Lección n°1: Espacios de Lebesgue, espacios de Lorentz, Funciones Maximales UCE, verano 2013

Introducción

Como vamos a ver en este curso, los espacios de Lebesgue constituyen la herramienta de base para la construcción de muchos otros espacios funcionales y puede considerárselos como una *materia prima* necesaria para la correcta comprensión de estos espacios de funciones. En este sentido, muchísimas de las propiedades de los espacios de Lebesgue se transmitirán a los diferentes espacios que serán construidos con ellos y es por esta razón que es necesario tener en mente las principales propiedades y características de los espacios de Lebesgue.

Sin embargo, en muchas situaciones prácticas, los espacios de Lebesgue no son suficientes y es necesario medir el tamaño de las funciones de forma más precisa. Para ello vamos a estudiar los espacios Lorentz débiles, que son una generalización de los espacios de Lebesgue, y que tienen varias aplicaciones interesantes, especialmente por las importantes relaciones que existen entre estos espacios y las funciones maximales lo cual nos permitirá deducir algunos resultados muy importantes.

1. Espacios de Lebesgue

En todo esta lección trabajaremos principalmente sobre el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$, con $n \geq 1$, dotado de su estructura de grupo usual y de la norna canónica $|x| = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}$. Consideraremos además el espacio medido $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx)$ en donde $\mathcal{B}or(\mathbb{R}^n)$ es la σ-álgebra de los borelianos de $\mathbb{R}^n$ y dx es la medida de Lebesgue. De ser necesario consideraremos también espacios medidos más generales $(X, \mathcal{B}or(X), \mu)$.

Definición 1 (Espacios de Lebesgue) *Definimos sobre el espacio medido $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx)$ los espacios de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^n)$, con $1 \leq p < +\infty$, como el conjunto de funciones $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, cuyo módulo a la potencia p es integrable. Este espacio admite la siguiente norma:*

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx\right)^{1/p}.$$

Si $p = +\infty$, definimos el espacio $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ como el conjunto de funciones esencialmente acotadas, normado por la funcional

$$\|f\|_{L^\infty} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} ess|f(x)|.$$

Proposición 1 (Estructura) *Los espacios de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^n)$ son:*

1) *espacios de Banach si $1 \leq p \leq +\infty$.*

2) *espacios separables si $1 \leq p < +\infty$ (atención: el espacio $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ **no** es separable)*

Observación 1 *Si $0 < p < 1$, los espacios de Lebesgue L^p no son espacios localmente convexos y no pueden ser normados, lo que hace su utilización poco interesante en las aplicaciones.*

Proposición 2 (Resultados de Densidad)

1) *El conjunto de funciones simples integrables es denso en* $L^p(\mathbb{R}^n)$ *si* $1 \leq p < +\infty$.

2) *El espacio de funciones continuas a soporte compacto es denso en* $L^p(\mathbb{R}^n)$ *si* $1 \leq p < +\infty$.

Proposición 3 (Dualidad y Reflexibilidad)

1) *Si* $1 < p, q < +\infty$ *son tales que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *entonces el espacio dual del espacio de Lebesgue* $L^p(\mathbb{R}^n)$ *es el espacio de Lebesgue* $L^q(\mathbb{R}^n)$. *Es decir que* $(L^p)' = L^q$.
En particular, es posible calcular la norma $\|\cdot\|_{L^p}$ *por dualidad:*

$$\|f\|_{L^p} = \sup_{\|g\|_{L^q}=1} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dx \right|$$

Además estos espacios son reflexivos y se tiene $(L^p)'' = L^p$.

2) *Si* $p = 1$, *el espacio dual del espacio de Lebesgue* $L^1(\mathbb{R}^n)$ *es el espacio de Lebesgue* $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. *Pero este espacio no es reflexivo.*

Proposición 4 (Teoremas Clásicos)

1) ***Teorema de Convergencia Monótona de Beppo Levi****: sea* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *una sucesión creciente de funciones medibles definidas sobre* $\mathbb{R}^n$ *a valores en* $\overline{\mathbb{R}}_+$ *y sea* f *tal que* $\lim\limits_{k\to+\infty} f_k(x) = f(x)$ *en casi todas partes. Entonces*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \lim_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x)dx$$

2) ***Lema de Fatou****: sea* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de funciones medibles definidas sobre* $\mathbb{R}^n$ *a valores en* $\overline{\mathbb{R}}_+$. *Entonces*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \liminf_{k\to+\infty} f_k(x)dx \leq \liminf_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x)dx$$

3) ***Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue****: sea* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de funciones medibles definidas sobre* $\mathbb{R}^n$ *a valores en* $\overline{\mathbb{R}}$. *Si* $\lim\limits_{k\to+\infty} f_k(x) = f(x)$ *en casi todas partes y si existe una función integrable* $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que* $|f(x)| \leq g(x)$ *en casi todas partes, entonces la función* f *es integrable y se tiene*

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx$$

4) ***Teorema de Fubini-Tonelli****: sean* $(X, \mathcal{B}or(X), \mu)$ *y* $(Y, \mathcal{B}or(Y), \nu)$ *dos espacios medidos.*

Si $f : X \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ *es una función* $\mathcal{B}or(X) \otimes \mathcal{B}or(Y)$*-medible,*
entonces las aplicaciones $x \longmapsto \int_Y f(x,y)d\nu(y)$ y $y \longmapsto \int_X f(x,y)d\mu(x)$ *son* $\mathcal{B}or(X)$*- y* $\mathcal{B}or(Y)$*-medibles respectivamente y se tiene*

$$\int_{X\times Y} f(x,y)d\mu\otimes\nu(x,y) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)d\mu(x) \right) d\nu(y) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)d\nu(y) \right) d\mu(x)$$

