



Lección n°1: Espacios de Lorentz e Interpolación.

EPN, verano 2010

1. Espacios de Lorentz

- Son una generalización de los espacios de Lebesgue: miden el “tamaño” de las funciones.
- Muy útiles cuando se trabaja con operadores, es decir en todo el análisis.
- Muchas veces sólo se disponen de estimaciones en donde intervienen los espacios de Lorentz no se puede pasar a estimaciones más fuertes en donde intervienen espacios de Lebesgue.

1.1. Función de distribución

Definición 1 Sea (X, μ) un espacio medido, sea $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ una función medible y sea $\alpha \in [0, +\infty[$ un real. Definimos sobre $[0, +\infty[$ la función de distribución asociada a la función f por

$$d_f(\alpha) = \int_X \mathbb{1}_{\{|f(x)| > \alpha\}}(x) d\mu(x) = \mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}).$$

Proposición 1 Sea (X, μ) un espacio medido y sean $f, g : X \rightarrow \mathbb{K}$ dos funciones medibles. Entonces, para todo $\alpha, \beta \geq 0$ tenemos:

- (1) d_f es decreciente y continua a la derecha sobre $[0, +\infty[$,
- (2) si $|g(x)| \leq |f(x)|$ μ -c.t.p. entonces $d_g(\alpha) \leq d_f(\alpha)$, para todo $\alpha \geq 0$,
- (3) para toda constante $\lambda \in \mathbb{K}^*$, se tiene $d_{\lambda f}(\alpha) = d_f(\alpha/|\lambda|)$, para todo $\alpha \geq 0$,
- (4) $d_{f+g}(\alpha + \beta) \leq d_f(\alpha) + d_g(\beta)$,
- (5) $d_{fg}(\alpha\beta) \leq d_f(\alpha) + d_g(\beta)$.
- (6) si $|f(x)| \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} |f_n(x)|$ μ -c.t.p. entonces $d_f(\alpha) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} d_{f_n}(\alpha)$,

Proposición 2 Sea (X, μ) un espacio medido, sea $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ una función medible y sea $1 \leq p < +\infty$ un parámetro real. Se tiene entonces la identidad

$$\|f\|_{L^p}^p = p \int_0^{+\infty} \alpha^{p-1} d_f(\alpha) d\alpha.$$

Prueba.

$$p \int_0^{+\infty} \alpha^{p-1} d_f(\alpha) d\alpha = p \int_0^{+\infty} \alpha^{p-1} \left(\int_X \mathbb{1}_{\{|f| > \alpha\}}(x) d\mu(x) \right) d\alpha.$$

Aplicamos el teorema de Fubini en la última integral para obtener

$$= p \int_X \int_0^{+\infty} \alpha^{p-1} \mathbb{1}_{\{|f| > \alpha\}}(x) d\alpha d\mu(x) = p \int_X \int_0^{|f(x)|} \alpha^{p-1} d\alpha d\mu(x) = \int_X |f|^p d\mu(x) = \|f\|_{L^p}^p.$$



1.2. Espacios de Lorentz $L^{p,\infty}$

También llamados espacios de *Lebesgue débiles* o espacios de *Marcinkiewicz*.

Definición 2 Sea (X, μ) un espacio medido y sea $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ una función medible.

1) Sea $1 \leq p < +\infty$ un número real, diremos que f pertenece al espacio $L^{p,\infty}(X, \mathbb{K})$ si la cantidad

$$\|f\|_{L^{p,\infty}} = \sup_{\alpha > 0} \left\{ \alpha d_f^{1/p}(\alpha) \right\} = \inf_{C > 0} \left\{ d_f(\alpha) \leq \frac{C^p}{\alpha^p}, \forall \alpha > 0 \right\} \quad \text{es finita.}$$

2) El espacio $L^{\infty,\infty}(X, \mathbb{K})$ es por definición el espacio $L^\infty(X, \mathbb{K})$.

Proposición 3 Sea $1 \leq p < +\infty$ y sea (X, μ) un espacio medido. Entonces tenemos la inclusión:

$$L^p(X, \mathbb{K}) \subset L^{p,\infty}(X, \mathbb{K}).$$

$$\iff \|f\|_{L^{p,\infty}} \leq \|f\|_{L^p}.$$

Esta inclusión es estricta.

Prueba.

