Lección n°3: Espacios de Hölder y de Sobolev

EPN, verano 2010

1. Espacios de Hölder

- los espacios $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ de funciones continuas acotadas a derivadas k-ésimas continuas y acotadas miden la regularidad de las funciones con $k = 0, 1, ...$
- las funciones de clase $\mathcal{C}^2$ son más "regulares" que las funciones de clase $\mathcal{C}^1$, ¿pero qué hay entre $k = 1$ y $k = 2$? o entre $k = 0$ y $k = 1$? ¿existen funciones que son continuas y "un poquito más" pero que no son derivables?
- ¿Cómo caracterizar la regularidad fraccional? $\Longrightarrow$ interés de los espacios de Hölder.

1.1. Definición clásica

Los espacios de Hölder, que notaremos $\mathcal{C}^\alpha$, "llenan los huecos" entre los espacios de clase $\mathcal{C}^k$.

1.1.1. Caso $0 < \alpha < 1$

Definición 1 *El espacio de Hölder $\mathcal{C}^\alpha(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, con $0 < \alpha < 1$ está definido por:*

$$\mathcal{C}^\alpha(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \ : \|f\|_{\mathcal{C}^\alpha} < +\infty\}$$

en donde

$$\|f\|_{\mathcal{C}^\alpha} = \|f\|_{L^\infty} + \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \sup_{h\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{|f(x+h) - f(x)|}{|h|^\alpha}$$

Formulación más cómoda y a veces más útil:

$$\|f\|_{\mathcal{C}^\alpha} = \|f\|_{L^\infty} + \sup_{x\neq y\in\mathbb{R}^n} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha}$$

Ejemplos clásicos:

- Toda función constante está en $\mathcal{C}^\alpha(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, en particular el segundo término de $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^\alpha}$ es nulo.
- Un polinomio no está en $\mathcal{C}^\alpha(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ pues no es acotado.

Proposición 1

- *Para todo $0 < \alpha < 1$, el espacio $\mathcal{C}^\alpha(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ es un espacio de Banach dotado de la norma $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^\alpha}$.*
- *Todo elemento $f \in \mathcal{C}^\alpha(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ es automáticamente continuo.*

Prueba. Usamos el núcleo del calor y escribimos

$$H_t(f)(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \big(f(x-y) - f(x)\big) h_t(y) dy$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \|H_t(f)(x) - f(x)\|_{L^\infty} &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \big\|f(x-y) - f(x)\big\|_{L^\infty} \frac{e^{-\frac{|y|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{n/2}} dy \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |y|^\alpha \frac{e^{-\frac{|y|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{n/2}} dy \\ &\leq Ct^{\alpha/2} \end{aligned}$$

Como se tiene $\|H_{t_1}(f)(x) - H_{t_2}(f)(x)\|_{L^\infty} \longrightarrow 0$ si $t_1, t_2 \longrightarrow 0$ y como $H_t(f)(x)$ es una función continua en x, se tiene que $H_t(f)(x)$ converge uniformemente si $t \longrightarrow 0$. Tenemos entonces que todo elemento $f \in \mathcal{C}^\alpha(\mathbb{R}^n)$ es continuo. Se tiene en particular la inclusión $\mathcal{C}^\alpha \subset \mathcal{C}^0$.

■

Observación 1 La norma $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^\alpha}$ está compuesta de dos términos que miden informaciones distintas y que inducen una escala de diferenciación. En efecto:

- si $|h| \leq 1$

  $\Longrightarrow$ la cantidad $\frac{|f(x+h)-f(x)|}{|h|^\alpha}$ es la que domina.

- si $|h| \geq 1$, se tiene
$$\frac{|f(x+h)-f(x)|}{|h|^\alpha} \leq 2\|f\|_{L^\infty}$$

  $\Longrightarrow$ la cantidad $\|f\|_{L^\infty}$ es la que domina.

Observación 2 Los espacios $\mathcal{C}^\alpha(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ que acabamos de definir son llamados espacios *inhomogéneos*: están definidos a partir de dos partes de homogeneidad diferente:

Sea $f_\gamma(x) = f(\gamma x_1, ..., \gamma x_n)$. Se tiene $\|f_\gamma\|_{L^\infty} = \|f\|_{L^\infty}$ pero $\frac{|f_\gamma(x+h)-f_\gamma(x)|}{|h|^\alpha} = \gamma^\alpha \frac{|f(x+h)-f(x)|}{|h|^\alpha}$

$\Longrightarrow$ no existe un $\sigma \in \mathbb{R}$ tal que se tenga $\|f_\gamma\|_{\mathcal{C}^\alpha} = \gamma^{-\sigma}\|f\|_{\mathcal{C}^\alpha}$ que es la condición que se requiere para que una norma sea homogénea.