Proposición 5 (Desigualdades importantes)

1) ***Desigualdad de Hölder***: *si* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *y* $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ *con* $1 \leq p, q \leq +\infty$ *y tales que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *entonces se tiene la desigualdad:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)|dx \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}$$

2) ***Desigualdad de Minkowski continua***: *sean* $(X, \mathcal{B}or(X), \mu)$ *y* $(Y, \mathcal{B}or(Y), \nu)$ *dos espacios medidos. Si* $f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{K}$ *es una función* $\mathcal{B}or(X) \otimes \mathcal{B}or(Y)$*-medible y si* $1 \leq p < +\infty$ *entonces*

$$\left(\int_X \left(\int_Y |f(x,y)|d\nu(y)\right)^p d\mu(x)\right)^{1/p} \leq \int_Y \left(\int_X |f(x,y)|^p d\mu(x)\right)^{1/p} d\nu(y)$$

3) ***Desigualdad de Interpolación***: *si* $f \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n) \cap L^{p_1}(\mathbb{R}^n)$ *con* $1 \leq p_0 < p_1 \leq +\infty$, *entonces para todo* $\theta \in [0, 1]$ *se tiene que* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *con* $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_0} + \frac{1-\theta}{p_1}$. *Además se tiene la desigualdad*

$$\|f\|_{L^p} \leq \|f\|^{\theta}_{L^{p_0}} \|f\|^{1-\theta}_{L^{p_1}}$$

4) ***Desigualdad de Jensen***: *sea* $(X, \mathcal{B}or(X), \mu)$ *un espacio medido tal que* $\mu(X) = 1$. *Si* $\varphi : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *es una función convexa y si* $f \in L^1(X)$ *es una función tal que* $f(x) \in I$ *para* μ*-casi todo* $x \in X$, *entonces se tiene la desigualdad:*

$$\varphi\left(\int_X f(x)d\mu(x)\right) \leq \int_X \varphi\big(f\big)(x)d\mu(x)$$

5) ***Desigualdad de Tchebychev:*** *sea* $(X, \mathcal{B}or(X), \mu)$ *un espacio medido y sea* $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ *una función tal que* $f \in L^p(X)$ *con* $1 \leq p < +\infty$. *Entonces, para todo* $\alpha > 0$ *se tiene la desigualdad*

$$\mu\big(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}\big)^{1/p} \leq \frac{1}{\alpha}\|f\|_{L^p}$$

Observación 2 *Estos resultados se mantienen si se consideran los espacios de sucesiones* $\ell^p(\mathbb{N})$ *con* $1 \leq p \leq +\infty$, *caracterizados por la funcional*

$$\|a\|_{\ell^p} = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^p\right)^{1/p} \quad \text{si } 1 \leq p < +\infty \quad \text{y} \quad \|a\|_{\ell^\infty} = \sup_{n\in\mathbb{N}}|a_n| \quad \text{si } p = +\infty.$$

Definición 2 (Espacios de Lebesgue locales) *Definimos sobre el espacio medido* $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx)$ *los espacios de Lebesgue locales* $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$, *con* $1 \leq p < +\infty$, *como el conjunto de funciones* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ *con* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$, *cuyo módulo a la potencia* p *es integrable sobre todo compacto* K*:*

$$L^p_{loc}(\mathbb{R}^n) = \left\{f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{K} : \|f\|_{L^p(K)} = \left(\int_K |f(x)|^p dx\right)^{1/p} < +\infty, \quad \forall K \subset \mathbb{R}^n \text{ compacto}\right\}$$

Proposición 6 (Estructura) *Sea* $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión exhaustiva de compactos de* $\mathbb{R}^n$ *(es decir que* $\mathbb{R}^n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$*). Los espacios de Lebesgue locales* $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ *son espacios de Fréchet para la familia de semi-normas* $\|\cdot\|_{L^p(K_n)}$.

Proposición 7 (Inclusiones) *Para todo* $1 \leq p \leq +\infty$ *se tienen las inclusiones* $L^p(\mathbb{R}^n) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

2. Espacios de Lorentz

- Son una generalización de los espacios de Lebesgue: miden el "tamaño" de las funciones.
- Muy útiles cuando se trabaja con operadores, es decir en todo el análisis.
- Muchas veces sólo se disponen de estimaciones en donde intervienen los espacios de Lorentz no se puede pasar a estimaciones más fuertes en donde intervienen espacios de Lebesgue.

2.1. Función de distribución

Definición 3 *Sea* $(X, \mathcal{B}or(X), \mu)$ *un espacio medido, sea* $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ *una función medible y sea* $\alpha \in [0, +\infty[$ *un real. Definimos sobre* $[0, +\infty[$ *la* función de distribución asociada a la función f *por*

$$d_f(\alpha) = \int_X \mathbb{1}_{\{|f(x)|>\alpha\}}(x)d\mu(x) = \mu\left(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}\right).$$

Proposición 8 *Sea* $(X, \mathcal{B}or(X), \mu)$ *un espacio medido y sean* $f, g : X \longrightarrow \mathbb{K}$ *dos funciones medibles. Entonces, para todo* $\alpha, \beta \geq 0$ *tenemos:*

(1) d_f *es decreciente y continua a la derecha sobre* $[0, +\infty[$*,*

(2) si $|g(x)| \leq |f(x)|$ μ*-c.t.p. entonces* $d_g(\alpha) \leq d_f(\alpha)$*, para todo* $\alpha \geq 0$*,*

(3) para toda constante $\lambda \in \mathbb{K}^*$*, se tiene* $d_{\lambda f}(\alpha) = d_f(\alpha/|\lambda|)$*, para todo* $\alpha \geq 0$*,*