■ Sea $\alpha > 0$ un número real, entonces

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^p}^p &= \int_X |f(x)|^p d\mu(x) = \int_{\{|f|>\alpha\}} |f(x)|^p d\mu(x) + \int_{\{|f|\leq\alpha\}} |f(x)|^p d\mu(x) \\ &\geq \int_{\{|f|>\alpha\}} |f(x)|^p d\mu(x) \geq \alpha^p \int_{\{|f|>\alpha\}} d\mu(x) = \alpha^p d_f(\alpha). \end{aligned}$$

Es decir, para todo $\alpha > 0$,

$$\|f\|_{L^p} \geq \alpha d_f^{1/p}(\alpha).$$

■ La inclusión es estricta:

Sea la función $f : x \mapsto |x|^{-n/p}$ definida sobre $X = \mathbb{R}^n$. Se tiene $f \notin L^p(\mathbb{R}^n)$. Pero $\|f\|_{L^{p,\infty}}$ es igual a la raíz p -ésima de la medida de la bola unidad de \mathbb{R}^n , en efecto, un cambio de variable permite ver que

$$d_f^{1/p}(\alpha) = \alpha^{-1} |B(0, 1)|^{1/p}.$$

Luego se tiene $\|f\|_{L^{p,\infty}} = |B(0, 1)|^{1/p}$. ■

Primera utilidad de los espacios de Lorentz:

\implies Permiten mejorar el resultado de interpolación entre los espacios de Lebesgue.

Sabíamos que se tiene la estimación

$$\|f\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^1}^{1/r} \|f\|_{L^\infty}^{1-1/r}$$

para toda función $f \in L^1(X) \cap L^\infty(X)$, con $1 < r < +\infty$.

Con los espacios de Lorentz tenemos algo **mejor**:

Proposición 4 Sean $1 \leq p < q \leq +\infty$ y sea $f \in L^{p,\infty}(X) \cap L^{q,\infty}(X)$, entonces $f \in L^{r,\infty}(X)$ para todo $p < r < q$:

$$\|f\|_{L^r} \leq C(p, q, r) \|f\|_{L^{p,\infty}}^\alpha \|f\|_{L^{q,\infty}}^\beta$$

Prueba.

- Sea $q < +\infty$. Sabemos que

$$d_f(\alpha) \leq \min\left(\frac{\|f\|_{L^{p,\infty}}^p}{\alpha^p}, \frac{\|f\|_{L^{q,\infty}}^q}{\alpha^q}\right)$$

Fijemos $T = \left(\frac{\|f\|_{L^{q,\infty}}^q}{\|f\|_{L^{p,\infty}}^p}\right)^{\frac{1}{q-p}}$ para escribir

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^r}^r &= r \int_0^{+\infty} \alpha^{r-1} d_f(\alpha) d\alpha \leq r \int_0^{+\infty} \alpha^{r-1} \min\left(\frac{\|f\|_{L^{p,\infty}}^p}{\alpha^p}, \frac{\|f\|_{L^{q,\infty}}^q}{\alpha^q}\right) d\alpha \\ &= r \int_0^T \alpha^{r-1-p} \|f\|_{L^{p,\infty}}^p d\alpha + r \int_T^{+\infty} \alpha^{r-1-q} \|f\|_{L^{q,\infty}}^q d\alpha \quad (1) \\ &= \frac{r}{r-p} \|f\|_{L^{p,\infty}}^p T^{r-p} + \frac{r}{q-r} \|f\|_{L^{q,\infty}}^q T^{r-q} \\ &= \left(\frac{r}{r-p} + \frac{r}{q-r}\right) (\|f\|_{L^{p,\infty}}^p)^{\frac{q-r}{q-p}} (\|f\|_{L^{q,\infty}}^q)^{\frac{r-p}{q-p}} \end{aligned}$$

- Sea $q = +\infty$. Como $d_f(\alpha) = 0$ si $\alpha > \|f\|_{L^\infty}$ entonces basta utilizar la estimación $d_f(\alpha) \leq \alpha^{-p} \|f\|_{L^{p,\infty}}^p$ para la parte $\alpha \leq \|f\|_{L^\infty}$ en la integral (1) para obtener

$$\|f\|_{L^r}^r \leq \frac{r}{r-p} \|f\|_{L^{p,\infty}}^p \|f\|_{L^\infty}^{r-p}$$

■

Teorema 1 (Caracterización) Sean $1 < p < +\infty$ y sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible. Entonces $f \in L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$ si y solo si

$$(\forall A > 0) (\exists f_0, f_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}) \text{ t.q. } f(x) = f_0(x) + f_1(x)$$

con $\|f_0\|_{L^{p_0}} \leq C_0 A^{\theta-1}$ y $\|f_1\|_{L^{p_1}} \leq C_0 A^\theta$ con $A > 0$, $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_0} + \frac{1-\theta}{p_1}$, $p_0 < p < p_1$ y $0 < \theta < 1$.