1.1.2. Caso general

Definición 2 *Para $h \in \mathbb{R}^n$ definimos para una función continua $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ el operador de diferencia finita D_h por*
$$D_h(f) = f(x+h) - f(x)$$
Tenemos además $D_h^{k+1}(f) = D_h^k(D_h(f))$, es decir:
$$D_h^{k+1}(f)(x) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k+j+1} \binom{k+1}{j} f(x+jh)$$

Definición 3 *Sea $\alpha > 0$, el espacio de Hölder $\mathcal{C}^\alpha(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ está definido por:*
$$\mathcal{C}^\alpha(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \ : \|f\|_{\mathcal{C}^\alpha} < +\infty\}$$
en donde
$$\|f\|_{\mathcal{C}^\alpha} = \|f\|_{L^\infty} + \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \sup_{h\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{|D_h^{\lfloor\alpha\rfloor+1}(f)(x)|}{|h|^\alpha}$$
aquí $\lfloor\alpha\rfloor$ es el más grande entero menor que α.

Teorema 1

- *Para $\alpha > 0$ los espacios de Hölder $\left(\mathcal{C}^\alpha(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{\mathcal{C}^\alpha}\right)$ son espacios de Banach.*
- *Se tienen las inclusiones siguientes:*
$$\mathcal{C}^\beta \subset \mathcal{C}^\alpha \subset \mathcal{C}^0$$
  para todo $\beta > \alpha > 0$.

Prueba. Hay que verificar que se tiene la estimación $\|f\|_{\mathcal{C}^\alpha} \leq C\|f\|_{\mathcal{C}^\beta}$ para todo $f \in \mathcal{C}^\beta$. Dado que el término $\|\cdot\|_{L^\infty}$ es el mismo para las dos normas, basta estudiar el segundo término que define las cantidades $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^\alpha}$, que es interesante si $|h| \leq 1$ por la observación 1. La verificación es entonces inmediata pues $\beta > \alpha$.

■

1.2. Caracterización térmica

- Es posible utilizar los semi-grupos del calor y de Poisson para caracterizar estos espacios
- Esta caracterización es muy general y puede aplicarse en diversas situaciones (no sólo cuando el espacio de base es $\mathbb{R}^n$)

Teorema 2 *Sea $0 < \alpha < 1$ y sea $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Entonces $f \in \mathcal{C}^\alpha(\mathbb{R}^n)$ si y solo si existe dos constantes $C_1, C_2 > 0$ tales que*

- *Usando el núcleo de Poisson*
$$\|\partial_t P_t f\|_{L^\infty} \leq C_1 t^{\alpha-1} \tag{1}$$
- *Usando el núcleo del calor*
$$\|\partial_t H_t f\|_{L^\infty} \leq C_2 t^{\alpha/2-1} \tag{2}$$

Además si C_1' es la más pequeña constante tal que se tenga (1), entonces las normas $\|\cdot\|_{L^\infty} + C_1'$ y $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^\alpha}$ son equivalentes. Lo mismo se tiene con C_2', la más pequeña constante tal que se tenga (2), y las normas $\|\cdot\|_{L^\infty} + C_2'$ y $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^\alpha}$

Prueba.

($\Longrightarrow$) Utilizaremos el núcleo de Poisson. Sea $0 < \alpha < 1$ y sea $f \in \mathcal{C}^\alpha(\mathbb{R}^n)$.

