Lección n°2: Teoría y Descomposiciones de Littlewood-Paley.

EPN, verano 2010

1. Teoría de Littlewood-Paley

- Las funciones cuya transformada de Fourier es de soporte acotado tienen buenísimas propiedades
- Es útil "recortar" las funciones en el nivel de Fourier para usar estas propiedades

1.1. Desigualdades de Bernstein

Explican las relaciones existentes entre el soporte en Fourier de una función, su regularidad y su norma L^p:

Teorema 1 *Sean $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, R_1, R_2 dos reales fijos tales que $0 < R_1 < R_2$ y sea $\lambda > 0$ un real.*

1) Si sop$(\widehat{f}) \subset B(0, \lambda R_1)$, entonces existe una constante $C > 0$ para todo entero k y para todo p, q con $1 \leq p \leq q \leq +\infty$, tal que:

$$\sup_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha f\|_{L^q} \leq C^k \lambda^{k+n(1/p-1/q)} \|f\|_{L^p}. \tag{1}$$

2) Si sop$(\widehat{f}) \subset \mathcal{C}(0, \lambda R_1, \lambda R_2)$, entonces existen dos constantes $C_1, C_2 > 0$ para todo entero k y para todo p, q con $1 \leq p \leq q \leq +\infty$, tal que:

$$C_1^{-k} \lambda^k \|f\|_{L^p} \leq \sup_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha f\|_{L^p} \leq C_2^k \lambda^k \|f\|_{L^p}. \tag{2}$$

Prueba.

Si reemplazamos la función f por $f_\lambda = \delta_\lambda[f] = f(\lambda x_1, ..., \lambda x_n)$, obtenemos

$$\sup_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha f_\lambda\|_{L^q} = \lambda^{k-n/q} \sup_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha f\|_{L^q} \quad \text{y} \quad \|f_\lambda\|_{L^p} = \lambda^{-n/p} \|f\|_{L^p}$$

$\Longrightarrow$ basta considerar $\lambda = 1$.

1) Sea $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ t.q. $\varphi(\xi) = 1$ sobre la bola $B(0, R_1)$ y notamos $\widehat{g}(\xi) = \varphi(\xi)$. Tenemos $\widehat{f}(\xi) = \widehat{g}(\xi)\widehat{f}(\xi)$ y pasando a la transformada de Fourier inversa obtenemos $f(x) = g * f(x)$.

Estudiemos $\|\partial^\alpha f\|_{L^q}$. Por las propiedades del producto de convolución se tiene con Young

$$\|\partial^\alpha f\|_{L^q} = \|f * \partial^\alpha g\|_{L^q} \leq \|f\|_{L^p} \|\partial^\alpha g\|_{L^r} \tag{3}$$

Utilizando las desigualdades de interpolación obtenemos que

$$\|\partial^\alpha g\|_{L^r} \leq \|\partial^\alpha g\|_{L^1}^{1/r} \|\partial^\alpha g\|_{L^\infty}^{1-1/r} \leq \|\partial^\alpha g\|_{L^1} + \|\partial^\alpha g\|_{L^\infty}. \tag{4}$$

Sabemos que $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, de manera que $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ y por las propiedades de las funciones de la classe de Schwartz tenemos que $\|\partial^\alpha g\|_{L^1} \leq C \|\partial^\alpha g\|_{L^\infty}$. Además, por definición de transformada de Fourier inversa tenemos

$$\|\partial^\alpha g\|_{L^\infty} \leq \|\xi^\alpha \varphi\|_{L^1} \leq R_1^\alpha \|\varphi\|_{L^1} = C R_1^\alpha \leq C^k$$

2) Por la primera parte, basta verificar $C_1^{-k}\|f\|_{L^p} \leq \sup_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha f\|_{L^p}$. Consideramos la función $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ tal que $\psi(\xi) = 1$ sobre la corona $\mathcal{C}(0, R_1, R_2)$ y definimos una nueva función g_α como

$$\widehat{g_\alpha}(\xi) = (-i\xi)^\alpha |\xi|^{-2k}\psi(\xi), \quad \text{de manera que } g_\alpha \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}).$$