Además se tiene

$$\|f\|_{L^{p,\infty}} = \inf \left\{ C > 0 : f = f_0 + f_1 \text{ con } \|f_0\|_{L^{p_0}} \leq C A^{\theta-1}, \|f_1\|_{L^{p_1}} \leq C A^\theta \right\}$$

Prueba.

(\implies) Sea $f \in L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$. Definimos $f_0 = f \mathbf{1}_{\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > B\}}$ y $f_1 = f \mathbf{1}_{\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| \leq B\}}$ con un cierto $B > 0$. Mostremos que $f_0 \in L^{p_0}$ y que $f_1 \in L^{p_1}$:

- Para f_0 :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |f_0|^{p_0} dx &= \int_{\{|f(x)| > B\}} |f|^{p_0} dx = \sum_{j=0}^{+\infty} \int_{\{2^j B < |f(x)| < 2^{j+1} B\}} |f|^{p_0} dx \leq \sum_{j=0}^{+\infty} (2^{j+1} B)^{p_0} \int_{\{2^j B < |f(x)| < 2^{j+1} B\}} dx \\ &\leq \sum_{j=0}^{+\infty} (2^{j+1} B)^{p_0} d_f(2^j B) \leq \sum_{j=0}^{+\infty} (2^{j+1} B)^{p_0} (2^j B)^{-p} \|f\|_{L^{p,\infty}}^p = B^{p_0-p} C \|f\|_{L^{p,\infty}}^p \end{aligned}$$

la suma anterior converge pues $p_0 < p$ y por lo tanto $f_0 \in L^{p_0}$.

- Para f_1 :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |f_1|^{p_1} dx &= \int_{\{|f(x)| \leq B\}} |f|^{p_1} dx = \sum_{j=0}^{+\infty} \int_{\{2^{-j} B < |f(x)| < 2^{-j+1} B\}} |f|^{p_1} dx \leq \sum_{j=0}^{+\infty} (2^{-j+1} B)^{p_1} \int_{\{2^{-j} B < |f(x)| < 2^{-j+1} B\}} dx \\ &\leq \sum_{j=0}^{+\infty} (2^{-j+1} B)^{p_1} d_f(2^{-j} B) \leq \sum_{j=0}^{+\infty} (2^{-j+1} B)^{p_1} (2^{-j} B)^{-p} \|f\|_{L^{p,\infty}}^p = B^{p_1-p} C \|f\|_{L^{p,\infty}}^p \end{aligned}$$

la suma anterior converge pues $p < p_1$ y por lo tanto $f_1 \in L^{p_1}$.

Reescribimos estas estimaciones de la siguiente forma:

$$\|f_0\|_{L^{p_0}} \leq CB^{1-p/p_0}\|f\|_{L^{p,\infty}}^{p/p_0} = C\|f\|_{L^{p,\infty}} \left(\frac{B}{\|f\|_{L^{p,\infty}}}\right)^{1-p/p_0}$$

$$\|f_1\|_{L^{p_1}} \leq CB^{1-p/p_1}\|f\|_{L^{p,\infty}}^{p/p_1} = C\|f\|_{L^{p,\infty}} \left(\frac{B}{\|f\|_{L^{p,\infty}}}\right)^{1-p/p_1}$$

basta entonces escribir $A = \left(\frac{B}{\|f\|_{L^{p,\infty}}}\right)^{p(1/p_0-1/p_1)}$ y $C_0 = C\|f\|_{L^{p,\infty}}$.