El punto de partida son las siguientes estimaciones sobre el núcleo de Poisson:
$$\int_{\mathbb{R}^n} |\partial_t p_t|\, dx \leq c\, t^{-1} \qquad y \qquad \int_{\mathbb{R}^n} \partial_t p_t dx = 0.$$
que son una consecuencia de las mayoraciones $|\partial_t p_t(x)| \leq c\, t^{-n-1}$ y $|\partial_t p_t(x)| \leq c|x|^{-n-1}$. Entonces se tiene:
$$\begin{aligned}
\partial_t P_t f(x) &= \partial_t (p_t * f)(x) = (\partial_t p_t) * f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_t p_t(y)\big(f(x-y) - f(x)\big)dy \\
\big|\partial_t P_t f(x)\big| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \big|\partial_t p_t(y)\big|\big|f(x-y) - f(x)\big|dy \\
\|\partial_t P_t f\|_{L^\infty} &\leq \|f\|_{\mathcal{C}^\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} \big|\partial_t p_t(y)\big||y|^\alpha dy = \|f\|_{\mathcal{C}^\alpha} \left(\int_{\{|y|\leq t\}} \big|\partial_t p_t(y)\big||y|^\alpha dy + \int_{\{|y|>t\}} \big|\partial_t p_t(y)\big||y|^\alpha dy \right)
\end{aligned}$$
De donde se deduce:
$$\|\partial_t P_t f\|_{L^\infty} \leq c\, t^{\alpha-1} \|f\|_{\mathcal{C}^\alpha}$$

($\Longleftarrow$) Sea $0 < \alpha < 1$ y supongamos que se tiene (1).

Lema 1 *Si $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ y si $0 < \alpha < 1$, entonces la condición (1) es equivalente a las n condiciones siguientes*
$$\|\partial_{x_j} P_t f\|_{L^\infty} \leq C t^{\alpha-1}, \qquad j = 1, ..., n.$$

Escribimos entonces
$$f(x+y) - f(x) = \big(P_t(f)(x+y) - P_t(f)(x)\big) + \big(f(x+y) - P_t(f)(x+y)\big) - \big(f(x) - P_t(f)(x)\big)$$
Aquí fijaremos $t = |y|$ y trataremos por separado cada uno de estos términos.

- para el primer término utilizamos el lema:

$$\big|P_t(f)(x+y) - P_t(f)(x)\big| \leq |y| \sum_{i=1}^{n} \|\partial_{x_j} P_t f\|_{L^\infty} \leq c\,|y|\,|y|^{\alpha-1} = c\,|y|^\alpha$$

- para el segundo y tercer término observamos que se tiene

$$f(x+y) - P_t(f)(x+y) = -\int_0^t \partial_s P_s(f)(x+y)ds$$

  y entonces

$$|f(x+y) - P_t(f)(x+y)| \leq \int_0^t \big|\partial_s P_s(f)(x+y)\big|ds \leq Ct^\alpha = C|y|^\alpha.$$

Tenemos entonces que $f \in \mathcal{C}^\alpha(\mathbb{R}^n)$.

■

1.3. Caracterización diádica

Es posible utilizar los bloques diádicos para estudiar la pertenencia de una función a los espacios de Hölder.

Teorema 3 *Sea $\alpha > 0$. Tenemos la equivalencia de normas siguiente*

$$\|f\|_{\mathcal{C}^\alpha} \simeq \|S_0(f)\|_{L^\infty} + \sup_{j\in\mathbb{N}} 2^{j\alpha}\|\Delta_j(f)\|_{L^\infty}$$

Observación 3 Es importante notar que la *regularidad* de las funciones se "lee" en la forma en que *decrecen* los bloques diádicos.

2. Espacios de Sobolev

- Funciones cuyas derivadas en el sentido de las distribuciones pertenecen a los espacios de Lebesgue: decimos que $\partial^\alpha f = g$ en sentido débil (o en sentido de las distribuciones) si

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\partial^\alpha\varphi(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\varphi(x)dx \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty = \mathcal{D}.$$

- Los espacios de Sobolev miden entonces la regularidad en norma L^p. Veremos varias formas de caracterizar esta propiedad.

2.1. Definición clásica

Es la definición que se enseña en la escuela.

Definición 4 *Sea $1 \leq p \leq +\infty$ y $k \in \mathbb{N}$. Definimos el espacio de Sobolev $W^{k,p}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ por*

$$W^{k,p}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}\ : \|f\|_{W^{k,p}} < +\infty\}$$

en donde

$$\|f\|_{W^{k,p}} = \sum_{|\alpha|\leq k} \|\partial^\alpha f\|_{L^p}$$

Nótese que si $k = 0$ entonces $W^{0,p} = L^p$.

