Lección n°2: Espacios de Hölder, de Lipschitz y clase de Zygmund

UCE, verano 2013

1. Introducción

Los espacios de Besov aparecieron históricamente en los años 1960 al estudiar problemas relacionados con la *teoría de la aproximación*. En esta lección vamos a presentar algunos resultados de la teoría de la aproximación relativos a los espacios de Hölder y esto nos llevará a presentar la clase de Zygmund. Veremos en las lecciones siguientes las relaciones entre todos estos conjuntos de funciones y los espacios de Besov.

La teoría de la aproximación se desarrolló intensivamente al principios del siglo XX: se trata de estudiar el problema del polinomio trigonométrico de mejor aproximación de funciones continuas periódicas. Más precisamente, si

$$P(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{N} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx), \qquad \text{con } a_0, a_k, b_k \in \mathbb{R},$$

es un polinomio trigonométrico de grado N y si $\mathcal{P}_N$ es el espacio de polinomios trigonométricos 2π-periódicos de grado menor o igual a N, se busca estimar la cantidad

$$\epsilon_N(f) = \inf_{P\in\mathcal{P}_N} \|f - P\|_\infty$$

para una función f continua 2π-periódica. Uno de los primeros resultados es el siguiente teorema de Fejér, demostrado en el año 1900:

Teorema 1 (Fejér) *Si f es una función continua 2π-periódica, entonces se tiene*

$$\lim_{N\to+\infty} \epsilon_N(f) = \lim_{N\to+\infty} \inf_{P\in\mathcal{P}_N} \|f - P\|_\infty = 0.$$

El teorema de Fejér en su versión original (o versión usual) nos dice que toda función 2π-periódica es el límite uniforme de polinomios trigonométricos, de donde se obtiene inmediatamente este límite cuando se estudia la aproximación de este tipo de funciones por medio de polinomios trigonométricos.

Lo interesante es que la velocidad de convergencia está relacionada con la regularidad de la función y vamos a ver que los espacios de Hölder y la clase de Zygmund aparecen de forma *natural* al tratar estos problemas.

Los primeros resultados de este tipo fueron desarrollados por Jackson y Bernstein en 1911 y 1912 respectivamente:

Teorema 2 (Bernstein-Jackson)

A) (Jackson): Si la función continua 2π-periódica f es hölderiana de índice $s \in]0,1[$:

$$\sup_{x\neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^s} < +\infty,$$

entonces se tiene

$$\sup_{N\geq 0} N^s \epsilon_N(f) < +\infty.$$

B) (Bernstein): Si la función continua 2π-periódica f verifica $\sup\limits_{N\geq 0} N^s\epsilon_N(f) < +\infty$, para un $s \in]0,1[$, entonces f es hölderiana de índice s.

Pueba:

A) Sea $\Omega \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ una función a soporte compacto en $]-1,1[$ tal que $\Omega(0)=1$. Si $\omega \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ es la función de transformada de Fourier Ω, entonces, escribiendo $\omega_N(x) = N\omega(Nx)$, se tiene para f continua 2π-periódica, $\omega_N * f \in \mathcal{P}_N$. De modo que, si f es una función hölderiana de índice s, se tiene :

$$|\omega_N * f(x) - f(x)| = \left| \int \omega(y) \Big(f(x - \frac{y}{N}) - f(x) \Big)\, dy \right| \leq \|f\|_{\dot{C}^s} N^{-s} \int |\omega(y)|\, |y|^s dy$$

en donde hemos escrito $\|f\|_{\dot{C}^s} = \sup\limits_{x \neq y} \dfrac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^s}$ y se tiene finalmente que $\epsilon_N(f) \leq CN^{-s}$.

B) La recíproca utiliza la desigualdad de Bernstein : existe C_0 tal que para todo $N \in \mathbb{N}$ y todo $P \in \mathcal{P}_N$, se tiene

$$\|P'\|_\infty \leq C_0 N \|P\|_\infty.$$

En efecto, sea f una función continua 2π-periódica y sea $(P_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión de polinimios con $P_j \in \mathcal{P}_{2^j}$ y tal que $\|f - P_j\|_\infty \leq 2\epsilon_{2^j}(f)$. Escribimos $f = P_0 + \sum\limits_{j=0}^{+\infty} P_{j+1} - P_j$ y entonces