(\Leftarrow) Tenemos la estimación

$$|\{ |f(x)| > \alpha \}| \leq |\{ |f_0(x)| > \alpha/2 \}| + |\{ |f_1(x)| > \alpha/2 \}|$$

Aplicando la desigualdad de Tchebychev y las hipótesis obtenemos

$$\begin{aligned} |\{ |f(x)| > \alpha \}| &\leq \frac{\|f_0\|_{L^{p_0}}^{p_0}}{\alpha^{p_0}} + \frac{\|f_1\|_{L^{p_1}}^{p_1}}{\alpha^{p_1}} \leq \frac{C_0^{p_0} A^{(\theta-1)p_0}}{\alpha^{p_0}} + \frac{C_0^{p_1} A^{\theta p_1}}{\alpha^{p_1}} \\ &\leq \left(\frac{C_0}{\alpha}\right)^p \left[A^{(\theta-1)p_0-p} \left(\frac{C_0}{\alpha}\right)^{p_0-p} + A^{\theta p_1-p} \left(\frac{C_0}{\alpha}\right)^{p_1-p} \right] \end{aligned}$$

Para terminar basta escoger A tal que la cantidad entre corchete anterior siempre sea igual a 1: tenemos entonces que $f \in L^{p,\infty}$. ■

2. Teoremas de interpolación de Marcinkiewicz y de Riesz-Thorin

- es un tipo de resultado **esencial** en el análisis.
- estos teoremas son la fuente de muchas aplicaciones muy útiles.
- son el punto de partida de la teoría de interpolación entre espacios de Banach.

Definición 3 Sea (X, μ) un espacio medido. Definimos $L^{p_0}(X) + L^{p_1}(X)$ como el espacio de todas las funciones f tales que $f = f_0 + f_1$ en donde $f_0 \in L^{p_0}(X)$ y $f_1 \in L^{p_1}(X)$.

Proposición 5 Sea (X, μ) un espacio medido. Si $p_0 < p_1$ se tiene $L^p(X) \subset L^{p_0}(X) + L^{p_1}(X)$ para todo p tal que $p_0 < p < p_1$.

Prueba. Sea f una función de $L^p(X)$ y sea γ una constante positiva fijada. Escribimos

$$f_0(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| > \gamma \\ 0 & \text{si } |f(x)| \leq \gamma \end{cases} \quad f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| \leq \gamma \\ 0 & \text{si } |f(x)| > \gamma \end{cases}$$

de manera que $f = f_0 + f_1$.

Puesto que $p_0 - p \leq 0$ se tiene

$$\int_X |f_0(x)|^{p_0} d\mu(x) = \int_X |f_0(x)|^p |f_0(x)|^{p_0-p} d\mu(x) \leq \gamma^{p_0-p} \int_X |f(x)|^p d\mu(x)$$

De forma similar tenemos

$$\int_X |f_1(x)|^{p_1} d\mu(x) = \int_X |f_1(x)|^p |f_1(x)|^{p_1-p} d\mu(x) \leq \gamma^{p_1-p} \int_X |f(x)|^p d\mu(x),$$

luego $f_0 \in L^{p_0}(X)$ y $f_1 \in L^{p_1}(X)$. ■

2.1. Interpolación de Marcinkiewicz

Un operador sublineal verifica $T(\alpha f + \beta g) \leq \alpha T(f) + \beta T(g)$.

Teorema 2 Sean (X, μ) y (Y, ν) dos espacios medidos. Sea $1 \leq p_0 < p_1 \leq +\infty$. Sea T un operador sublineal definido en el espacio $L^{p_0}(X) + L^{p_1}(X)$ y que toma valores en el espacio de funciones medibles definidas sobre Y .

Supongamos que existen dos constantes positivas A_0 y A_1 tales que:

$$\|T(f)\|_{L^{p_0, \infty}(Y)} \leq A_0 \|f\|_{L^{p_0}(X)}, \quad \text{para toda función } f \in L^{p_0}(X), \quad (2)$$

$$\|T(f)\|_{L^{p_1, \infty}(Y)} \leq A_1 \|f\|_{L^{p_1}(X)}, \quad \text{para toda función } f \in L^{p_1}(X). \quad (3)$$

Entonces, para todo $p_0 < p < p_1$ y para todo $f \in L^p(X)$, tenemos la estimación:

$$\|T(f)\|_{L^p(Y)} \leq A \|f\|_{L^p(X)}, \quad (4)$$

en donde

$$A = 2 \left(\frac{p}{p-p_0} + \frac{p}{p_1-p} \right)^{\frac{1}{p}} A_0^{\frac{1/p-1/p_1}{1/p_0-1/p_1}} A_1^{\frac{1/p_0-1/p}{1/p_0-1/p_1}}. \quad (5)$$

Demostración.