Teorema 4 *Los espacios de Sobolev $\big(W^{k,p}(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{W^{k,p}}\big)$ son espacios de Banach.*

Potenciales de Riesz y de Bessel

Cuando aplicamos el operador Laplaciano $\Delta = \sum_{j=1}^{n} \partial^2_{x_j}$ a una función de la clase de Schwartz $f \in \mathcal{S}$ (o a una distribución temperada $f \in \mathcal{S}'$) tenemos la identidad:

$$-\widehat{\Delta(f)}(\xi) = |\xi|^2 \widehat{f}(\xi)$$

que puede servir para definir las "potenciales fraccionales" del operador Laplaciano. Por ejemplo, podemos definir por medio de su transformada de Fourier el operador de Calderón $\Lambda = (-\Delta)^{1/2}$ de la siguiente forma

$$\widehat{\Lambda(f)}(\xi) = |\xi|\widehat{f}(\xi)$$

La generalización de este proceder está relacionada con los potenciales.

Potenciales de Riesz

Definición 5 *Sea $s > 0$. El potencial de Riesz de orden s es el operador definido por $I_s = (-\Delta)^{-s/2}$ y puede escribirse:*

$$I_s(f)(x) = C \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x-y)}{|y|^{n-s}} dy$$

Teorema 5 *Sea $0 < s < n$ y $1 < p < q < +\infty$ tales que $1/p - 1/q = s/n$. Entonces existe una constante $C = C(n, s, p)$ tal que se tenga para toda función $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ la estimación*

$$\|I_s(f)\|_{L^q} \leq C\|f\|_{L^p}$$

Si $p = 1$ se tiene la estimación débil:

$$\|I_s(f)\|_{L^{q,\infty}} \leq C\|f\|_{L^1}$$

Demostración.

- $I_s(f)$ está bien definida para toda función f acotada que decrece suficientemente rápido al infinito $\Longrightarrow$ basta trabajar en un subconjunto denso de todos los espacios L^p.
- Se puede suponer que $f \geq 0$ pues se tiene $|I_s(f)| \leq I_s(|f|)$.

Escribimos entonces:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x-y)}{|y|^{n-s}} dy = \int_{\{|y|<R\}} \frac{f(x-y)}{|y|^{n-s}} dy + \int_{\{|y|\geq R\}} \frac{f(x-y)}{|y|^{n-s}} dy = I_1(f)(x) + I_2(f)(x)$$

En donde R será fijado posteriormente.

- para I_1: Se observa que I_1 no es más que la convolución entre f y la función $g = |y|^{-n+s}\mathbb{1}_{\{|y|<R\}}$. Se tiene entonces que g es una función radial, decreciente, integrable y por lo tanto podemos escribir

  $$I_1(f)(x) \leq \mathfrak{M}(f)(x) \int_{\{|y|<R\}} dy = cR^s\mathfrak{M}(f)(x)$$

  en donde $\mathfrak{M}$ es la función maximal de Hardy-Littlewood.

- para I_2: la desigualdad de Hölder nos da

  $$|I_2(f)(x)| \leq \left(\int_{\{|y|\geq R\}} |y|^{(s-n)p'} \right)^{1/p'} \|f\|_{L^p} = cR^{-n/q}\|f\|_{L^p}$$

  en donde hemos usado las relaciones $1/p - 1/q = s/n$ y $1/p' + 1/p = 1$.

Juntando estas dos estimaciones obtenemos, para todo $R > 0$:

$$I_s(f)(x) \leq C\left(R^s\mathfrak{M}(f)(x) + R^{-n/q}\|f\|_{L^p}\right).$$

Ahora vamos a fijar R de manera a minimizar esta expresión, es decir

$$R = \frac{\mathfrak{M}(f)(x)^{-p/n}}{\|f\|_{L^p}^{-p/n}}$$

lo que nos da:

$$I_s(f)(x) \leq C\mathfrak{M}(f)(x)^{p/q}\|f\|_{L^p}^{1-p/q}. \tag{3}$$

Para terminar, basta elevar esta expresión a la raíz q-ésima, integrar sobre $\mathbb{R}^n$ y utilizar el hecho que la función maximal de Hardy-Littlewood es acotada de L^p en L^p para $1 < p < +\infty$.