(4) $d_{f+g}(\alpha + \beta) \leq d_f(\alpha) + d_g(\beta)$*,*

(5) $d_{fg}(\alpha\beta) \leq d_f(\alpha) + d_g(\beta)$*.*

Proposición 9 *Sea* $(X, \mathcal{B}or(X), \mu)$ *un espacio medido, sea* $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ *una función medible y sea* $1 \leq p < +\infty$ *un parámetro real. Se tiene entonces la identidad*

$$\|f\|_{L^p}^p = p \int_0^{+\infty} \alpha^{p-1} d_f(\alpha) d\alpha.$$

Prueba.

$$p \int_0^{+\infty} \alpha^{p-1} d_f(\alpha) d\alpha = p \int_0^{+\infty} \alpha^{p-1} \left(\int_X \mathbb{1}_{\{|f|>\alpha\}}(x) d\mu(x) \right) d\alpha.$$

Aplicamos el teorema de Fubini en la última integral para obtener

$$= p \int_X \int_0^{+\infty} \alpha^{p-1} \mathbb{1}_{\{|f|>\alpha\}}(x) d\alpha \, d\mu(x) = p \int_X \int_0^{|f(x)|} \alpha^{p-1} d\alpha \, d\mu(x) = \int_X |f|^p d\mu(x) = \|f\|_{L^p}^p. \quad \blacksquare$$

2.2. Espacios de Lorentz $L^{p,\infty}$

También llamados espacios de *Lebesgue débiles* o espacios *de Marcinkiewicz*.

Definición 4 *Sea* $(X, \mathcal{B}or(X), \mu)$ *un espacio medido y sea* $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ *una función medible.*

1) Sea $1 \leq p < +\infty$ *un número real, diremos que* f *pertenece al espacio* $L^{p,\infty}(X)$ *si la cantidad*

$$\|f\|_{L^{p,\infty}} = \sup_{\alpha>0} \left\{ \alpha \, d_f^{1/p}(\alpha) \right\} = \inf_{C>0} \left\{ d_f(\alpha) \leq \frac{C^p}{\alpha^p}, \forall \alpha > 0 \right\} \qquad \textit{es finita.}$$

2) El espacio $L^{\infty,\infty}(X)$ *es por definición el espacio* $L^\infty(X)$*.*

Proposición 10 *Sea $1 \leq p < +\infty$ y sea $(X, \mathcal{B}or(X), \mu)$ un espacio medido. Entonces tenemos la inclusión:*

$$L^p(X) \subset L^{p,\infty}(X).$$

$$\Longleftrightarrow \|f\|_{L^{p,\infty}} \leq \|f\|_{L^p}.$$

Esta inclusión es estricta.

Prueba.

- Sea $\alpha > 0$ un número real, entonces

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^p}^p &= \int_X |f(x)|^p d\mu(x) = \int_{\{|f|>\alpha\}} |f(x)|^p d\mu(x) + \int_{\{|f|\leq\alpha\}} |f(x)|^p d\mu(x) \\
&\geq \int_{\{|f|>\alpha\}} |f(x)|^p d\mu(x) \geq \alpha^p \int_{\{|f|>\alpha\}} d\mu(x) = \alpha^p d_f(\alpha).
\end{aligned}$$

  Es decir, para todo $\alpha > 0$, $\|f\|_{L^p} \geq \alpha d_f^{1/p}(\alpha)$.

- La inclusión es estricta: Sea la función $f : x \longmapsto |x|^{-n/p}$ definida sobre $X = \mathbb{R}^n$. Se tiene $f \notin L^p(\mathbb{R}^n)$. Pero $\|f\|_{L^{p,\infty}}$ es igual a la raiz p-ésima de la medida de la bola unidad de $\mathbb{R}^n$, en efecto, un cambio de variable permite ver que

$$d_f^{1/p}(\alpha) = \alpha^{-1}|B(0,1)|^{1/p}.$$

  Luego se tiene $\|f\|_{L^{p,\infty}} = |B(0,1)|^{1/p}$. ■

Primera utilidad de los espacios de Lorentz:
$\Longrightarrow$ Permiten mejorar el resultado de interpolación entre los espacios de Lebesgue.

Sabíamos que se tiene la estimación $\|f\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^1}^{1/r} \|f\|_{L^\infty}^{1-1/r}$ para toda función $f \in L^1(X) \cap L^\infty(X)$, con $1 < r < +\infty$. Con los espacios de Lorentz tenemos algo **mejor**:

Proposición 11 *Sean $1 \leq p < q \leq +\infty$ y sea $f \in L^{p,\infty}(X) \cap L^{q,\infty}(X)$, entonces $f \in L^r(X)$ para todo $p < r < q$:*

$$\|f\|_{L^r} \leq C(p,q,r) \|f\|_{L^{p,\infty}}^\theta \|f\|_{L^{q,\infty}}^{1-\theta}$$

con $\theta = \frac{p}{r}\frac{q-r}{q-p}$ si $q < +\infty$ y $\theta = p/r$ si $q = +\infty$.

Prueba.