- Supongamos que $p_1 < +\infty$ y fijemos una función $f \in L^p(X)$ y un parámetro $\alpha > 0$. Utilizamos la descomposición anterior de la función f escribiendo $f = f_0^\alpha + f_1^\alpha$ en donde

$$f_0^\alpha(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| > \delta\alpha \\ 0 & \text{si } |f(x)| \leq \delta\alpha \end{cases} \quad f_1^\alpha(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| \leq \delta\alpha \\ 0 & \text{si } |f(x)| > \delta\alpha. \end{cases}$$

Aquí δ es un parámetro positivo cuyo valor será determinado posteriormente. Obsérvese que f_0^α pertenece al espacio $L^{p_0}(X)$ y que f_1^α pertenece al espacio $L^{p_1}(X)$.

Utilizemos la hipótesis de sublinealidad para obtener

$$|T(f)| = |T(f_0^\alpha + f_1^\alpha)| \leq |T(f_0^\alpha)| + |T(f_1^\alpha)|,$$

lo que implica las inclusiones

$$\{x : |T(f)(x)| > \alpha\} \subseteq \{x : |T(f_0^\alpha)| > \alpha/2\} \cup \{x : |T(f_1^\alpha)| > \alpha/2\},$$

de donde se tiene, al nivel de las funciones de distribución

$$d_{T(f)}(\alpha) \leq d_{T(f_0^\alpha)}(\alpha/2) + d_{T(f_1^\alpha)}(\alpha/2). \quad (6)$$

Esta estimación anterior, junto con a las hipótesis (2) y (3), nos da

$$d_{T(f)}(\alpha) \leq \frac{A_0^{p_0}}{(\alpha/2)^{p_0}} \int_{\{|f|>\delta\alpha\}} |f(x)|^{p_0} d\mu(x) + \frac{A_1^{p_1}}{(\alpha/2)^{p_1}} \int_{\{|f|\leq\delta\alpha\}} |f(x)|^{p_1} d\mu(x)$$

Ahora vamos a contruir la norma L^p de $T(f)$ utilizando la proposición 2, en efecto:

$$\begin{aligned} \|T(f)\|_{L^p}^p &= p \int_0^{+\infty} \alpha^{p-1} d_{T(f)}(\alpha) d\alpha \leq (2A_0)^{p_0} p \int_0^{+\infty} \alpha^{p-p_0-1} \int_{\{|f|>\delta\alpha\}} |f(x)|^{p_0} d\mu(x) d\alpha \\ &\quad + (2A_1)^{p_1} p \int_0^{+\infty} \alpha^{p-p_1-1} \int_{\{|f|\leq\delta\alpha\}} |f(x)|^{p_1} d\mu(x) d\alpha. \end{aligned}$$

Aplicamos el teorema de Fubini para obtener

$$\|T(f)\|_{L^p}^p \leq (2A_0)^{p_0} p \int_X |f(x)|^{p_0} \int_0^{|f|/\delta} \alpha^{p-p_0-1} d\alpha d\mu(x) + (2A_1)^{p_1} p \int_X |f(x)|^{p_1} \int_{|f|/\delta}^{+\infty} \alpha^{p-p_1-1} d\alpha d\mu(x),$$

es decir

$$\|T(f)\|_{L^p}^p \leq (2A_0)^{p_0} \frac{p}{p-p_0} \int_X |f(x)|^{p_0} \frac{|f(x)|^{p-p_0}}{\delta^{p-p_0}} d\mu(x) + (2A_1)^{p_1} \frac{p}{p_1-p} \int_X |f(x)|^{p_1} \frac{|f(x)|^{p-p_1}}{\delta^{p-p_1}} d\mu(x).$$

De donde se obtiene

$$\|T(f)\|_{L^p}^p \leq \left[(2A_0)^{p_0} \frac{p}{p-p_0} \delta^{p_0-p} + (2A_1)^{p_1} \frac{p}{p_1-p} \delta^{p_1-p} \right] \|f\|_{L^p}^p.$$

Falta ahora fijar un valor de δ para terminar la prueba; para ello es suficiente escribir $\delta = 2A_0^{\frac{p_0}{p_1-p_0}} A_1^{\frac{p_1}{p_0-p_1}}$. El lector verificará sin problema que se tiene la estimación deseada.