Para tratar el caso $p = 1$ y $q = n/(n-s)$, utilizamos la estimación (3) para obtener

$$\left|\{I_s(f) > \alpha\}\right| \leq \left|\{C\mathfrak{M}(f)(x)^{(n-s)/n}\|f\|_{L^1}^{s/n} > \alpha\}\right| = \left|\left\{\mathfrak{M}(f)(x) > \left(\frac{\alpha}{C\|f\|_{L^1}^{s/n}}\right)^{n/(n-s)}\right\}\right|$$

En este punto recordamos que la función maximal $\mathfrak{M}$ es acotada de $L^{1,\infty}$ en L^1 lo que nos permite escribir

$$\left|\{I_s(f) > \alpha\}\right| \leq \left(\frac{C\|f\|_{L^1}^{s/n}}{\alpha}\right)^{n/(n-s)}\|f\|_{L^1} = \frac{\|f\|_{L^1}^{n/(n-s)}}{\alpha^{n/(n-s)}}$$

de donde se deduce

$$\|I_s(f)\|_{L^{q,\infty}} \leq C\|f\|_{L^1}.$$

■

Observación 4 Existen muchas demostraciones de este resultado, el mérito de esta prueba es la utilización de las funciones maximales.

Potenciales de Bessel

Definición 6 *Sea $s > 0$. El potencial de Bessel de orden s es el operador definido por $J_s = (Id - \Delta)^{-s/2}$. La acción de este potencial sobre las funciones está explicitada por la fórmula:*

$$J_s(f)(x) = \left(\widehat{f}\,\widehat{G_s}\right)^{\vee} = f * G_s$$

en donde $\widehat{G_s}(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{-s/2}$

Proposición 2 *Sea $s > 0$, entonces $G_s(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Si $0 < s < n$, se tiene además*

$$G_s(x) \simeq \begin{cases} |x|^{s-n} & si\ |x| \leq 2 \\ e^{-|x|/2} & si\ |x| > 2 \end{cases}$$

Este resultado nos permite demostrar el análogo del teorema 5 para los potenciales de Bessel:

Teorema 6 *Sea $0 < s < n$ y $1 < p < q < +\infty$ tales que $1/p - 1/q = s/n$. Entonces existe una constante $C = C(n, s, p)$ tal que se tenga para toda función $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ la estimación*

$$\|J_s(f)\|_{L^q} \leq C\|f\|_{L^p}$$

Si $p = 1$ se tiene la estimación débil:

$$\|J_s(f)\|_{L^{q,\infty}} \leq C\|f\|_{L^1}$$

Demostración. Utilizando la proposición anterior podemos escribir:

$$\begin{aligned} J_s(f)(x) &\leq C\left(\int_{\{|y|\leq 2\}} |f(x-y)||y|^{s-n}dy + \int_{\{|y|>2\}} |f(x-y)|e^{-|y|/2}dy\right) \\ &\leq C\left(I_s(|f|)(x) + \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|e^{-|y|/2}dy\right) \end{aligned}$$

Para terminar la demostración, basta utilizar el teorema 5 para el primer término y las desigualdades de Young para el segundo.

■

2.2. Espacios Potenciales

- Como los espacios de Hölder, los espacios potenciales $\mathcal{W}^{s,p}$ con $s \in \mathbb{R}$ permiten estudiar la regularidad fraccionaria.
- utilización intensiva los potenciales de Riesz y de Bessel.

Definición 7 *Sea $1 \leq p \leq +\infty$ y $s \in \mathbb{R}$. Definimos el espacio Potencial $\mathcal{W}^{s,p}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ por*

$$\mathcal{W}^{s,p}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \,:\, \|f\|_{\mathcal{W}^{s,p}} < +\infty\}$$

en donde

$$\|f\|_{\mathcal{W}^{s,p}} = \left\| \left((1+|\cdot|^2)^{s/2}\widehat{f}\right)^{\vee} \right\|_{L^p}$$

Observación 5 La regularidad de las funciones se puede "leer" en su <u>decrecimiento al infinito</u> en el nivel de Fourier.

Teorema 7 *Para todo $k \in \mathbb{N}$ y para $1 < p < +\infty$ se tiene la equivalencia $\mathcal{W}^{k,p} \simeq W^{k,p}$.*
Este resultado es falso si $p = 1$ o si $p = +\infty$.

Demostración.