- Sea $q < +\infty$. Sabemos que

$$d_f(\alpha) \leq \min\left(\frac{\|f\|_{L^{p,\infty}}^p}{\alpha^p}, \frac{\|f\|_{L^{q,\infty}}^q}{\alpha^q}\right)$$

  Fijemos $T = \left(\frac{\|f\|_{L^{q,\infty}}^q}{\|f\|_{L^{p,\infty}}^p}\right)^{\frac{1}{q-p}}$ para escribir

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^r}^r &= r\int_0^{+\infty} \alpha^{r-1} d_f(\alpha) d\alpha \leq r\int_0^{+\infty} \alpha^{r-1} \min\left(\frac{\|f\|_{L^{p,\infty}}^p}{\alpha^p}, \frac{\|f\|_{L^{q,\infty}}^q}{\alpha^q}\right) d\alpha \\
&\leq r\int_0^T \alpha^{r-1-p} \|f\|_{L^{p,\infty}}^p d\alpha + r\int_T^{+\infty} \alpha^{r-1-q} \|f\|_{L^{q,\infty}}^q d\alpha \qquad (1) \\
&\leq \frac{r}{r-p}\|f\|_{L^{p,\infty}}^p T^{r-p} + \frac{r}{q-r}\|f\|_{L^{q,\infty}}^q T^{r-q} = \left(\frac{r}{r-p} + \frac{r}{q-r}\right) (\|f\|_{L^{p,\infty}}^p)^{\frac{q-r}{q-p}} (\|f\|_{L^{q,\infty}}^q)^{\frac{r-p}{q-p}}
\end{aligned}$$

- Sea $q = +\infty$. Como $d_f(\alpha) = 0$ si $\alpha > \|f\|_{L^\infty}$ entonces basta utilizar la estimación $d_f(\alpha) \leq \alpha^{-p}\|f\|_{L^{p,\infty}}^p$ para la parte $\alpha \leq \|f\|_{L^\infty}$ en la integral (1) para obtener

$$\|f\|_{L^r}^r \leq \frac{r}{r-p}\|f\|_{L^{p,\infty}}^p \|f\|_{L^\infty}^{r-p} \quad ■$$

Teorema 1 (Caracterización) *Sean $1 < p < +\infty$ y sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función medible. Entonces $f \in L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$ si y solo si*

$$(\forall A > 0)\ (\exists f_0, f_1 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R})\ t.q. \quad f(x) = f_0(x) + f_1(x)$$

con $\|f_0\|_{L^{p_0}} \leq C_0 A^{\theta-1}$ y $\|f_1\|_{L^{p_1}} \leq C_0 A^{\theta}$ con $A > 0$, $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_0} + \frac{1-\theta}{p_1}$, $p_0 < p < p_1$ y $0 < \theta < 1$.

Además se tiene

$$\|f\|_{L^{p,\infty}} = \inf\Big\{C > 0 :\ f = f_0 + f_1 \text{ con } \|f_0\|_{L^{p_0}} \leq C A^{\theta-1},\ \|f_1\|_{L^{p_1}} \leq C A^{\theta}\Big\}$$

Prueba.

($\Longrightarrow$) Sea $f \in L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$. Definimos $f_0 = f\mathbb{1}_{\{x\in\mathbb{R}^n:|f(x)|>B\}}$ y $f_1 = f\mathbb{1}_{\{x\in\mathbb{R}^n:|f(x)|\leq B\}}$ con un cierto $B > 0$. Mostremos que $f_0 \in L^{p_0}$ y que $f_1 \in L^{p_1}$:

- Para f_0:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |f_0|^{p_0}dx &= \int_{\{|f(x)|>B\}} |f|^{p_0}\ dx = \sum_{j=0}^{+\infty} \int_{\{2^jB<|f(x)|<2^{j+1}B\}} |f|^{p_0}dx \leq \sum_{j=0}^{+\infty}(2^{j+1}B)^{p_0} \int_{\{2^jB<|f(x)|<2^{j+1}B\}} dx \\ &\leq \sum_{j=0}^{+\infty}(2^{j+1}B)^{p_0} d_f(2^jB) \leq \sum_{j=0}^{+\infty}(2^{j+1}B)^{p_0}(2^jB)^{-p}\|f\|^p_{L^{p,\infty}} = B^{p_0-p}C\|f\|^p_{L^{p,\infty}}\end{aligned}$$

  la suma anterior converge pues $p_0 < p$ y por lo tanto $f_0 \in L^{p_0}$.

- Para f_1:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |f_1|^{p_1}dx &= \int_{\{|f(x)|\leq B\}} |f|^{p_1}\ dx = \sum_{j=0}^{+\infty} \int_{\{2^{-j}B<|f(x)|<2^{-j+1}B\}} |f|^{p_1}dx \leq \sum_{j=0}^{+\infty}(2^{-j+1}B)^{p_1} \int_{\{2^{-j}B<|f(x)|<2^{-j+1}B\}} dx \\ &\leq \sum_{j=0}^{+\infty}(2^{-j+1}B)^{p_1} d_f(2^{-j}B) \leq \sum_{j=0}^{+\infty}(2^{-j+1}B)^{p_1}(2^{-j}B)^{-p}\|f\|^p_{L^{p,\infty}} = B^{p_1-p}C\|f\|^p_{L^{p,\infty}}\end{aligned}$$

  la suma anterior converge pues $p < p_1$ y por lo tanto $f_1 \in L^{p_1}$.

Reescribimos estas estimaciones de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\|f_0\|_{L^{p_0}} &\leq CB^{1-p/p_0}\|f\|^{p/p_0}_{L^{p,\infty}} = C\|f\|_{L^{p,\infty}}\left(\frac{B}{\|f\|_{L^{p,\infty}}}\right)^{1-p/p_0} \\ \|f_1\|_{L^{p_1}} &\leq CB^{1-p/p_1}\|f\|^{p/p_1}_{L^{p,\infty}} = C\|f\|_{L^{p,\infty}}\left(\frac{B}{\|f\|_{L^{p,\infty}}}\right)^{1-p/p_1}\end{aligned}$$

basta entonces escribir $A = \left(\frac{B}{\|f\|_{L^{p,\infty}}}\right)^{1/p\times(1/p_0-1/p_1)}$ y $C_0 = C\|f\|_{L^{p,\infty}}$.