Dado que $\sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!}(-i\xi)^\alpha(i\xi)^\alpha = |\xi|^{2k}$, podemos escribir

$$\widehat{f}(\xi) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!}\widehat{g_\alpha}(\xi)(i\xi)^\alpha \widehat{f}(\xi).$$

Pasando a la transformada de Fourier inversa obtenemos $f(x) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!}\ g_\alpha * (\partial^\alpha f)(x)$. Calculamos ahora la norma L^p de esta identidad + Young:

$$\|f\|_{L^p} = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!}\ \|g_\alpha\|_{L^1}\|\partial^\alpha f\|_{L^p} \leq C_1^k \sup_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha f\|_{L^p}.$$

■

1.2. Partición de la unidad

$\Longrightarrow$ <u>**idea**</u>: hacer cortes diádicos en el nivel de Fourier.

- **Primera familia de funciones:**
  Sea $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ t.q.

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |\xi| \leq 1/2 \\ 0 & \text{si} \quad |\xi| > 1. \end{cases} \tag{5}$$

  $\Longrightarrow$ el soporte de $\widehat{\varphi}$ está contenido en la bola $\{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq 1\}$.

  Para todo $j \in \mathbb{N}$ definimos las funciones dilatadas φ_j de esta forma:

$$\widehat{\varphi}_j(\xi) = \widehat{\varphi}(2^{-j}\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |\xi| \leq 2^{j-1} \\ 0 & \text{si} \quad |\xi| > 2^j. \end{cases}$$

  $\Longrightarrow$ el soporte de $\widehat{\varphi}_j$ está contenido en las bolas de radio diádico $\{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq 2^j\}$.

- **Segunda familia de funciones:**
  Definimos ψ como

$$\widehat{\psi}(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi/2) - \widehat{\varphi}(\xi). \tag{6}$$

  Luego, para todo $j \in \mathbb{Z}$ escribimos

$$\widehat{\psi}_j(\xi) = \widehat{\psi}(2^{-j}\xi) = \widehat{\varphi}_{j+1}(\xi) - \widehat{\varphi}_j(\xi).$$

  $\Longrightarrow$ el soporte de estas funciones está contenido en las coronas diádicas

$$\mathcal{C}(0, 2^{j-1}, 2^j) = \{\xi \in \mathbb{R}^n : 2^{j-1} \leq |\xi| \leq 2^{j+1}\}.$$

Observación 1 Nótese que todas las funciones $\widehat{\varphi}_j$ y $\widehat{\psi}_j$ pertenecen al espacio $\mathcal{C}_0^\infty$ que es un subconjunto de $\mathcal{S}$. Dado que la transformada de Fourier es una biyección en $\mathcal{S}$, obtenemos que todas las funciones φ_j y ψ_j pertenecen a la clase de Schwartz $\mathcal{S}$.

A partir de estas familias de funciones obtenemos algunos resultados interesantes que serán fundamentales para explicar las propiedades de los bloques diádicos.

Teorema 2 *Sea φ la función de base fijada en (5). Entonces*

1) *Para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$, se tiene la identidad*

$$\widehat{\varphi}_j(\xi) = \widehat{\varphi}_0(\xi) + \sum_{k=0}^{j-1} \widehat{\psi}_k(\xi)$$

2) *Tenemos el límite*

$$\lim_{j \to +\infty} \widehat{\varphi}_j(\xi) \equiv 1$$

3) *Se tiene la identidad siguiente*

$$\widehat{\varphi}_0(\xi) + \sum_{j=0}^{+\infty} \widehat{\psi}_j(\xi) \equiv 1 \tag{7}$$

Prueba. Moralmente, basta usar las definiciones de φ_j y de ψ_j: en efecto, el primer punto es inmediato. El tercero es una consecuencia del segundo pues se tiene

$$\widehat{\varphi}_0(\xi) + \sum_{j=0}^{+\infty} \widehat{\psi}_j(\xi) = \lim_{j \to +\infty} \left(\widehat{\varphi}_0(\xi) + \sum_{k=0}^{j-1} \widehat{\psi}_k(\xi) \right) = \lim_{j \to +\infty} \widehat{\varphi}_j(\xi) \equiv 1.$$

Para el segundo punto hacer un dibujo.