($\Longrightarrow$) Sea $f \in \mathcal{W}^{k,p}$ con $k \in \mathbb{N}$ y $1 < p < +\infty$. Entonces para todo multi-índice $|\alpha| \leq k$ se tiene

$$\partial^\alpha f = c\big(\widehat{f}(\xi)\ \xi^\alpha\big)^\vee = c\left(\widehat{f}(\xi)(1+|\xi|^2)^{k/2}\frac{\xi^\alpha}{(1+|\xi|^2)^{k/2}}\right)^\vee \tag{4}$$

Lema 2 *Para todo $|\alpha| \leq k$, la función $m_\alpha(\xi) = \frac{\xi^\alpha}{(1+|\xi|^2)^{k/2}}$ es un multiplicador en L^p con $1 < p < +\infty$.*
Esto significa que el operador $T_{m_\alpha}(f) = \big(\widehat{f}m_\alpha\big)^\vee$ es acotado de L^p en L^p.

Prueba. (Rapida y sólo la parte fácil) Por el teorema de Plancherel podemos escribir

$$\|T_{m_\alpha}(f)\|_{L^2}^2 = \|\widehat{f}m_\alpha\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)|^2 \frac{|\xi|^{2\alpha}}{(1+|\xi|^2)^k} d\xi \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

pues $|\alpha| \leq k$ y entonces tenemos la estimación $\|T_{m_\alpha}(f)\|_{L^2}^2 \leq \|f\|_{L^2}^2$: el operador es acotado de L^2 en L^2.

Para la parte complicada (que no demostraremos aquí) hay que demostrar que se tiene

$$\|T_{m_\alpha}(f)\|_{L^{1,\infty}} \leq C\|f\|_{L^1}$$

Nótese la utilidad de los espacios de Lorentz.

Entonces, aplicando el teorema de interpolación de Marcinkiewicz se obtiene el resultado deseado para todo $1 < p < 2$, por dualidad se obtiene los casos restantes. (Notar la utilización de los espacios de Lorentz y de los resultados de interpolación).

$\blacksquare$

Con este lema, volvemos a (4): como por hipótesis se tiene que $\left(\widehat{f}(\xi)(1+|\xi|^2)^{k/2}\right)^{\vee} \in L^p$, podemos escribir la estimación siguiente:

$$\|f\|_{W^{k,p}} = \sum_{|\alpha|\leq k} \|\partial^\alpha f\|_{L^p} \leq C \left\| \left((1+|\cdot|^2)^{k/2}\widehat{f}\right)^{\vee} \right\|_{L^p} = C\|f\|_{\mathcal{W}^{k,p}}$$

($\Longleftarrow$) Sea ahora $f \in W^{k,p}$ con $k \in \mathbb{N}$ y $1 < p < +\infty$. Escribimos entonces

$$(1+\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2)^{k/2} = \sum_{|\alpha|\leq k} \frac{k!}{\alpha_1!\cdots\alpha_n!}\xi^\alpha \frac{\xi^\alpha}{(1+|\xi|^2)^{k/2}}$$

Utilizamos una vez más el hecho que las funciones $m_\alpha(\xi) = \frac{\xi^\alpha}{(1+|\xi|^2)^{k/2}}$ son multiplicadores en L^p con $1 < p < +\infty$ si $|\alpha| \leq k$. Por lo tanto tenemos

$$\left((1+|\cdot|^2)^{k/2}\widehat{f}\right)^{\vee} = \sum_{|\alpha|\leq k} c_{\alpha,k}\left(m_\alpha(\xi)\,\xi^\alpha \widehat{f}(\xi)\right)^{\vee} = \sum_{|\alpha|\leq k} c_{\alpha,k}\left(m_\alpha(\xi)\widehat{\partial^\alpha f}(\xi)\right)^{\vee}$$

de donde se deduce

$$\|f\|_{\mathcal{W}^{k,p}} = \left\| \left((1+|\cdot|^2)^{k/2}\widehat{f}\right)^{\vee} \right\|_{L^p} \leq C \sum_{|\alpha|\leq k} \|\partial^\alpha f\|_{L^p} \leq C\|f\|_{W^{k,p}}$$

$\blacksquare$

2.3. Desigualdades de Sobolev clásicas

Teorema 8 *Sea $0 < s < n/p$ y $1 < p < +\infty$. Si $1/p - 1/q = s/n$ entonces el espacio de Sobolev $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ está continuamente contenido en el espacio de Lebesgue $L^q(\mathbb{R}^n)$:*

$$\|f\|_{L^q} \leq C\|f\|_{W^{s,p}}$$

Observación 6 Hay una manera sencilla de verificar la razón por la cual se tiene la relación $1/p - 1/q = s/n$: basta reemplazar f por la función dilatada f_γ. Nótese que este relación entre índices es esencial, si s, p, q no están relacionados de esta forma el teorema es falso.