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |P_0(x) - P_0(y)| + \sum_{j=0}^{+\infty} \big|(P_{j+1}(x) - P_j(x)) - (P_{j+1}(y) - P_j(y))\big| \\ &\leq \|P_0\|_\infty \min(2, C_0|x-y|) + \sum_{j=0}^{+\infty} (\epsilon_{2^j}(f) + \epsilon_{2^{j+1}}(f)) \min(2, C_0 2^{j+1}|x-y|). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^s} &\leq \|P_0\|_\infty \min(2|x-y|^{-s}, C_0|x-y|^{1-s}) \\ &\quad + \sum_{j=0}^{+\infty} (\epsilon_{2^j}(f) + \epsilon_{2^{j+1}}(f)) \min(2|x-y|^{-s}, C_0 2^{j+1}|x-y|^{1-s}). \end{aligned}$$

Entonces, si $\epsilon_{2^j}(f) \leq C2^{-js}$, se obtiene que f es hölderiana de índice s. ■

Ejemplos:

i) Para $0 < \gamma < 1$, la función $f(x) = |\sin(x)|^\gamma$ es hölderiana de índice s si y solo si $s \leq \gamma$.

ii) Si $0 < \gamma < 1$, la función $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} 2^{-n\gamma} \cos(2^n x)$ es hölderiana de índice s si y solo si $s \leq \gamma$.

En el segundo ejemplo se puede ver la utilidad de la caracterización la propiedad de hölderianidad por medio de aproximaciones: es mucho más fácil aproximar esta función por medio de polinomios que verificar "a la mano" su hölderianidad.

2. Espacios de Hölder

Como vemos la condición de Hölder aparece en problemas relacionados con la teoría de la aproximación, ahora vamos a estudiar ciertos espacios de funciones de forma más general.

Nuestro punto de partida para estudiar los espacios de Hölder son los espacios de funciones continuas y de funciones derivables.

Definición 1 *Definimos el espacio de funciones continuas como el conjunto*

$$\mathcal{C}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} : \ f \ \textit{es continua y acotada} \ \right\}$$

normado por

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)|.$$

Consideramos así mismo el espacio $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)$ de funciones k veces continuamente derivables cuyas derivadas son acotadas, que puede ser normado por

$$\|f\|_{\mathcal{C}^k} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_\infty$$

Aquí hemos usado las notaciones clásicas siguientes: para $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ un multi-índice, escribimos $|\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j$ y $D^\alpha f(x) = \dfrac{\partial^\alpha f}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}(x)$.

Proposición 1 *Los espacios $(\mathcal{C}(\mathbb{R}^n), \| \cdot \|_\infty)$ y $(\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n), \| \cdot \|_{\mathcal{C}^k})$ son espacios de Banach.*

Para $k = 0, 1, 2, ...$ se obtiene de esta forma una familia de espacios de miden la continuidad de las derivadas de una función f cuya estructura interna es muy similar puesto que la norma de base utilizada es la misma.

Nótese en particular que $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n) = \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$.

2.1. Primera Definición de los espacios de Hölder

Los espacios de Hölder, que notaremos $\mathcal{C}^s$, "llenan los huecos" entre los espacios de clase $\mathcal{C}^k$, en el sentido que permiten medir la regularidad de forma fraccionaria, es decir de forma mucho más fina que las funciones de clase $\mathcal{C}^k$.

Definición 2 *El espacio de Hölder $\mathcal{C}^s(\mathbb{R}^n)$, con $0 < s < 1$ está definido por:*

$$\mathcal{C}^s(\mathbb{R}^n) = \{ f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \ : \|f\|_{\mathcal{C}^s} < +\infty \}$$

en donde

$$\|f\|_{\mathcal{C}^s} = \|f\|_{L^\infty} + \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \sup_{y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{|f(x+y) - f(x)|}{|y|^s}$$

Otra formulación más cómoda y a veces más útil es la siguiente, que se obtiene por un simple cambio de variable:

$$\|f\|_{\mathcal{C}^s} = \|f\|_{L^\infty} + \sup_{x \neq y \in \mathbb{R}^n} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^s}$$

Observación 1 La norma $\| \cdot \|_{\mathcal{C}^s}$ está compuesta de dos términos que miden informaciones distintas y que inducen una escala de diferenciación de la información. En efecto:

- si $|y| \leq 1 \Longrightarrow$ la cantidad $\frac{|f(x+y)-f(x)|}{|y|^s}$ es la que domina.
- si $|y| \geq 1$, se tiene
$$\frac{|f(x+y) - f(x)|}{|y|^s} \leq 2\|f\|_{L^\infty}$$
$\Longrightarrow$ la cantidad $\|f\|_{L^\infty}$ es la que domina.

