Lección n°4: Espacios de Besov y Paraproducto

EPN, verano 2010

1. Espacios de Besov

- Hemos visto hasta ahora cómo medir la regularidad de las funciones con los espacios de Hölder $\mathcal{C}^\alpha$ y los espacios de Sobolev $W^{s,p}$
- Existe otra manera de estudiar la regularidad utilizando los espacios de Besov $B^{s,p}_q$ que son espacios con 3 índices:
    - $1 \leq p \leq +\infty$ corresponde a la norma de base L^p que se utiliza
    - $0 \leq s < +\infty$ expresa la regularidad que se exige
    - $1 \leq q \leq +\infty$ expresa una corrección sobre la regularidad
- Existen relaciones entre los espacios de Lebesgue, de Hölder, de Sobolev y de Besov como veremos a continuación. Primero daremos las diferentes caracterizaciones y luego discutiremos este punto.

1.1. Definición clásica

Hay varias formas distintas para presentar los espacios de Besov y dependiendo de los autores hay unas presentaciones que son más clásicas que otras. En este curso empezaremos con la presentación *térmica*.

Definición 1 *Sea $s > 0$ y sean $1 \leq p \leq +\infty$ $1 \leq q < +\infty$. El espacio de Besov no-homogéneo $B^{s,p}_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ está definido por:*

$$B^{s,p}_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \ : \|f\|_{B^{s,p}_q} < +\infty\}$$

en donde

$$\|f\|_{B^{s,p}_q} = \|f\|_{L^p} + \left(\int_0^{+\infty} t^{(k-s/2)q} \left\|\partial_t^k H_t(f)\right\|^q_{L^p} \frac{dt}{t}\right)^{1/q}$$

aquí, k es el más pequeño entero mayor que $s/2$.

Cuando $q = +\infty$ se tiene la modificación usual siguiente:

$$\|f\|_{B^{s,p}_\infty} = \|f\|_{L^p} + \sup_{t>0} t^{(k-s/2)} \left\|\partial_t^k H_t(f)\right\|_{L^p}$$

1.2. Módulos de continuidad

Dado que estamos midiendo la regularidad de las funciones con el parámetro s, es posible caracterizar estos espacios por medio de diferencias, tal como lo hemos visto con los espacios de Hölder:

Definición 2 *Sea $s > 0$ y sean $1 \leq p, q \leq +\infty$. Se tiene la caracterización equivalente siguiente*

$$\|f\|_{B^{s,p}_q} \simeq \|f\|_{L^p} + \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\|D_h^{\lfloor s\rfloor+1} f\|^q_{L^p}}{|h|^{n+sq}} dh\right)^{1/q}$$

en donde $\lfloor s\rfloor$ es el mayor entero menor que s (se tiene $\lfloor s\rfloor < s < \lfloor s\rfloor + 1$).

1.3. Caracterización diádica

Esta es tal vez la forma más popular en la literatura para presentar a los espacios de Besov.

Definición 3 *Sea $s \in \mathbb{R}$ y sean $1 \leq p, q \leq +\infty$ entonces se tiene la caracterización equivalente siguiente:*

$$\|f\|_{B^{s,p}_q} \simeq \|S_0 f\|_{L^p} + \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} 2^{jsq}\|\Delta_j f\|^q_{L^p}\right)^{1/q} \tag{1}$$

Con la modificación usual si $q = +\infty$:

$$\|f\|_{B^{s,p}_\infty} \simeq \|S_0 f\|_{L^p} + \sup_{j\in\mathbb{N}} 2^{js}\|\Delta_j f\|_{L^p}$$

Cada una de estas caracterizaciones tiene su utilidad en función del problema estudiado y del marco sobre el cual se trabaja: muchas veces un problema puede parecer imposible si se lo estudia con una mala caracterización!