Demostración. Si $f \in W^{s,p}$, entonces sabemos que $f_s = \left((1+|\xi|^2)^{s/2}\widehat{f}\right)^{\vee} \in L^p$ y podemos escribir

$$f(x) = \left((1+|\xi|^2)^{-s/2}\widehat{f}_s\right)^{\vee}(x)$$

y por lo tanto tenemos $f = G_s * f_s$ en donde G_s es el núcleo de convolución del potencial de Bessel. Como $0 < s < n$, podemos usar la proposición 2 para obtener $|f| = |G_s * f_s| \leq CI_s(|f_s|)$. En este punto basta aplicar el teorema 5:

$$\|f\|_{L^q} \leq C\|I_s(|f_s|)\|_{L^p} = C\|f\|_{W^{s,p}}$$

$\blacksquare$

2.4. Caracterización diádica

Teorema 9 *Sea $s > 0$ y $1 < p < +\infty$, entonces se tiene la equivalencia de las dos normas siguientes:*

$$\|f\|_{W^{s,p}} \simeq \|S_0 f\|_{L^p} + \left\| \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} 2^{2js} |\Delta_j f|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p} \tag{5}$$

Observación 7 Nótese que si $s = 0$ se obtiene la caracterización en bloques diádicos de los espacios de Lebesgue.

Demostración. Verificamos solo un lado de la estimación y para ello seguimos utilizando la notación

$$f_s = \left((1 + |\cdot|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{f}\right)^\vee$$

de manera que se tiene $\|f\|_{W^{s,p}} = \|f_s\|_{L^p}$ siempre y cuando $f \in W^{s,p}$. Escribimos ahora

$$\|f\|_{W^{s,p}} = \|f_s\|_{L^p} \leq \|(\widehat{\varphi}\widehat{f_s})^\vee\|_{L^p} + \|\left((1-\widehat{\varphi})\widehat{f_s}\right)^\vee\|_{L^p}$$

Estudiamos los dos términos

- Sea ahora $\widetilde{\varphi}$ una función auxiliar que $\widehat{\widetilde{\varphi}} \in \mathcal{C}_0^\infty$ y tal que valga 1 sobre el soporte de $\widehat{\varphi}$. Entonces, se tiene

  $$\widehat{\varphi}\widehat{f_s} = \widehat{\widetilde{\varphi}}\, \widehat{\varphi}\, \left((1 + |\cdot|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{f}\right) = \left((1 + |\cdot|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{\widetilde{\varphi}}\right) \widehat{\varphi}\, \widehat{f}$$

  Evidentemente $\left((1 + |\cdot|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{\widetilde{\varphi}}\right)$ es un multiplicador de Fourier y entonces podemos escribir

  $$\|\left(\widehat{\varphi}\widehat{f_s}\right)^\vee\|_{L^p} \leq C \|\left(\widehat{\varphi}\, \widehat{f}\right)^\vee\|_{L^p} = C\|S_0 f\|_{L^p}$$

- Para el segundo término consideramos otra función auxiliar η tal que $\widehat{\eta}$ se anule en el origen y valga 1 en el soporte de $(1 - \widehat{\varphi})$.

  Lema 3 *La función* $\frac{(1+|\xi|^2)^{s/2}}{|\xi|^s}\widehat{\eta}(\xi)$ *es un multiplicador de Fourier.*

  Utilizando este lema podemos escribir:

  $$(1 - \widehat{\varphi})\widehat{f_s} = \frac{(1 + |\xi|^2)^{s/2}}{|\xi|^s} \widehat{\eta}(\xi)|\xi|^s(1 - \widehat{\varphi})\widehat{f}$$

  y obtenemos

  $$\|\left((1 - \widehat{\varphi})\widehat{f_s}\right)^\vee\|_{L^p} \leq C\|\left(|\xi|^s(1 - \widehat{\varphi})\widehat{f}\,\right)^\vee\|_{L^p}$$

  Introducimos ahora otra función auxiliar θ tal que $\widehat{\theta}(\xi) = |\xi|^s\widehat{\widetilde{\psi}}(\xi)$. A partir de esta función determinamos el bloque diádico asociado:

  $$\Delta_j^\theta(f) = f * \theta_j$$

  en donde $\theta_j(x) = 2^{jn}\theta(2^j x)$.