- Caso cuando $p_1 = +\infty$. Escribamos otra vez $f = f_0^\alpha + f_1^\alpha$ con

$$f_0^\alpha(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| > \gamma\alpha \\ 0 & \text{si } |f(x)| \leq \gamma\alpha \end{cases} \quad f_1^\alpha(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| \leq \gamma\alpha \\ 0 & \text{si } |f(x)| > \gamma\alpha. \end{cases}$$

Tenemos las estimaciones siguientes

$$\|T(f_1^\alpha)\|_{L^\infty} \leq A_1 \|f_1^\alpha\|_{L^\infty} \leq A_1 \gamma\alpha = \alpha/2$$

siempre y cuando fijemos $\gamma = \frac{1}{2A_1}$. Se deduce de esto que el conjunto $\{x : |T(f_1^\alpha)| > \alpha/2\}$ es de medida cero; por lo tanto

$$d_{T(f)}(\alpha) \leq d_{T(f_0^\alpha)}(\alpha/2).$$

Se construye otra vez la norma L^p de $T(f)$ utilizando la proposición 2:

$$\|T(f)\|_{L^p}^p \leq p \int_0^{+\infty} \alpha^{p-1} d_{T(f_0^\alpha)}(\alpha/2) d\alpha.$$

Aplicando el teorema de Fubini se tiene

$$\leq (2A_0)^{p_0} p \int_X |f(x)|^{p_0} \int_0^{2A_1|f|} \alpha^{p-p_0-1} d\alpha d\mu(x).$$

Es decir

$$\leq (2A_0)^{p_0} \frac{p}{p-p_0} \int_X |f(x)|^{p_0} |f(x)|^{p-p_0} (2A_1)^{p-p_0} d\mu(x).$$

de donde concluimos que

$$\|T(f)\|_{L^p}^p \leq 2^p A_0^{p_0} A_1^{p-p_0} \frac{p}{p-p_0} \|f\|_{L^p}^p$$

lo que termina la prueba. ■

2.2. Aplicación: Funciones Maximales

- Funciones de gran importancia en el análisis armónico: una herramienta indispensable
- Ejemplo de operadores que **no** son acotados en L^1 en L^1 : ilustración de la necesidad de los espacios de Lorentz

Definición 4 Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función localmente integrable. Definimos el promedio de f sobre la bola $B = B(x, r)$ como

$$m_B(f)(x) = \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} f(y) dy$$

Definición 5 (función maximal centrada) Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible. La función maximal centrada de Hardy-Littlewood es:

$$\mathcal{M}(f)(x) = \sup_{r>0} m_B(|f|)(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{v_n r^n} \int_{\{|y|<r\}} |f(x-y)| dy$$

Definición 6 (función maximal no centrada) Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible. La función maximal no centrada de Hardy-Littlewood es:

$$\mathfrak{M}(f)(x) = \sup_{\delta>0; |x-y|<\delta} m_{B(y, \delta)}(|f|)(x)$$

Teorema 3 (Control sobre funciones maximales) Sea $\varphi \geq 0$ una función continua y decreciente definida sobre $[0, +\infty[$. Si $\Phi(x) = \varphi(|x|)$ es una función integrable sobre \mathbb{R}^n entonces, para toda función f localmente integrable sobre \mathbb{R}^n , se tiene la estimación

$$\sup_{\varepsilon>0} (|f| * \Phi_\varepsilon)(x) \leq \|\Phi\|_{L^1} \mathcal{M}(f)(x)$$

en donde hemos notado $\Phi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \Phi(\varepsilon^{-1}x)$.

Observación 1

- El operador \mathcal{M} nunca está en $L^1(\mathbb{R}^n)$ si $f \neq 0$.
- Se tiene $\mathcal{M}(f) \leq \mathfrak{M}(f)$.

Teorema 4 Las funciones maximales \mathcal{M} y \mathfrak{M} son operadores acotados:

- de $L^1(\mathbb{R}^n)$ en $L^{1, \infty}(\mathbb{R}^n)$
- de $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ en $L^\infty(\mathbb{R}^n)$
- de $L^p(\mathbb{R}^n)$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$ para todo $1 < p < +\infty$

Demostración.

- de $L^1(\mathbb{R}^n)$ en $L^{1, \infty}(\mathbb{R}^n)$: Dado que $\mathcal{M}(f) \leq \mathfrak{M}(f)$, se tiene la inclusión de conjuntos

$$\{x \in \mathbb{R}^n : |\mathcal{M}(f)(x)| > \alpha\} \subset \{x \in \mathbb{R}^n : |\mathfrak{M}(f)(x)| > \alpha\}.$$

Como $\mathfrak{M}(f)$ es el supremo de funciones continuas, se tiene que $\mathfrak{M}(f)$ es semi-continua inferiormente y el conjunto

$$E_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : |\mathfrak{M}(f)(x)| > \alpha\}$$

es abierto. Sea K un compacto de E_α , entonces para todo $x \in K$ existe una bola B_x tal que:

$$\int_{B_x} |f(y)| dy > \alpha |B_x|$$

Por compacidad de K existe un recubrimiento finito $\{B_{x,1}, \dots, B_{x,k}\}$ de K .