Ejemplos

i) Toda función constante está en $\mathcal{C}^s(\mathbb{R}^n)$, en particular el segundo término de $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^s}$ es nulo.

ii) Un polinomio no está en $\mathcal{C}^s(\mathbb{R}^n)$ pues no es acotado.

iii) Si $0 < s < 1$, entonces $f(x) = |\sin(x)|^s \in \mathcal{C}^s(\mathbb{R}^n)$.

iv) Toda función de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ pertenece al espacio de Hölder $\mathcal{C}^s(\mathbb{R}^n)$ con $0 < s < 1$.

Observemos ahora que en la definición que hemos dado de los espacios de Hölder no hemos exigido que las funciones sean continuas y es la norma del espacio L^∞ que determina el tamaño de la función. Podría pensarse entonces que los elementos del espacio de Hölder $\mathcal{C}^s(\mathbb{R}^n)$ no son continuos, pero este no es el caso como nos lo indica el resultado siguiente:

Proposición 2 *Todo elemento $f \in \mathcal{C}^s(\mathbb{R}^n)$ puede ser modificado sobre un conjunto de medida nula de manera a volverlo continuo.*

Prueba. Antes de empezar la verificación, recordamos que la acción del semi-grupo del calor sobre una función $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p \leq +\infty$ está dada por convolución con una gaussiana:

$$H_t(f)(x) = f * h_t(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)h_t(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\frac{e^{-\frac{|y|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{n/2}}dy$$

Entonces, si $f \in \mathcal{C}^s(\mathbb{R}^n)$, usando el núcleo del calor tenemos:

$$H_t(f)(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \big(f(x-y) - f(x)\big)h_t(y)dy$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \|H_t(f)(\cdot) - f(\cdot)\|_{L^\infty} &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \big\|f(x-y) - f(x)\big\|_{L^\infty}\frac{e^{-\frac{|y|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{n/2}}dy \leq C\int_{\mathbb{R}^n} |y|^s\frac{e^{-\frac{|y|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{n/2}}dy \\ &\leq Ct^{s/2} \end{aligned}$$

Como se tiene $\|H_{t_1}(f)(\cdot) - H_{t_2}(f)(\cdot)\|_{L^\infty} \longrightarrow 0$ si $t_1, t_2 \longrightarrow 0$ y como $H_t(f)(x)$ es una función continua en x, se tiene que $H_t(f)(x)$ converge uniformemente si $t \longrightarrow 0$. Tenemos entonces que todo elemento $f \in \mathcal{C}^s(\mathbb{R}^n)$ es continuo. Se tiene en particular la inclusión $\mathcal{C}^s \subset \mathcal{C}^0$. ■

Proposición 3 *Para todo $0 < s < 1$, el espacio $\mathcal{C}^s(\mathbb{R}^n)$ es un espacio de Banach dotado de la norma $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^s}$.*

Justifiquemos el hecho anunciado sobre la regularidad fraccionaria de los espacios de Hölder:

Proposición 4 *Para todo $0 < s_0 < s_1 < 1$, se tienen las inclusiones siguientes:*

$$\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{C}^{s_1}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{C}^{s_0}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n).$$

Una propiedad útil de los espacios de Hölder:

Proposición 5 *Si $0 < s < 1$, los espacios de Hölder son una álgebra de Banach. Más precisamente, si $f, g \in \mathcal{C}^s(\mathbb{R}^n)$, entonces el producto fg pertenece al espacio $\mathcal{C}^s(\mathbb{R}^n)$ y se tiene la desigualdad*

$$\|fg\|_{\mathcal{C}^s} \leq \|f\|_{\mathcal{C}^s}\|g\|_{\mathcal{C}^s}$$

Prueba. Empezamos notando que se tiene la desigualdad

$$|f(x)g(x) - f(y)g(y)| \leq |f(x)||g(x) - g(y)| + |g(y)||f(x) - f(y)|$$

de donde se obtiene que

$$\frac{|f(x)g(x) - f(y)g(y)}{|x-y|^s}| \leq |f(x)|\frac{|g(x) - g(y)|}{|x-y|^s} + |g(y)|\frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^s}$$

De donde se deduce que

$$\|fg\|_{\mathcal{C}^s} = \|fg\|_{L^\infty} + \sup_{x \neq y}\frac{|f(x)g(x) - f(y)g(y)}{|x-y|^s}| \leq \|f\|_{L^\infty}\|g\|_{\dot{\mathcal{C}}^s} + \|g\|_{L^\infty}\|f\|_{\dot{\mathcal{C}}^s} \leq \|f\|_{\mathcal{C}^s}\|g\|_{\mathcal{C}^s}$$

■

Caracterización térmica

- Es posible utilizar los semi-grupos del calor H_t y de Poisson P_t para caracterizar estos espacios.

