Ejercicios Lección n°3: Distribuciones

EPN, agosto 2019

Ejercicio 1 — Ejemplo de distribución

Para todo $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, escribimos

$$\langle T, \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x^2}dx - 2\frac{\varphi(0)}{\varepsilon}\right).$$

1. Mostrar que toda función test $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tal que $sop(\varphi)\subset\{|x|\leq M\}$, se puede escribir como

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(0) + x^2\psi(x),$$

   en donde $\psi\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ y $\sup\limits_{|x|\leq M}|\psi(x)|\leq C\sup\limits_{|x|\leq M}|\varphi''(x)|$.

   [*Indicación:* usar la fórmula de Taylor.]

2. Verificar que se tiene

$$\langle T, \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{\varepsilon\leq|x|\leq M}\frac{\varphi(0)}{x^2}dx + \int_{\varepsilon\leq|x|\leq M}\frac{\varphi'(0)}{x}dx + \int_{\varepsilon\leq|x|\leq M}\psi(x)dx - 2\frac{\varphi(0)}{\varepsilon}\right).$$

3. Mostrar que se tiene la identidad

$$\int_{\varepsilon\leq|x|\leq M}\frac{\varphi(0)}{x^2}dx = 2\frac{\varphi(0)}{\varepsilon} - 2\frac{\varphi(0)}{M}.$$

4. Verificar que se tiene

$$\int_{\varepsilon\leq|x|\leq M}\frac{\varphi'(0)}{x}dx = 0.$$

5. Deducir que se tiene la expresión

$$\langle T, \varphi\rangle = \int_{\varepsilon\leq|x|\leq M}\psi(x)dx - 2\frac{\varphi(0)}{M},$$

   y comprobar que T define una distribución.

6. Mostrar que se tiene la identificación $T = Pf\frac{1}{x^2}$.

Ejercicio 2 — Multiplicación

1. Sobre $\mathbb{R}$ considerar la función $g = \mathbb{1}_{[0,1]}$ y dar una función $f\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tal que $f\equiv 0$ sobre el soporte de g. Graficar esta situación.

2. ¿Qué se puede decir sobre el producto puntual $f\times\mathbb{1}_{[0,1]}$?

3. Consideremos ahora $T=\delta_0'$ y $f(x)=x$. Verificar que $f\equiv 0$ sobre el soporte de T y que el producto puntual $f\times T$ está bien definido en el sentido de las distribuciones.

4. ¿Se tiene $f\times T = 0$?

Ejercicio 3 — Derivación

Sobre $\mathbb{R}$ consideramos δ_0 la masa de Dirac.

1. Definimos una distribución por $T = x^3\delta_0^{(2)}$.
   a) Verificar que la distribución T está bien definida.
   b) Mostrar que se tiene $T = 0$.
2. Definimos $S = x\delta_0^{(2)}$.
   a) Verificar que la distribución S está bien definida.
   b) Mostrar que se tiene $S = 2\delta_0^{(1)}$.
3. Definimos $R = x\delta_0^{(1)}$.
   a) Verificar que la distribución R está bien definida.
   b) Mostrar que se tiene $R = -\delta_0$.
4. ¿Qué es lo que cambia en estos tres ejemplos?

Ejercicio 4 — Implicaciones

1. Sobre $\mathbb{R}$, consideremos $T = \delta_0'$ y sea $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tal que $\psi(0) = 1$ sobre una pequeña vecindad del origen. Verificar que se tiene
$$\langle T, \psi\rangle = 0.$$
2. Si $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ es una función test cualquiera, en particular tal que $\varphi'(0) \neq 0$, mostrar que
$$\langle \psi T, \varphi\rangle = -\varphi'(0).$$
3. Concluir que si se tiene la identidad $\langle T, \psi\rangle = 0$, entonces no se tiene (en el sentido de las distribuciones) la identidad $\psi T = 0$.
4. Mostrar en cambio que si se tiene (en el sentido de las distribuciones) la identidad $\psi T = 0$ entonces $\langle T, \psi\rangle = 0$.

Ejercicio 5 — Un límite

Sobre $\mathbb{R}$ y para todo $\varepsilon > 0$ consideramos $T_\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon}{2}|x|^{\varepsilon-1}$.