1.4. Relaciones entre espacios de Besov, de Lebesgue, de Hölder y de Sobolev

- Los espacios de Besov, al tener más índices, permiter "medir" con mayor precisión cierto tipo de información.
- Cuando estos índices toman ciertos valores muy precisos, obtenemos algunos de los espacios que hemos estudiado anteriormente.
- La forma más directa de ver estas relaciones es utilizando la caracterización diádica.

1.4.1. Espacios de Lebesgue

Teorema 1 *Si $s = 0$, $p, q = 2$ entonces se tiene $B^{0,2}_2 \simeq L^2$.*

Prueba. Se tiene por un lado que

$$\|f\|_{B^{0,2}_2} \simeq \|S_0 f\|_{L^2} + \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} \|\Delta_j f\|^2_{L^2}\right)^{1/2}$$

Pero por otro tenemos

$$\|f\|_{L^2} \simeq \|S_0 f\|_{L^2} + \left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{N}} |\Delta_j f|^2\right)^{1/2}\right\|_{L^2}$$

Para terminar la verificación basta ver que los dos últimos términos de estas caracterizaciones diádicas son similares. Al menos formalmente se tiene

$$\begin{aligned}
\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{N}} |\Delta_j f|^2\right)^{1/2}\right\|^2_{L^2} &= \int_{\mathbb{R}^n} \left|\big(\sum_{j\in\mathbb{N}} |\Delta_j f|^2\big)^{1/2}\right|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j\in\mathbb{N}} |\Delta_j f|^2 dx \\
&= \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^n} |\Delta_j f|^2 dx = \sum_{j\in\mathbb{N}} \|\Delta_j f\|^2_{L^2}
\end{aligned}$$

■

Proposición 1 *Se tienen las siguientes inclusiones de conjuntos:*

$$B^{0,p}_1 \subset L^p \subset B^{0,p}_\infty$$

Prueba.

- Para verificar que $B^{0,p}_1 \subset L^p$, basta mostrar que

$$\|f\|_{L^p} \leq C\|f\|_{B^{0,p}_1}$$

escribimos entonces

$$\|f\|_{L^p} \simeq \|S_0 f\|_{L^p} + \left\| \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} |\Delta_j f|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p} \leq \|S_0 f\|_{L^p} + \sum_{j\in\mathbb{N}} \|\Delta_j f\|_{L^p} \simeq \|f\|_{B^{0,p}_1}$$

- La segunda inclusión es muy sencilla pues se tiene para todo $j \in \mathbb{N}$ la estimación $\|\Delta_j f\|_{L^p} \leq C\|f\|_{L^p}$ y por lo tanto podemos escribir

$$\|f\|_{B^{0,p}_\infty} \simeq \|S_0 f\|_{L^p} + \sup_{j\in\mathbb{N}} \|\Delta_j f\|_{L^p} \leq C\|f\|_{L^p}$$

para obtener la inclusión $L^p \subset B^{0,p}_\infty$.

■

1.4.2. Espacios de Sobolev

Cuando el parámetro de regularidad s no es nulo tenemos la siguiente identificación

Teorema 2 *Si $s \geq 0$, $p, q = 2$ entonces se tiene $B^{s,2}_2 \simeq W^{s,2}$.*

Prueba. La verificación es la misma que para el caso de los espacios de Lebesgue, solo hay que tener cuidado con la potencia diádica 2^{js}.

■

Este resultado corresponde a un caso muy particular y es un solo principio. El caso general esta dado por el teorema a continuación:

Teorema 3 *Sean $s \geq 0$ y $1 \leq p, q \leq \infty$ entonces se tienen las inclusiones de espacios:*

$$B^{s,p}_{\text{mín}(p,2)} \subset W^{s,2} \subset B^{s,p}_{\text{máx}(p,2)}$$

Prueba.

- si $p > 2$ debemos verificar $B^{s,p}_2 \subset W^{s,2} \subset B^{s,p}_p$:
  - $B^{s,p}_2 \subset W^{s,2}$:
  - $W^{s,2} \subset B^{s,p}_p$
- si $p < 2$ debemos verificar $B^{s,p}_p \subset W^{s,2} \subset B^{s,p}_2$

■

Observación 1 Moraleja: entre dos espacios de Besov está un espacio de Sobolev y quien trabaja con espacios de Sobolev, también trabaja con espacios de Besov.