($\Longleftarrow$) Tenemos la estimación $\big|\{|f(x)| > \alpha\}\big| \leq \big|\{|f_0(x)| > \alpha/2\}\big| + \big|\{|f_1(x)| > \alpha/2\}\big|$. Aplicando la desigualdad de Tchebychev y las hipótesis obtenemos

$$\begin{aligned}\big|\{|f(x)| > \alpha\}\big| &\leq C\frac{\|f_0\|^{p_0}_{L^{p_0}}}{\alpha^{p_0}} + C\frac{\|f_1\|^{p_1}_{L^{p_1}}}{\alpha^{p_1}} \leq \frac{C_0^{p_0}A^{(\theta-1)p_0}}{\alpha^{p_0}} + \frac{C_0^{p_1}A^{\theta p_1}}{\alpha^{p_1}} \\ &\leq \left(\frac{C_0}{\alpha}\right)^p\left[A^{(\theta-1)p_0}\left(\frac{C_0}{\alpha}\right)^{p_0-p} + A^{\theta p_1}\left(\frac{C_0}{\alpha}\right)^{p_1-p}\right]\end{aligned}$$

Para terminar basta escojer A tal que la cantidad entre corchete anterior siempre sea igual a 1: tenemos entonces que $f \in L^{p,\infty}$. ■

3. Teoremas de interpolación de Marcinkiewicz y de Riesz-Thorin

- es un tipo de resultado **esencial** en el análisis.
- estos teoremas son la fuente de muchas aplicaciones muy útiles.
- son el punto de partida de la teoría de interpolación entre espacios de Banach.

Definición 5 *Sea $(X, \mathcal{B}or(X), \mu)$ un espacio medido. Definimos $L^{p_0}(X) + L^{p_1}(X)$ como el espacio de todas las funciones f tales que $f = f_0 + f_1$ en donde $f_0 \in L^{p_0}(X)$ y $f_1 \in L^{p_1}(X)$.*

Proposición 12 *Sea $(X, \mathcal{B}or(X), \mu)$ un espacio medido. Si $p_0 < p_1$ se tiene $L^p(X) \subset L^{p_0}(X) + L^{p_1}(X)$ para todo p tal que $p_0 < p < p_1$.*

Prueba. Sea f una función de $L^p(X)$ y sea γ una constante positiva fijada. Escribimos

$$f_0(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| > \gamma \\ 0 & \text{si } |f(x)| \leq \gamma \end{cases} \qquad f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| \leq \gamma \\ 0 & \text{si } |f(x)| > \gamma \end{cases}$$

de manera que $f = f_0 + f_1$.

Puesto que $p_0 - p \leq 0$ se tiene

$$\int_X |f_0(x)|^{p_0} d\mu(x) = \int_X |f_0(x)|^p |f_0(x)|^{p_0 - p} d\mu(x) \leq \gamma^{p_0 - p} \int_X |f(x)|^p d\mu(x)$$

De forma similar tenemos

$$\int_X |f_1(x)|^{p_1} d\mu(x) = \int_X |f_1(x)|^p |f_1(x)|^{p_1 - p} d\mu(x) \leq \gamma^{p_1 - p} \int_X |f(x)|^p d\mu(x),$$

luego $f_0 \in L^{p_0}(X)$ y $f_1 \in L^{p_1}(X)$. ■

3.1. Interpolación de Marcinkiewicz

Un operador sublineal verifica $T(\alpha f + \beta g) \leq \alpha T(f) + \beta T(g)$.

Teorema 2 *Sean $(X, \mathcal{B}or(X), \mu)$ y $(Y, \mathcal{B}or(X), \nu)$ dos espacios medidos. Sea $1 \leq p_0 < p_1 \leq +\infty$. Sea T un operador sublineal definido en el espacio $L^{p_0}(X) + L^{p_1}(X)$ y que toma valores en el espacio de funciones medibles definidas sobre Y.*
Supongamos que existen dos constantes positivas A_0 y A_1 tales que:

$$\|T(f)\|_{L^{p_0,\infty}(Y)} \leq A_0 \|f\|_{L^{p_0}(X)}, \qquad \textit{para toda función } f \in L^{p_0}(X), \tag{2}$$

$$\|T(f)\|_{L^{p_1,\infty}(Y)} \leq A_1 \|f\|_{L^{p_1}(X)}, \qquad \textit{para toda función } f \in L^{p_1}(X). \tag{3}$$

Entonces, para todo $p_0 < p < p_1$ y para todo $f \in L^p(X)$, tenemos la estimación:

$$\|T(f)\|_{L^p(Y)} \leq A \|f\|_{L^p(X)}, \tag{4}$$

en donde

$$A = 2 \left(\frac{p}{p - p_0} + \frac{p}{p_1 - p} \right)^{\frac{1}{p}} A_0^{\frac{1/p - 1/p_1}{1/p_0 - 1/p_1}} A_1^{\frac{1/p_0 - 1/p}{1/p_0 - 1/p_1}}. \tag{5}$$

Demostración.

- Supongamos que $p_1 < +\infty$ y fijemos una función $f \in L^p(X)$ y un parámetro $\alpha > 0$. Utilizamos la descomposición anterior de la función f escribiendo $f = f_0^\alpha + f_1^\alpha$ en donde

$$f_0^\alpha(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| > \delta\alpha \\ 0 & \text{si } |f(x)| \leq \delta\alpha \end{cases} \qquad f_1^\alpha(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| \leq \delta\alpha \\ 0 & \text{si } |f(x)| > \delta\alpha. \end{cases}$$

Aqui δ es un parámetro positivo cuyo valor será determinado posteriormente. Obsérvese que f_0^α pertenece al espacio $L^{p_0}(X)$ y que f_1^α pertenece al espacio $L^{p_1}(X)$.