Lema 1 (Teorema de recubrimiento) Sea $\{B_1, \dots, B_k\}$ una familia finita de bolas abiertas de \mathbb{R}^n . Existe entonces una subcolección finita $\{B_{j,1}, \dots, B_{j,l}\}$ formada por bolas disjuntas tales que

$$\left| \bigcup_{i=1}^l B_{j,i} \right| \geq 3^{-n} \left| \bigcup_{i=1}^k B_i \right|$$

Aplicamos este lema a la familia de bolas $\{B_{x,1}, \dots, B_{x,k}\}$ para obtener

$$|K| \leq \sum_{i=1}^k |B_{x,i}| \leq 3^n \sum_{i=1}^l |B_{x,j_i}| \leq \frac{3^n}{\alpha} \sum_{i=1}^l \int_{B_{x,j_i}} |f(y)| dy \leq \frac{3^n}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| dy$$

Tomando el supremo de todos los compactos contenidos en E_α obtenemos

$$\alpha |E_\alpha| \leq 3^n \|f\|_{L^1}$$

de donde se deduce

$$\|\mathcal{M}(f)\|_{L^{1,\infty}} \leq \|\mathfrak{M}(f)\|_{L^{1,\infty}} \leq 3^n \|f\|_{L^1}.$$

- de $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ en $L^\infty(\mathbb{R}^n)$:

Se tiene inmediatamente $\|\mathcal{M}(f)\|_{L^\infty} \leq \|\mathfrak{M}(f)\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^\infty}$.

- de $L^p(\mathbb{R}^n)$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$ para todo $1 < p < +\infty$:

Aquí se aplica el teorema de interpolación de Marcinkiewicz!

■

2.3. Interpolación de Riesz-Thorin

Teorema 5 Sean (X, μ) y (Y, ν) dos espacios medidos. Sea T un operador lineal definido sobre el conjunto de todas las funciones simples $f : X \rightarrow Y$. Sean $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq +\infty$. Si se tiene

$$\begin{aligned} \|T(f)\|_{L^{q_0}(Y)} &\leq M_0 \|f\|_{L^{p_0}(X)}, \\ \|T(f)\|_{L^{q_1}(Y)} &\leq M_1 \|f\|_{L^{p_1}(X)}, \end{aligned}$$

para toda función simple f sobre X , entonces, para todo $0 < \theta < 1$ se tiene

$$\|T(f)\|_{L^q(Y)} \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta \|f\|_{L^p(X)}$$

para todas las funciones simples de X en donde $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ y $\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$.

Por densidad de las funciones simples, T posee una única extensión acotada de $L^p(X)$ en $L^q(Y)$.

Demostración. Sea

$$f = \sum_{k=1}^m a_k e^{i\alpha_k} \mathbb{1}_{A_k}$$

una función simple sobre X en donde $a_k > 0$, $\alpha_k \in \mathbb{R}$ y A_k son subconjuntos disjuntos de X de medida finita.

Por dualidad, necesitamos controlar la cantidad

$$\|T(f)\|_{L^{q'}(Y)} = \sup \left| \int_Y T(f)(x)g(x)d\nu(x) \right|$$

en donde el supremo toma en cuenta todas las funciones simples $g \in L^{q'}(Y)$ tales que $\|g\|_{L^{q'}(Y)} \leq 1$. Escribimos entonces

$$g = \sum_{j=1}^n b_j e^{i\beta_j} \mathbf{1}_{B_j}$$

en donde $\beta_j > 0$, $\beta_j \in \mathbb{R}$ y B_j son subconjuntos disjuntos de Y de medida finita.

Definimos ahora las cantidades

$$P(z) = \frac{p}{p_0}(1-z) + \frac{p}{p_1}z \quad \text{y} \quad Q(z) = \frac{q'}{q'_0}(1-z) + \frac{q'}{q'_1}z.$$

Para $z \in \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \Re(z) \leq 1\}$ definimos

$$F(z) = \int_Y T(f_z)(x)g_z(x)d\nu(x)$$

en donde

$$f_z = \sum_{k=1}^m a_k^{P(z)} e^{i\alpha_k} \mathbf{1}_{A_k} \quad \text{y} \quad g_z = \sum_{j=1}^n b_j^{Q(z)} e^{i\beta_j} \mathbf{1}_{B_j}.$$

Por linealidad se tiene

$$F(z) = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n a_k^{P(z)} b_j^{Q(z)} e^{i\alpha_k} e^{i\beta_j} \int_Y T(\mathbf{1}_{A_k})(x) \mathbf{1}_{B_j}(x) d\nu(x)$$

notar que F es analítica en z puesto que $a_k, b_j > 0$.