■

Este resultado explica lo que sucede cuando $j \longrightarrow +\infty$, es decir en las grandes frecuencias. El resultado a continuación muestra qué pasa cuando $j \longrightarrow 0$ con las pequeñas frecuencias.

Proposición 1 *Sea φ la función de base fijada en (5). Entonces*

1) *Para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ tal que $\xi \neq 0$*

$$\widehat{\varphi}_j(\xi) = \sum_{k \leq j-1} \widehat{\psi}_k(\xi)$$

2) *Se tiene la identidad siguiente para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ tal que $\xi \neq 0$*

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \widehat{\psi}_j(\xi) \equiv 1 \tag{8}$$

Cuidado! Las dos identidades precedentes son **falsas** cuando $\xi = 0$ pues se tiene por un lado $\widehat{\psi}_j(0) = 0$ para todo j, pero por otro lado se tiene $\widehat{\varphi}_j(0) = 1$.

Prueba. Estas dos propiedades se deducen directamente de las definiciones de las funciones φ_j y ψ_j.

■

Proposición 2

- *Para todo $j \in \mathbb{Z}$ se tiene la identidad*
$$\|\varphi_j\|_{L^1} = \|\varphi\|_{L^1}$$
- *Para todo $j \in \mathbb{Z}$, las funciones ψ_j tienen un momento nulo:*
$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi_j(x)dx = 0.$$

Prueba.

- Para el primer punto basta observar que se tiene la identidad
$$\varphi_j(x) = 2^{-jn}\varphi(2^{-j}x),$$
un simple cambio de variable muestra entonces que se tiene el resultado deseado.
- Para el segundo escribimos:
$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \psi_j(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_{j+1}(x) - \varphi_j(x)dx \\ &= 2^{-(j+1)n}\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(2^{-(j+1)}x)dx - 2^{-jn}\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(2^{-j}x)dx\end{aligned}$$
Con un cambio de variable obtenemos
$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi_j(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)dx - \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)dx = 0.$$

■

1.3. Bloques diádicos

- A partir de las funciones φ_j y ψ_j que acabamos de considerar es posible determinar operadores utilizando el producto de convolución.
- Estos productos de convolución están bien definidos para distribuciones temperadas pues las funciones φ_j y ψ_j son elementos de la clase de Schwartz.

Definición 1 (Operadores de Littlewood-Paley) *Sea $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Para todo $j \in \mathbb{Z}$ definimos*

- *los* operadores de Littlewood-Paley S_j *por* $S_j(f) = f * \varphi_j$.
- *los* Bloques diádicos Δ_j *por* $\Delta_j(f) = f * \psi_j$.

Al nivel de Fourier tenemos
$$\begin{aligned}\widehat{S_j(f)}(\xi) &= \widehat{f}(\xi)\widehat{\varphi}_j(\xi) \\ \widehat{\Delta_j(f)}(\xi) &= \widehat{f}(\xi)\widehat{\psi}_j(\xi)\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ los operadores S_j y Δ_j son operadores de truncatura en Fourier:
$$\begin{aligned}sop(\widehat{S_j(f)}) &\subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq 2^j\} \\ sop(\widehat{\Delta_j(f)}) &\subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : 2^{j-1} \leq |\xi| \leq 2^{j+1}\}.\end{aligned}$$

De esta forma se realiza, al nivel de Fourier, un "corte" diádico en el soporte de las funciones. Pues cada uno de estos operadores está bien localizado en Fourier: su soporte está totalmente controlado.