1. Graficar T_ε para los valores $\varepsilon = 0,5$ y $\varepsilon = 0,1$.
2. Mostrar que para todo $\varepsilon > 0$ se tiene $T_\varepsilon \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.
3. Sea $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ una función test tal que $sop(\varphi) \subset \{|x| \leq M\}$. Mostrar que se tiene
$$\langle T_\varepsilon, \varphi\rangle = \frac{\varepsilon}{2}\int_0^M x^{\varepsilon-1}(\varphi(x) + \varphi(-x))dx$$
[*Indicación*: descomponer el dominio de integración entre $-M, 0$ por un lado y entre 0 y M por otro.]
4. Utilizando la identidad $\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x)$ con $\psi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ y tal que $\sup\limits_{|x|\leq M}|\psi(x)| \leq \sup\limits_{|x|\leq M}|\varphi'(x)|$ (que se deduce por la fórmula de Taylor), obtener la identidad
$$\varphi(x) + \varphi(-x) = 2\varphi(0) + x(\psi(x) - \psi(-x)),$$
y la expresión
$$\langle T_\varepsilon, \varphi\rangle = \varphi(0)\varepsilon\int_0^M x^{\varepsilon-1}dx + \frac{\varepsilon}{2}\int_0^M x^\varepsilon(\psi(x) - \psi(-x))dx \tag{1}$$

5. Verificar que para todo $\varepsilon < 1$ se tiene la estimación
$$\left| \int_0^M x^\varepsilon (\psi(x) - \psi(-x)) dx \right| \leq CM \max\{1, M\} \sup_{|x| \leq M} |\varphi'(x)|$$

6. Mostrar que se tiene el límite
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \langle T_\varepsilon, \varepsilon \rangle = \varphi(0),$$
y deducir que T_ε tiende hacia la masa de Dirac δ_0 en el sentido de las distribuciones.

Ejercicio 6 — Más límites (I)

Sobre $\mathbb{R}$ y para todo $n \geq 1$ considerar las funciones f_n definidas por
$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \geq \frac{1}{n}, \\ n^2 & \text{si } |x| < \frac{1}{n}. \end{cases}$$

1. Graficar estas funciones para $n = 3, 4$.
2. Verificar que para todo $x \neq 0$, las funciones $f_n(x)$ convergen hacia 0 y deducir que $f_n(x)$ converge hacia 0 en casi todas partes.
3. Sea $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ una función test tal que $\varphi(x) = 1$ sobre el conjunto $|x| \leq 1$. Deducir que se tiene
$$\langle f_n, \varphi \rangle = 2n.$$
4. ¿Qué se puede decir sobre la convergencia puntual en casi todas partes cuando se la compara con la convergencia en el sentido de las distribuciones?

Ejercicio 7 — Más límites (II)

Sea $g \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. Si definimos $T_n = ng(nx)cos(\sqrt{n}\, x)$,
   a) Verificar que para todo $n \geq 0$, T_n es una distribución.
   b) En el sentido de las distribuciones calcular el límite $\lim_{n \to +\infty} T_n$.
2. Supongamos ahora que $g \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ y definamos $T_n = ng(nx)cos(n^2\, x)$,
   a) Verificar que para todo $n \geq 0$, T_n es una distribución.
   b) En el sentido de las distribuciones calcular el límite $\lim_{n \to +\infty} T_n$.
   [*Indicación*: realizar una integración por partes.]

Ejercicio 8 — Convolución

1. Calcular, en el sentido de las distribuciones, el producto de convolución entre $T = x^2\delta_0^{(1)}$ y $S = x\delta_0^{(2)}$.
2. Sobre $\mathbb{R}$ consideremos $U = 1$, $T = \delta_0'$ y $W = \mathbb{1}_{[0,+\infty[}$.
   a) ¿Cuál de estas tres distribuciones es a soporte compacto?
   b) Mostrar que en el sentido de las distribuciones se tiene $U * T = 0$.
   c) Verificar que $(U * T) * W = 0$.
   d) Mostrar que en el sentido de las distribuciones se tiene $T * W = \delta_0$.
   e) Verificar que $U * (T * W) = 1$.

   Este ejemplo muestra que no se puede definir el producto de convolución de distribuciones generales sin caer en contradicciones.