Utilizemos la hipótesis de sublinealidad para obtener

$$|T(f)| = |T(f_0^\alpha + f_1^\alpha)| \leq |T(f_0^\alpha)| + |T(f_1^\alpha)|,$$

lo que implica las inclusiones $\{x : |T(f)(x)| > \alpha\} \subseteq \{x : |T(f_0^\alpha)| > \alpha/2\} \cup \{x : |T(f_1^\alpha)| > \alpha/2\}$, de donde se tiene, al nivel de las funciones de distribución

$$d_{T(f)}(\alpha) \leq d_{T(f_0^\alpha)}(\alpha/2) + d_{T(f_1^\alpha)}(\alpha/2). \tag{6}$$

Esta estimación anterior, junto con a las hipótesis (2) y (3), nos da

$$d_{T(f)}(\alpha) \leq \frac{A_0^{p_0}}{(\alpha/2)^{p_0}} \int_{\{|f|>\delta\alpha\}} |f(x)|^{p_0} d\mu(x) + \frac{A_1^{p_1}}{(\alpha/2)^{p_1}} \int_{\{|f|\leq\delta\alpha\}} |f(x)|^{p_1} d\mu(x)$$

Ahora vamos a contruir la norma L^p de $T(f)$ utilizando la proposición 9, en efecto:

$$\begin{aligned} \|T(f)\|_{L^p}^p = p\int_0^{+\infty} \alpha^{p-1} d_{T(f)}(\alpha) d\alpha &\leq (2A_0)^{p_0} p \int_0^{+\infty} \alpha^{p-p_0-1} \int_{\{|f|>\delta\alpha\}} |f(x)|^{p_0} d\mu(x) d\alpha \\ &+(2A_1)^{p_1} p \int_0^{+\infty} \alpha^{p-p_1-1} \int_{\{|f|\leq\delta\alpha\}} |f(x)|^{p_1} d\mu(x) d\alpha. \end{aligned}$$

Aplicamos el teorema de Fubini para obtener

$$\|T(f)\|_{L^p}^p \leq (2A_0)^{p_0} p \int_X |f(x)|^{p_0} \int_0^{|f|/\delta} \alpha^{p-p_0-1} d\alpha d\mu(x) + (2A_1)^{p_1} p \int_X |f(x)|^{p_1} \int_{|f|/\delta}^{+\infty} \alpha^{p-p_1-1} d\alpha d\mu(x),$$

es decir

$$\|T(f)\|_{L^p}^p \leq (2A_0)^{p_0} \frac{p}{p-p_0} \int_X |f(x)|^{p_0} \frac{|f(x)|^{p-p_0}}{\delta^{p-p_0}} d\mu(x) + (2A_1)^{p_1} \frac{p}{p_1-p} \int_X |f(x)|^{p_1} \frac{|f(x)|^{p-p_1}}{\delta^{p-p_1}} d\mu(x).$$

De donde se obtiene

$$\|T(f)\|_{L^p}^p \leq \left[(2A_0)^{p_0} \frac{p}{p-p_0} \delta^{p_0-p} + (2A_1)^{p_1} \frac{p}{p_1-p} \delta^{p_1-p}\right] \|f\|_{L^p}^p.$$

Falta ahora fijar un valor de δ para terminar la prueba; para ello es suficente escribir $\delta = (2A_0)^{\frac{p_0}{p_1-p_0}} (2A_1)^{\frac{p_1}{p_0-p_1}}$. El lector verificará sin problema que se tiene la estimación deseada.

- Caso cuando $p_1 = +\infty$. Escribamos otra vez $f = f_0^\alpha + f_1^\alpha$ con

$$f_0^\alpha(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| > \gamma\alpha \\ 0 & \text{si } |f(x)| \leq \gamma\alpha \end{cases} \qquad f_1^\alpha(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| \leq \gamma\alpha \\ 0 & \text{si } |f(x)| > \gamma\alpha. \end{cases}$$

Tenemos las estimaciones siguientes

$$\|T(f_1^\alpha)\|_{L^\infty} \leq A_1 \|f_1^\alpha\|_{L^\infty} \leq A_1\gamma\alpha = \alpha/2$$

siempre y cuando fijemos $\gamma = \frac{1}{2A_1}$. Se deduce de esto que el conjunto $\{x : |T(f_1^\alpha)| > \alpha/2\}$ es de medida cero; por lo tanto $d_{T(f)}(\alpha) \leq d_{T(f_0^\alpha)}(\alpha/2)$. Se construye otra vez la norma L^p de $T(f)$ utilizando la proposición 9:

$$\|T(f)\|_{L^p}^p \leq p\int_0^{+\infty} \alpha^{p-1} d_{T(f_0^\alpha)}(\alpha/2)d\alpha.$$

Aplicando el teorema de Fubini se tiene

$$\leq (2A_0)^{p_0} p \int_X |f(x)|^{p_0} \int_0^{2A_1|f|} \alpha^{p-p_0-1} d\alpha d\mu(x).$$

Es decir

$$\leq (2A_0)^{p_0} \frac{p}{p-p_0} \int_X |f(x)|^{p_0} |f(x)|^{p-p_0} (2A_1)^{p-p_0} d\mu(x).$$

de donde concluimos que

$$\|T(f)\|_{L^p}^p \leq 2^p A_0^{p_0} A_1^{p-p_0} \frac{p}{p-p_0} \|f\|_{L^p}^p$$

lo que termina la prueba. ■

3.2. Aplicación: Funciones Maximales

- Funciones de gran importancia en el análisis armónico: una herramienta indispensable
- Ejemplo de operadores que **no** son acotados en L^1 en L^1: ilustración de la necesidad de los espacios de Lorentz

Definición 6 *Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función localmente integrable. Definimos el promedio de f sobre la bola $B = B(x,r)$ como*

$$m_B(f)(x) = \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(y)dy$$

Definición 7 (función maximal centrada) *Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función medible. La función maximal centrada de Hardy-Littlewood es:*

$$\mathcal{M}(f)(x) = \sup_{r>0} m_B(|f|)(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{v_n r^n} \int_{\{|y|<r\}} |f(x-y)|dy$$