Veamos un primer resultado:

Proposición 3 *Para toda distribución temperada $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ se tiene*

$$S_j(f) = S_0(f) + \sum_{k=0}^{j-1} \Delta_j(f)$$

Prueba. Pasar en Fourier y usar el teorema 2. En efecto:

$$\begin{aligned}
\widehat{S_0(f)} + \sum_{k=0}^{j-1} \widehat{\Delta_j(f)} &= \widehat{f}(\xi)\widehat{\varphi}_0(\xi) + \sum_{k=0}^{j-1} \widehat{f}(\xi)\widehat{\psi}_k(\xi) \\
&= \widehat{f}(\xi)\left(\widehat{\varphi}_0(\xi) + \sum_{k=0}^{j-1} \widehat{\psi}_k(\xi)\right) \\
&= \widehat{f}(\xi)\widehat{\varphi}_j(\xi) \\
&= \widehat{S_j(f)}
\end{aligned}$$

de donde se deduce la identidad deseada.

$\blacksquare$

1.4. Desigualdades de Bernstein aplicadas a los bloques diádicos

- En el nivel de Fourier los bloques diádicos tienen un soporte acotado de forma muy precisa: están en coronas diádicas
- Este es justamente el caso ideal para utilizar las desigualdades de Bernstein.

Antes de entrar en los detalles, es muy útil definir algunas funciones auxiliares.

Definición 2 (Funciones auxiliares) *Sean las funciones φ y ψ definidas por (5) y (6) respectivamente.*

1) *Definimos la función $\widetilde{\varphi}$ como $\widehat{\widetilde{\varphi}}(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi/2)$.*
   Para todo $j \in \mathbb{Z}$ definimos $\widetilde{\varphi}_j$ como $\widehat{\widetilde{\varphi}}_j(\xi) = \widehat{\widetilde{\varphi}}(2^{-j}\xi)$.

2) *Definimos la función $\widetilde{\psi}$ como $\widehat{\widetilde{\psi}}(\xi) = \widehat{\widetilde{\varphi}}(\xi/2) - \widehat{\widetilde{\varphi}}(\xi)$.*
   Para todo $j \in \mathbb{Z}$ definimos $\widetilde{\psi}_j$ como $\widehat{\widetilde{\psi}}_j(\xi) = \widehat{\widetilde{\psi}}(2^{-j}\xi)$.

¿Cuál es la utilidad de estas funciones?

Nótese que sobre el soporte de $\widehat{\varphi}$ se tiene que $\widehat{\widetilde{\varphi}} = 1$, de manera que se tiene la identidad

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi)\widehat{\widetilde{\varphi}}(\xi)$$

...y si se tiene esta identidad en Fourier...se tienen resultados interesantes en la variable real!

por ejemplo, podremos pasar todas las derivadas a las funciones auxiliares...

Definición 3 (Operadores asociados) *Sea $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Para todo $j \in \mathbb{Z}$ definimos los operadores $\widetilde{S_j}$ y $\widetilde{\Delta_j}$ asociados a las funciones $\widetilde{\varphi}_j$ y $\widetilde{\psi}_j$ por las fórmulas*

$$\widetilde{S_j}(f) = f * \widetilde{\varphi}_j \qquad \textit{es decir en Fourier} \qquad \widehat{\widetilde{S_j}f}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{\widetilde{\varphi}}_j(\xi)$$

$$\widetilde{\Delta_j}(f) = f * \widetilde{\psi}_j \qquad\qquad \widehat{\widetilde{\Delta_j}f}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{\widetilde{\psi}}_j(\xi)$$

El primer resultado que muestra las utilidas de estas funciones auxiliares es el siguiente:

Proposición 4 *Sea $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Se tiene para todo $j \in \mathbb{Z}$ las identidades*

$$S_j(f) = \widetilde{S}_j(S_j(f)) \qquad y \qquad \Delta_j(f) = \widetilde{\Delta}_j(\Delta_j(f)).$$

Prueba. Formalmente, basta pasar en Fourier: en efecto se tiene, por definición de las funciones auxiliares las identidades

$$\Big(\widetilde{S}_j(S_j(f))\Big)^{\wedge}(\xi) = \widehat{\widetilde{\varphi}}_j(\xi)\widehat{\varphi}_j(\xi)\widehat{f}(\xi) = \widehat{\varphi}_j(\xi)\widehat{f}(\xi)$$

de donde se deduce el resultado deseado. La identidad buscada para los operadores $\Delta_j(f)$ se deduce de la misma manera.

