. Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ y sea $\xi \in \mathbb{R}^n$. Demostrar que $|\hat{f}(\xi)| \to 0$ cuando $|\xi| \to +\infty$.

Ejercicio 10 — Propiedades básicas de la transformada de Fourier

Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $x, y \in \mathbb{R}^n$ vectores, $\sigma \in \mathbb{R}$ un escalar, $\alpha \in \mathbb{N}^n$ un multi-índice y $\lambda > 0$ un real. Demostrar las siguientes identidades.

1. $(\widehat{f + \sigma g})(\xi) = \widehat{f}(\xi) + \sigma\widehat{g}(\xi)$.

2. $\widehat{\check{f}}(\xi) = \check{\widehat{f}}(\xi)$.

3. $\widehat{f_{\tau_y}}(\xi) = e^{-2\pi i\xi\cdot y}\widehat{f}(\xi)$.

4. $\widehat{f_\lambda}(\xi) = \lambda^{-n}\widehat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)$.

5. Si f, g son dos funciones que pertenecen al espacio $L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Verificar la identidad

$$\widehat{f * g}(\xi) = \widehat{f}(\xi) \times \widehat{g}(\xi).$$

6. Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ una función suficientemente regular y sea $\alpha \in \mathbb{N}^n$ un multi-índice. Mostrar la identidad

$$\widehat{D^\alpha f}(\xi) = (2\pi i\xi)^\alpha \widehat{f}(\xi).$$

Ejercicio 11 — Cálculo de la transformada de Fourier

Calcular la transformada de Fourier de las siguientes funciones:

1. $f(x) = e^{-ax}, \quad$ con $a > 0, x \geq 0$.
2. $f(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$.
3. $f(x) = e^{-|x|}$.