Definición 8 (función maximal no centrada) *Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función medible. La función maximal no centrada de Hardy-Littlewood es:*

$$\mathfrak{M}(f)(x) = \sup_{\delta>0;\ |x-y|<\delta} m_{B(y,\delta)}(|f|)(x)$$

Teorema 3 (Control sobre funciones maximales) *Sea $\varphi \geq 0$ una función continua y decreciente definida sobre $[0,+\infty[$. Si $\Phi(x) = \varphi(|x|)$ es una función integrable sobre $\mathbb{R}^n$ entonces, para toda función f localmente integrable sobre $\mathbb{R}^n$, se tiene la estimación*

$$\sup_{\varepsilon>0}\big(|f| * \Phi_\varepsilon\big)(x) \leq \|\Phi\|_{L^1}\mathcal{M}(f)(x)$$

en donde hemos notado $\Phi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\Phi(\varepsilon^{-1}x)$.

Observación 3

- $\mathcal{M}(f)$ nunca está en $L^1(\mathbb{R}^n)$ si $f \neq 0$.
- Se tiene $\mathcal{M}(f) \leq \mathfrak{M}(f)$.

Teorema 4 *Las funciones maximales $\mathcal{M}$ y $\mathfrak{M}$ son operadores acotados:*

- *de $L^1(\mathbb{R}^n)$ en $L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$*
- *de $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ en $L^\infty(\mathbb{R}^n)$*
- *de $L^p(\mathbb{R}^n)$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$ para todo $1 < p < +\infty$*

Demostración.

- de $L^1(\mathbb{R}^n)$ en $L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$: Dado que $\mathcal{M}(f) \leq \mathfrak{M}(f)$, se tiene la inclusión de conjuntos

$$\{x \in \mathbb{R}^n : |\mathcal{M}(f)(x)| > \alpha\} \subset \{x \in \mathbb{R}^n : |\mathfrak{M}(f)(x)| > \alpha\}.$$

Como $\mathfrak{M}(f)$ es el supremo de funciones continuas, se tiene que $\mathfrak{M}(f)$ es semi-continua inferiormente y el conjunto

$$E_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : |\mathfrak{M}(f)(x)| > \alpha\}$$

es abierto. Sea K un compacto de E_α, entonces para todo $x \in K$ existe una bola B_x tal que:

$$\int_{B_x} |f(y)|dy > \alpha|B_x|$$

Por compacidad de K existe un recubrimiento finito $\{B_{x,1}, ..., B_{x,k}\}$ de K.

Lema 1 (Teorema de recubrimiento) *Sea $\{B_1, ..., B_k\}$ una familia finita de bolas abiertas de $\mathbb{R}^n$. Existe entonces una subcolección finita $\{B_{j,1}, ..., B_{j,l}\}$ formada por bolas disjuntas tales que*

$$\left|\bigcup_{i=1}^{l} B_{j,i}\right| \geq 3^{-n} \left|\bigcup_{i=1}^{k} B_i\right|$$

Aplicamos este lema a la familia de bolas $\{B_{x,1}, ..., B_{x,k}\}$ para obtener

$$|K| \leq \sum_{i=1}^{k} |B_{x,i}| \leq 3^n \sum_{i=1}^{l} |B_{x,j_i}| \leq \frac{3^n}{\alpha} \sum_{i=1}^{l} \int_{B_{x,j_i}} |f(y)|dy \leq \frac{3^n}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|dy$$

Tomando el supremo de todos los compactos contenidos en E_α obtenemos

$$\alpha|E_\alpha| \leq 3^n \|f\|_{L^1}$$

de donde se deduce

$$\|\mathcal{M}(f)\|_{L^{1,\infty}} \leq \|\mathfrak{M}(f)\|_{L^{1,\infty}} \leq 3^n \|f\|_{L^1}.$$

- de $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ en $L^\infty(\mathbb{R}^n)$:

Se tiene inmediatamente $\|\mathcal{M}(f)\|_{L^\infty} \leq \|\mathfrak{M}(f)\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^\infty}$.

- de $L^p(\mathbb{R}^n)$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$ para todo $1 < p < +\infty$:

Aquí se aplica el teorema de interpolación de Marcinkiewicz! ■

3.3. Interpolación de Riesz-Thorin

Teorema 5 *Sean $(X, \mathcal{B}or(X), \mu)$ y $(Y, \mathcal{B}or(Y), \nu)$ dos espacios medidos. Sea T un operador lineal definido sobre el conjunto de todas las funciones simples $f : X \longrightarrow Y$. Sean $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq +\infty$. Si se tiene*

$$\|T(f)\|_{L^{q_0}(Y)} \leq M_0 \|f\|_{L^{p_0}(X)},$$
$$\|T(f)\|_{L^{q_1}(Y)} \leq M_1 \|f\|_{L^{p_1}(X)},$$

para toda función simple f sobre X, entonces, para todo $0 < \theta < 1$ se tiene

$$\|T(f)\|_{L^q(Y)} \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \|f\|_{L^p(X)}$$

para todas las funciones simples de X en donde $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ y $\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$. Por densidad de las funciones simples, T posee una única extensión acotada de $L^p(X)$ en $L^q(Y)$.