■

Veamos ahora lo que sucede cuando intervienen derivadas y normas L^p.

Proposición 5 *Sea $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Para todo multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^n$, para todo $j \in \mathbb{Z}$ y para todo $1 \leq p \leq q \leq +\infty$ entonces:*

1) $\|\partial^\alpha S_j(f)\|_{L^p} \leq 2^{j|\alpha|}\|\partial^\alpha \widetilde{\varphi}\|_{L^1}\|S_j(f)\|_{L^p}$

2) $\|\partial^\alpha \Delta_j(f)\|_{L^p} \leq 2^{j|\alpha|}\|\partial^\alpha \widetilde{\psi}\|_{L^1}\|\Delta_j(f)\|_{L^p}$

Prueba. Aquí usaremos la propiedad anterior $S_j(f) = \widetilde{S}_j(S_j(f))$ que es equivalente a escribir $S_j(f) = f*\varphi_j*\widetilde{\varphi}_j$, de manera que al aplicar la derivación obtenemos $\partial^\alpha S_j(f) = f * \varphi_j * \partial^\alpha \widetilde{\varphi}_j$. Tomando la norma L^p y usando las desigualdades de Minkowski se tiene

$$\|\partial^\alpha S_j(f)\|_{L^p} \leq \|f * \varphi_j\|_{L^p}\|\partial^\alpha \widetilde{\varphi}_j\|_{L^1}$$

Usando la definición de $\widetilde{\varphi}_j$ y la homogeneidad de los espacios L^1 se obtiene el resultado.

■

Proposición 6 *Sea $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ y sean $1 \leq p, q, r \leq +\infty$. Entonces:*

1) $\|S_j(f)\|_{L^q} \leq 2^{jn(1/p-1/q)}\|\widetilde{\varphi}\|_{L^r}\|S_j(f)\|_{L^p}$ *con* $1 + 1/q = 1/p + 1/r$.

2) $\|\Delta_j(f)\|_{L^q} \leq 2^{jn(1/p-1/q)}\|\widetilde{\psi}\|_{L^r}\|\Delta_j(f)\|_{L^p}$ *con* $1 + 1/q = 1/p + 1/r$.

Prueba. Basta aplicar las desigualdades de Young. En efecto escribimos:

$$\|S_j(f)\|_{L^q} \leq \|f * \varphi_j\|_{L^p}\|\widetilde{\varphi}_j\|_{L^r}$$

En este punto aplicamos la homogeneidad de los espacios de Lebesgue L^r para obtener la estimación:

$$\|S_j(f)\|_{L^q} \leq \|f * \varphi_j\|_{L^p}2^{j(n-n/r)}\|\widetilde{\varphi}\|_{L^r} = 2^{jn(1/p-1/q)}\|f * \varphi_j\|_{L^p}\|\widetilde{\varphi}\|_{L^r}$$

■

Observación 2 Nótese que la combinación de estas dos proposiciones proporciona las desigualdades de Bernstein aplicadas precisamente a los bloques diádicos.

2. Descomposiciones de Littlewood-Paley

$\Longrightarrow$ **idea**: expresar las distribuciones temperadas como una suma de bloques diádicos.