  Recordemos que, para una función $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ se tiene

$$\begin{aligned} H_t(f)(x) = f * h_t(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\frac{e^{-\frac{|y|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{n/2}}dy \\ P_t(f)(x) = f * p_t(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)c_n\frac{t}{(t^2+|y|^2)^{(n+1)/2}}dy, \quad \text{con } c_n = \frac{\Gamma[(n+1)/2]}{\pi^{(n+1)/2}}. \end{aligned}$$

- Esta caracterización es muy general y puede aplicarse en diversas situaciones (no sólo cuando el espacio de base es $\mathbb{R}^n$)
- Veremos al final del curso cómo interviene esta definición y veremos cómo esta caracterización térmica puede resultar muy útil.

Teorema 3 *Sea $0 < s < 1$ y sea $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Entonces $f \in \mathcal{C}^s(\mathbb{R}^n)$ si y solo si existe dos constantes $C_1, C_2 > 0$ tales que*

- *Usando el núcleo de Poisson*
$$\|\partial_t P_t f\|_{L^\infty} \leq C_1 t^{s-1} \tag{1}$$
- *Usando el núcleo del calor*
$$\|\partial_t H_t f\|_{L^\infty} \leq C_2 t^{s/2-1} \tag{2}$$

Además si C_1' es la más pequeña constante tal que se tenga (1), entonces las normas $\|\cdot\|_{L^\infty} + C_1'$ y $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^s}$ son equivalentes. Lo mismo se tiene con C_2', la más pequeña constante tal que se tenga (2), y las normas $\|\cdot\|_{L^\infty} + C_2'$ y $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^s}$

Prueba.

($\Longrightarrow$) Utilizaremos el núcleo de Poisson. Sea $0 < s < 1$ y sea $f \in \mathcal{C}^s(\mathbb{R}^n)$.

El punto de partida son los siguientes resultados sobre el núcleo de Poisson:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\partial_t p_t(x)|\, dx \leq c\, t^{-1} \qquad y \qquad \int_{\mathbb{R}^n} \partial_t p_t(x)dx = 0.$$

que son una consecuencia de $|\partial_t p_t(x)| \leq c\, t^{-n-1}$, de $|\partial_t p_t(x)| \leq c|x|^{-n-1}$ y del hecho que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} p_t(x)dx = 1$. Entonces se tiene:

$$\begin{aligned}
\partial_t P_t f(x) &= \partial_t(p_t * f)(x) = (\partial_t p_t) * f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_t p_t(y)\big(f(x-y) - f(x)\big)dy \\
\big|\partial_t P_t f(x)\big| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \big|\partial_t p_t(y)\big|\big|f(x-y) - f(x)\big|dy \\
\|\partial_t P_t f\|_{L^\infty} &\leq \|f\|_{\mathcal{C}^s} \int_{\mathbb{R}^n} \big|\partial_t p_t(y)\big||y|^s dy = \|f\|_{\mathcal{C}^s}\left(\int_{\{|y|\leq t\}} \big|\partial_t p_t(y)\big||y|^s dy + \int_{\{|y|>t\}} \big|\partial_t p_t(y)\big||y|^s dy\right)
\end{aligned}$$

De donde se deduce:

$$\|\partial_t P_t f\|_{L^\infty} \leq c\, t^{s-1}\|f\|_{\mathcal{C}^s}$$

($\Longleftarrow$) Sea $0 < s < 1$ y supongamos que se tiene (1).

Lema 1 *Si $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ y si $0 < s < 1$, entonces la condición (1) es equivalente a las n condiciones siguientes*

$$\|\partial_{x_j} P_t f\|_{L^\infty} \leq C t^{s-1}, \qquad j = 1, ..., n.$$

Escribimos entonces

$$f(x+y) - f(x) = \big(P_t(f)(x+y) - P_t(f)(x)\big) + \big(f(x+y) - P_t(f)(x+y)\big) - \big(f(x) - P_t(f)(x)\big)$$

Aquí fijaremos $t = |y|$ y trataremos por separado cada uno de estos términos.