Demostración. Sea

$$f = \sum_{k=1}^{m} a_k e^{i\alpha_k} \mathbb{1}_{A_k}$$

una función simple sobre X en donde $a_k > 0$, $\alpha_k \in \mathbb{R}$ y A_k son subconjuntos disjuntos de X de medida finita. Por dualidad, necesitamos controlar la cantidad

$$\|T(f)\|_{L^q(Y)} = \sup \left| \int_Y T(f)(x) g(x) d\nu(x) \right|$$

en donde el supremo toma en cuenta todas las funciones simples $g \in L^{q'}(Y)$ tales que $\|g\|_{L^{q'}(Y)} \leq 1$. Escribimos entonces

$$g = \sum_{j=1}^{n} b_j e^{i\beta_j} \mathbb{1}_{B_j}$$

en donde $\beta_j > 0$, $\beta_j \in \mathbb{R}$ y B_j son subconjuntos disjuntos de Y de medida finita. Definimos ahora las cantidades

$$P(z) = \frac{p}{p_0}(1-z) + \frac{p}{p_1} z \quad \text{y} \quad Q(z) = \frac{q'}{q_0'}(1-z) + \frac{q'}{q_1'} z.$$

Para $z \in \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \Re e(z) \leq 1\}$ definimos

$$F(z) = \int_Y T(f_z)(x) g_z(x) d\nu(x)$$

en donde

$$f_z = \sum_{k=1}^{m} a_k^{P(z)} e^{i\alpha_k} \mathbb{1}_{A_k} \quad \text{y} \quad g_z = \sum_{j=1}^{n} b_j^{Q(z)} e^{i\beta_j} \mathbb{1}_{B_j}.$$

Por linealidad se tiene

$$F(z) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_k^{P(z)} b_j^{Q(z)} e^{i\alpha_k} e^{i\beta_j} \int_Y T(\mathbb{1}_{A_k})(x) \mathbb{1}_{B_j}(x) d\nu(x)$$

notar que F es analítica en z puesto que $a_k, b_j > 0$.

- Sea ahora z tal que $\Re e(z) = 0$. Dado que los conjuntos A_k son disjuntos y que $|a_k^{P(z)}| = a_k^{p/p_0}$ tenemos $\|f_z\|_{L_0^p}^{p_0} = \|f\|_{L^p}^p$. Simétricamente como se tiene $|b_j^{Q(z)}| = b_j^{q'/q_0'}$, podemos escribir $\|g_z\|_{L^{q_0'}}^{q_0'} = \|g\|_{L^{q'}}^{q'}$.
- Si z es tal que $\Re e(z) = 1$, por las mismas razones tenemos $\|f_z\|_{L_1^p}^{p_1} = \|f\|_{L^p}^p$ y $\|g_z\|_{L^{q_1'}}^{q_1'} = \|g\|_{L^{q'}}^{q'}$.

Utilizando la desigualdad de Hölder y la hipótesis tenemos cuando $\Re e(z) = 0$:

$$|F(z)| \leq \|T(f_z)\|_{L^{q_0}} \|g_z\|_{L^{q_0'}} \leq M_0 \|f_z\|_{L^{p_0}} \|g_z\|_{L^{q_0'}} = M_0 \|f\|_{L^p}^{p/p_0} \|g\|_{L^{q'}}^{q'/q_0'}$$

Cuando $\mathfrak{Re}(z) = 1$ se tiene:

$$|F(z)| \leq M_1 \|f\|_{L^p}^{p/p_1} \|g\|_{L^{q'}}^{q'/q'_1}.$$

Necesitaremos el lema siguiente:

Lema 2 (de las tres líneas de Hadamard) *Sea F una función analítica sobre la banda abierta*

$$B = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \mathfrak{Re}(z) < 1\}$$

que es continua y acotada sobre $\overline{B}$ y tal que

- $|F(z)| \leq B_0$ *cuando* $\mathfrak{Re}(z) = 0$
- $|F(z)| \leq B_1$ *cuando* $\mathfrak{Re}(z) = 1$

con $0 < B_0, B_1 < +\infty$. Entonces se tiene $|F(z)| \leq B_0^{1-\theta} B_1^{\theta}$ si $\mathfrak{Re}(z) = \theta$, con $0 \leq \theta \leq 1$.

Suponiendo este lema podemos escribir directamente, cuando $\mathfrak{Re}(z) = \theta$:

$$|F(z)| \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{q'}}$$

Para terminar notamos que $P(\theta) = Q(\theta) = 1$ y entonces

$$F(\theta) = \int_Y T(f) g d\nu.$$

Podemos concluir tomando el supremo sobre todas las funciones simples g definidas sobre Y a valores en $L^{q'}$ de norma $\|g\|_{L^{q'}(Y)} \leq 1$. ■

3.4. Aplicación: Desigualdad de Young

Teorema 6 *Sea $1 \leq p, q, r \leq +\infty$ tal que $1 + \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r}$. Entonces, para todo $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y todo $g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ se tiene*

$$\|f * g\|_{L^q} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^r}.$$

- Sea $g \in L^r$ y definamos $T(f) = f * g$.

  $\Longrightarrow$ Nótese que $T : L^1 \longrightarrow L^r$ con norma mayorada por $\|g\|_{L^r}$:

  $$\|T(f)\|_{L^r} = \|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^r} \qquad \text{(desigualdad de Minkowski continua)}$$

  $\Longrightarrow$ que $T : L^{r'} \longrightarrow L^{\infty}$ con norma mayorada por $\|g\|_{L^r}$:

  $$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y) dy \right| \leq \|f\|_{L^{r'}} \|g\|_{L^r} \Longrightarrow \|T(f)\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^{r'}} \|g\|_{L^r}$$

- Entonces una aplicación directa del teorema de Riesz-Thorin nos da que T envía L^p en L^q con norma mayorada por

  $$\|g\|_{L^r}^{\theta} \|g\|_{L^r}^{1-\theta} = \|g\|_{L^r}$$

  con $1/p = 1 - \theta + \theta/r'$ y $1/q = (1-\theta)/r + \theta/\infty$; es decir:

  $$\|f * g\|_{L^q} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^r}.$$

■