  Esta función auxiliar nos permite obtener la siguiente fórmula:

  $$\left(|\xi|^s(1 - \widehat{\varphi})\widehat{f}\,\right) = \sum_{j\in\mathbb{N}} |\xi|^s \widehat{\psi}_j(\xi)\widehat{\widetilde{\psi}}_j(\xi)\widehat{f}(\xi) = \sum_{j\in\mathbb{N}} 2^{js}\widehat{\psi}_j(\xi)\widehat{\theta}_j(\xi)\widehat{f}(\xi)$$

  Es decir

  $$\left(|\xi|^s(1 - \widehat{\varphi})\widehat{f}\,\right)^\vee = \sum_{j\in\mathbb{N}} \Delta_j^\theta(2^{js}\Delta_j(f))$$

  En este punto aplicamos el teorema 7 de la lección 2 para obtener la estimación

  $$\|\left(|\xi|^s(1 - \widehat{\varphi})\widehat{f}\,\right)^\vee\|_{L^p} \leq C \left\| \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} |2^{js}\Delta_j f|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p} < +\infty$$

■

3. Espacios Homogéneos

Definición 8 *Un espacio funcional E dotado de una norma $\|\cdot\|_E$ es homogéneo de grado σ si se tiene la relación*

$$\|f_\gamma\|_E = \gamma^{-\sigma}\|f\|_E$$

en donde f_γ es la función dilatada determinada por $f_\gamma(x) = f(\gamma x_1, ..., \gamma x_n)$ con $\gamma > 0$.

Por ejemplo los espacios de Lebesgue L^p son homogéneos de grado $\sigma = n/p$.

Como hemos visto anteriormente, los espacios de Hölder y de Sobolev definidos anteriormente no son espacios funcionales homogéneos pues sus normas no verifican esta propiedad: están construidas por términos de homogeneidad diferente.

Es a veces muy útil disponer de esta propiedad para estos espacios y estos espacios admiten variantes homogéneas que describimos a continuación.

3.1. Espacios de Hölder homogéneos

Definición 9 *Sea $0 < \alpha < 1$. Los espacios de Hölder homogéneos $\dot{\mathcal{C}}^\alpha(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ están definidos por*

$$\dot{\mathcal{C}}^\alpha(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \ : \|f\|_{\dot{\mathcal{C}}^\alpha} < +\infty \qquad \textit{módulo las constantes}\}$$

en donde

$$\|f\|_{\dot{\mathcal{C}}^\alpha} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \sup_{h\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{|f(x+h) - f(x)|}{|h|^\alpha}$$

Observación 8 Este espacio es homogéneo de grado α pues se tiene $\|f_\gamma\|_{\dot{\mathcal{C}}^\alpha} = \gamma^\alpha\|f\|_{\dot{\mathcal{C}}^\alpha}$

Observación 9 Se obtiene la "norma" homogénea $\|\cdot\|_{\dot{\mathcal{C}}^\alpha}$ considerando solo el último término de la norma usual de los espacios de Hölder $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^\alpha}$. Atención: la cantidad $\|\cdot\|_{\dot{\mathcal{C}}^\alpha}$ no es una norma pues toda función constante f verifica $\|f\|_{\dot{\mathcal{C}}^\alpha} = 0$. Es por esta razón que consideramos estes espacio módulo las constantes.

Ejemplo clásico: $|x|^\alpha$ pertenece al espacio $\dot{\mathcal{C}}^\alpha$, pero no al espacio $\mathcal{C}^\alpha$ pues $|x|^\alpha$ no es acotado.

3.2. Espacios de Sobolev homogéneos

La forma más directa de considerar los espacios de Sobolev homogéneos es escribir:

Definición 10 *Sea $s \in \mathbb{R}$ y $1 < p < +\infty$. Los espacios de Sobolev homogéneos $\dot{W}^{s,p}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ están definidos por*

$$\dot{W}^{s,p}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \ : \|f\|_{\dot{W}^{s,p}} < +\infty \qquad \textit{módulo los polinomios}\}$$

en donde

$$\|f\|_{\dot{W}^{s,p}} \simeq \left\| \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} 2^{2js}|\Delta_j f|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p}$$