1.4.3. Espacios de Hölder

Si se tiene $p = q = +\infty$ obtenemos la siguiente identificación:

Teorema 4 *Sea $s \geq 0$, se tiene la identificación:*

$$B^{s,\infty}_{\infty} \simeq \mathcal{C}^s$$

Prueba. Una vez más, la caracterización de estos espacios en función de los bloques diádicos hace esta verificación inmediata:

$$\|f\|_{B^{s,\infty}_{\infty}} \simeq \|S_0 f\|_{L^\infty} + \sup_{j\in\mathbb{N}} 2^{js}\|\Delta_j f\|_{L^\infty} \simeq \|f\|_{\mathcal{C}^s}$$

■

1.4.4. Espacios de Besov

- En esta sección vamos a ver las relaciones generales que existen entre los espacios de Besov
- Notar la utilización intensiva de las desigualdades de Bernstein

Teorema 5 (Desigualdades de Sobolev) *Sea $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq +\infty$ y $1 \leq q_1 \leq q_2 \leq +\infty$. Entonces para todo real s se tiene la inclusión*

$$B^{s,p_1}_{q_1} \subset B^{\alpha,p_2}_{q_2}$$

en donde $\alpha = s - n(1/p_1 - 1/p_2)$.

Prueba. Debemos verificar que se tiene $\|f\|_{B^{\alpha,p_2}_{q_2}} \leq C\|f\|_{B^{s,p_1}_{q_1}}$ y vamos a hacerlo en dos partes.

- Para el primer término $\|S_0 f\|_{L^{p_2}}$, tenemos por las desigualdades de Bernstein la desigualdad

$$\|S_0 f\|_{L^{p_2}} \leq C\|f\|_{L^{p_1}}$$

- Debemos entonces concentrarnos el el segundo término. Es decir debemos mostrar

$$\left(\sum_{j\in\mathbb{N}} \left(2^{j\alpha}\|\Delta_j f\|_{L^{p_2}}\right)^{q_2}\right)^{1/q_2} \leq C\left(\sum_{j\in\mathbb{N}} \left(2^{js}\|\Delta_j f\|_{L^{p_1}}\right)^{q_1}\right)^{1/q_1}$$

  Usando las desigualdades de Bernstein tenemos

$$\|\Delta_j f\|_{L^{p_2}} \leq 2^{jn(1/p_1 - 1/p_2)}\|\Delta_j f\|_{L^{p_1}}$$

  ahora usamos la definición del parámetro α para obtener

$$2^{j\alpha}\|\Delta_j f\|_{L^{p_2}} \leq 2^{js}\|\Delta_j f\|_{L^{p_1}}$$

  En este punto utilizamos para terminar la demostración la inclusión de espacios $\ell^{q_1}(\mathbb{N}) \subset \ell^{q_2}(\mathbb{N})$ que es válida pues $q_1 \leq q_2$.

■

Teorema 6 (Interpolación) *Si $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ tales que $s_1 < s_2$, si $0 < \theta < 1$ y si $1 < q < +\infty$, entonces se tiene las desigualdades siguientes:*

$$\|f\|_{B^{s,p}_q} \leq \|f\|^{\theta}_{B^{s_1,p}_q}\|f\|^{1-\theta}_{B^{s_2,p}_q}$$

en donde $s = \theta s_1 + (1-\theta)s_2$.

Teorema 7 (Dualidad) *Sea $1 \leq p \leq +\infty$ y $1 \leq q \leq +\infty$. Entonces para todo real s se tiene la identificación*

$$\left(B^{s,p}_q\right)' = B^{-s,p'}_{q'}$$

Observación 2 Es muy importante notar que la teoría de Littlewood-Paley proporciona un marco unificado para estudiar las diferentes relaciones entre todos estos espacios funcionales.