- Sea ahora z tal que $\Re(z) = 0$. Dado que los conjuntos A_k son disjuntos y que $|a_k^{P(z)}| = a_k^{p/p_0}$ tenemos $\|f_z\|_{L^{p_0}}^{p_0} = \|f\|_{L^p}^p$. Simétricamente como se tiene $|b_j^{Q(z)}| = b_j^{q'/q'_0}$, podemos escribir $\|g_z\|_{L^{q'_0}}^{q'_0} = \|g\|_{L^{q'}}^{q'}$.
- Si z es tal que $\Re(z) = 1$, por las mismas razones tenemos $\|f_z\|_{L^{p_1}}^{p_1} = \|f\|_{L^p}^p$ y $\|g_z\|_{L^{q'_1}}^{q'_1} = \|g\|_{L^{q'}}^{q'}$.

Utilizando la desigualdad de Hölder y la hipótesis tenemos cuando $\Re(z) = 0$:

$$|F(z)| \leq \|T(f_z)\|_{L^{q_0}} \|g_z\|_{L^{q'_0}} \leq M_0 \|f_z\|_{L^{p_0}} \|g_z\|_{L^{q'_0}} = M_0 \|f\|_{L^p}^{p/p_0} \|g\|_{L^{q'}}^{q'/q'_0}$$

Cuando $\Re(z) = 1$ se tiene:

$$|F(z)| \leq M_1 \|f\|_{L^p}^{p/p_1} \|g\|_{L^{q'}}^{q'/q'_1}.$$

Necesitaremos el lema siguiente:

Lema 2 (de las tres líneas de Hadamard) *Sea F una función analítica sobre la banda abierta*

$$B = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \Re(z) < 1\}$$

que es continua y acotada sobre \bar{B} y tal que

- $|F(z)| \leq B_0$ cuando $\Re(z) = 0$
- $|F(z)| \leq B_1$ cuando $\Re(z) = 1$

con $0 < B_0, B_1 < +\infty$. Entonces se tiene $|F(z)| \leq B_0^{1-\theta} B_1^\theta$ si $\Re(z) = \theta$, con $0 \leq \theta \leq 1$.

Suponiendo este lema podemos escribir directamente, cuando $\Re(z) = \theta$:

$$|F(z)| \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{q'}}$$

Para terminar notamos que $P(\theta) = Q(\theta) = 1$ y entonces

$$F(\theta) = \int_Y T(f)g d\nu.$$

Podemos concluir tomando el supremo sobre todas las funciones simples g definidas sobre Y a valores en $L^{q'}$ de norma $\|g\|_{L^{q'}(Y)} \leq 1$. ■

2.4. Aplicación: Desigualdad de Young

Teorema 6 Sea $1 \leq p, q, r \leq +\infty$ tal que $1 + \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r}$. Entonces, para todo $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y todo $g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ se tiene

$$\|f * g\|_{L^q} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^r}.$$

- Sea $g \in L^r$ y definamos $T(f) = f * g$.

⇒ Nótese que $T : L^1 \rightarrow L^r$ con norma mayorada por $\|g\|_{L^r}$:

$$\|T(f)\|_{L^r} = \|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^r} \quad (\text{desigualdad de Minkowski continua})$$

⇒ que $T : L^{r'} \rightarrow L^\infty$ con norma mayorada por $\|g\|_{L^r}$:

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy \right| \leq \|f\|_{L^{r'}} \|g\|_{L^r} \implies \|T(f)\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^{r'}} \|g\|_{L^r}$$

- Entonces una aplicación directa del teorema de Riesz-Thorin nos da que T envía L^p en L^q con norma mayorada por

$$\|g\|_{L^r}^\theta \|g\|_{L^r}^{1-\theta} = \|g\|_{L^r}$$

con $1/p = 1 - \theta + \theta/r'$ y $1/q = (1 - \theta)/r + \theta/\infty$; es decir:

$$\|f * g\|_{L^q} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^r}.$$

■