2.1. Descomposición inhomogénea

Teorema 3 *Sea $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Se tiene la siguiente identidad en el sentido de las distribuciones*

$$f = S_0(f) + \sum_{j\in\mathbb{N}} \Delta_j(f)$$

Prueba. Basta pasar en Fourier! En efecto se tiene, al menos "formalmente", la identidad

$$\begin{aligned}
\widehat{f} &= \widehat{S_0(f)} + \sum_{j\in\mathbb{N}} \widehat{\Delta_j(f)} \\
&= \widehat{f}\left(\widehat{\varphi}_0 + \sum_{j\in\mathbb{N}} \widehat{\psi}_j\right) \\
&= \widehat{f} \lim_{j\to+\infty} \left(\widehat{\varphi}_0 + \sum_{k=0}^{j-1} \widehat{\psi}_k\right) \\
&= \widehat{f}
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Aplicaciones:

- La gran mayoría de espacios funcionales conocidos (Lebesgue, Sobolev, Besov, Hardy, etc.) pueden caracterizarse cómodamente en función de esta descomposición inhomogénea.
- Este tipo de descomposición tiene muchas aplicaciones dentro del análisis armónico, en las EDPs, en el tratamiento de señales (la descomposición de Littlewood-Paley está a "medio camino" entre el análisis de Fourier y las ondículas u *ondelettes*)...

El primer ejemplo de caracterización equivalente de espacios funcionales por medio de bloques diádicos es el de los espacios de Lebesgue.

Teorema 4 *Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 < p < +\infty$. Se tiene entonces la equivalencia entre normas siguiente:*

$$\|f\|_{L^p} \simeq \|S_0(f)\|_{L^p} + \left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{N}} |\Delta_j(f)|^2\right)^{1/2}\right\|_{L^p}$$

La notación $A(f) \simeq B(f)$ significa: existen dos constantes universales[1] $C_1, C_2 > 0$ tales que, para todo f, se tenga

$$C_1 A(f) \leq B(f) \leq C_2 A(f).$$

Observación 3 Este resultado nos indica cómo "leer" la pertenencia de una función a los espacios de Lebesgue L^p con $1 < p < +\infty$ por medio de los bloques diádicos.

Observación 4 Los espacios L^1 y L^∞ **no** admiten una descomposición de este tipo. No pueden ser caracterizados de esta forma. Los substitutos *naturales* son los espacios de Hardy y BMO.

[1] es decir que no dependen de f.

Prueba.

- Caso simple $p = 2$: vamos a demostrar que se tiene la estimación

$$\|S_0(f)\|_{L^2} + \left\| \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} |\Delta_j(f)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^2} \leq C\|f\|_{L^2}$$

  - La parte $\|S_0(f)\|_{L^2}$ no causa ningún problema pues por la desigualdad de Minkowski se tiene

$$\|S_0(f)\|_{L^2} = \|f * \varphi\|_{L^2} \leq \|\varphi\|_{L^1}\|f\|_{L^2} \leq C\|f\|_{L^2}$$

    Recuérdese que $\varphi \in \mathcal{S} \subset L^1 \cap L^\infty$.
  - Para la segunda parte

$$\left\| \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} |\Delta_j(f)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^2} \leq C\|f\|_{L^2}$$

    vamos a utilizar el teorema de Plancherel y vemos que esta estimación es equivalente a la desigualdad

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j\in\mathbb{N}} |\widehat{\psi}_j|^2|\widehat{f}|^2 d\xi \leq C\|\widehat{f}\|^2_{L^2}$$

    y por lo tanto, lo único que hay que verificar es que se tiene la estimación

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} |\widehat{\psi}_j|^2 \leq C \tag{9}$$

    Dado que la función ψ tiene un momento nulo podemos entonces escribir

$$\widehat{\psi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi}\psi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left(e^{-ix\cdot\xi} - 1\right)\psi(x)dx$$

    Es decir

$$|\widehat{\psi}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left|e^{-ix\cdot\xi} - 1\right||\psi(x)|dx \leq C|\xi|^{1/2} \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{1/2}|\psi(x)|dx \leq C|\xi|^{1/2}.$$

$$|\widehat{\psi}(\xi)| \leq C|\xi|^{1/2}. \tag{10}$$

    Sea ahora $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \neq 0$ y sea j tal que $|\xi_j| \geq |\xi_k|$ para todo $k = 1, ..., n$. Integrando por partes con respecto a ∂_j en la definición de la transformada de Fourier obtenemos la fórmula

$$\widehat{\psi}(\xi) = -\int_{\mathbb{R}^n} (-i\xi_j)^{-1}e^{-ix\cdot\xi}(\partial_j\psi(x))dx$$

    de donde se deduce la estimación

$$|\widehat{\psi}(\xi)| \leq |\xi|^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\psi(x)|dx \leq C|\xi|^{-1}.$$

$$|\widehat{\psi}(\xi)| \leq C|\xi|^{-1}. \tag{11}$$

    Con las estimaciones (10) y (11) vamos a obtener la desigualdad (9): basta cortar la suma en dos partes, la primera donde $2^{-j}|\xi| \leq 1$ y la segunda donde $2^{-j}|\xi| \geq 1$.

- Caso más difícil $p \neq 2$: hay que mostrar una desigualdad débil. Definiendo un operador T bien adaptado al problema se demuestra la estimación

$$\|T(f)\|_{L^{1,\infty}} \leq C\|f\|_{L^1}$$

  entonces por interpolación se obtiene el resultado para $1 < p < 2$ y por dualidad se obtiene el resultado para $2 < p < +\infty$.

■

2.2. Descomposición homogénea

- En la sección anterior hemos usado la descomposición

$$\widehat{\varphi}_0(\xi) + \sum_{j=0}^{+\infty} \widehat{\psi}_j(\xi) \equiv 1$$

  Es decir en donde sólo interviene la partición en las grandes frecuencias.

- Es posible usar la descomposición

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \widehat{\psi}_j(\xi) \equiv 1$$

  en donde intervienen las pequeñas frecuencias, pero hay que tomar ciertas precauciones: recuérdese que esta fórmula era válida sólo cuando $\xi \neq 0$.

$\Longrightarrow$ el problema de está en el orígen, una forma de solucionarlo es "descartar" todas las funciones/distribuciones cuya transformada de Fourier tiene por soporte $\{0\}$.

Teorema 5 *Sea $f \in \mathcal{S}'/\mathcal{P}$ en donde $\mathcal{P}$ es el conjunto de todos los polinomios. Se tiene la siguiente fórmula en el sentido de las distribuciones*

$$f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \Delta_j(f)$$

Cuidado! Esta igualdad no es verdadera con todo rigor: si tomamos la función $f(x) = 1$ no se tiene la identidad deseada puesto que $\Delta_j(1) = 0$ para todo $j \in \mathbb{Z}$.

¿Porqué? Si pasamos al nivel de Fourier, la descomposición homogénea da (ver fórmula (8)):

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \widehat{\psi}_j(\xi) = 1, \qquad \xi \neq 0$$

Como la transformada de Fourier de los polinomios tiene soporte en el punto 0, es necesario "evitarlos".

Se obtienen entonces resultados similares a los anteriores, pero los espacios considerados son ligeramentes diferentes, son homogéneos como lo veremos en la lección siguiente.

En el caso de los espacios de Lebesgue, esta diferencia no es perceptible y se tiene el siguiente teorema:

Teorema 6 *Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 < p < +\infty$. Se tiene entonces la equivalencia entre normas siguiente:*

$$\|f\|_{L^p} \simeq \left\| \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\Delta_j(f)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p}$$

3. Resultados generales

- La teoría de Littlewood-Paley posee numerosos resultados de gran importancia.
- Existen muchas variantes de las caracterizaciones diádicas.

El enunciado a continuación es una variante muy útil de las caracterizaciones diádicas. Este teorema será utilizado posteriormente.

Teorema 7 *Sea una función de base ψ que supondremos radial, con transformada de Fourier real, con un momento nulo y que verifica*

$$|\psi(x)| + |\nabla\psi(x)| \leq C(1+|x|)^{-n-1}.$$

Entonces se tiene la desigualdad

$$\left\| \sum_{j\in\mathbb{Z}} \Delta_j(f_j) \right\|_{L^p} \leq C \left\| \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |f_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p}$$

para todo $1 < p < +\infty$ y para toda sucesión de funciones $(f_j)_{j\in\mathbb{Z}}$.