- para el primer término utilizamos el lema:

$$\big|P_t(f)(x+y) - P_t(f)(x)\big| \leq |y| \sum_{j=1}^n \|\partial_{x_j} P_t f\|_{L^\infty} \leq c\,|y|\,|y|^{s-1} = c\,|y|^s$$

- para el segundo y tercer término observamos que se tiene

$$f(x+y) - P_t(f)(x+y) = -\int_0^t \partial_\sigma P_\sigma(f)(x+y)d\sigma$$

y entonces

$$|f(x+y) - P_t(f)(x+y)| \leq \int_0^t \big|\partial_\sigma P_\sigma(f)(x+y)\big|d\sigma \leq C t^s = C|y|^s.$$

Tenemos entonces que $f \in \mathcal{C}^s(\mathbb{R}^n)$. ■

Caso general

Vamos ahora a definir los espacios de Hölder cuando el índice s es más grande que 1. Como vamos a ver existen algunas posibilidades pero hay que tener un poco de cuidado.

$\Longrightarrow$ En efecto, si $s > 1$, si intentamos definir el espacio $\mathcal{C}^s(\mathbb{R}^n)$ como el conjunto de funciones de clase $\mathcal{C}^1$ que verifican la condición

$$\sup_{0\neq y\in\mathbb{R}^n}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\frac{|f(x)-f(x+y)|}{|y|^s}<+\infty,$$

entonces el espacio $\mathcal{C}^s(\mathbb{R}^n)$ se reduce a las funciones contantes!

Esto muestra que si deseamos considerar espacios de regularidad superior, es necesario utilizar la siguiente definición:

Definición 3 *Para todo $k \in \mathbb{N}$ y para todo real $0 < s < 1$, definimos el espacio de funciones hölderianas $\mathcal{C}^{k,s}(\mathbb{R}^n)$ como las funciones de clase $\mathcal{C}^k$ cuyas derivadas de orden k son hölderianas de índice s. Este espacio se puede normar por la expresión:*

$$\|f\|_{\mathcal{C}^{k,s}}=\|f\|_{\mathcal{C}^k}+\sum_{|\alpha|\leq k}\sup_{0\neq y\in\mathbb{R}^n}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\frac{|D^\alpha f(x)-D^\alpha f(x+y)|}{|y|^s}. \tag{3}$$

El teorema de Jackson y Bernstein se generaliza inmediatamente a los espacios de Hölder de regularidad superior:

Teorema 4 *Sea $k \in \mathbb{N}$ y $0 < s < 1$. Sea $\omega \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ una función que verifica los tres puntos siguientes*

- *la transformada de Fourier Ω de ω es a soporte compacto en la bola $\{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| < 1\}$,*
- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}\omega\, dx = 1,$
- *para $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tal que $0 < |\alpha| \leq k$, se tiene* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha\omega(x)\, dx = 0.$

Para $R > 0$ escribimos $\omega_R(x) = R^n\omega(Rx)$. Entonces, para una función continua acotada f sobre $\mathbb{R}^n$, se tiene la equivalencia:

$$f\in\mathcal{C}^{k,s}(\mathbb{R}^n)\Leftrightarrow\sup_{R>0}R^{k+s}\|f-\omega_R*f\|_\infty<+\infty.$$

Demostración: Si f pertenece al espacio $\mathcal{C}^{k,s}(\mathbb{R}^n)$, escribimos utilizando las propiedades de ω:

$$\begin{aligned}\omega_R*f(x)-f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n}\omega(y)\big(f(x-y/R)-f(x)\big)\,dy=\int_{\mathbb{R}^n}\omega(y)\Bigg(f(x-y/R)-\sum_{|\alpha|\leq k}\frac{1}{\alpha!}D^\alpha f(x)\frac{(-y)^\alpha}{R^{|\alpha|}}\Bigg)dy\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\omega(y)\sum_{|\alpha|=k}\frac{k}{\alpha!}A_\alpha(x,y)\frac{(-y)^\alpha}{R^{|\alpha|}}dy\end{aligned}$$

con

$$A_\alpha(x,y)=\int_0^1\left(D^\alpha f(x-t\frac{y}{R})-D^\alpha f(x)\right)(1-t)^{k-1}\,dt.$$

Se obtiene entonces

$$\|f-\omega_R*f\|_\infty\leq CR^{-(k+s)}\|f\|_{\mathcal{C}^{k,s}}\int_{\mathbb{R}^n}|y|^{k+s}|\omega(y)|\,dy.$$

Para la recíproca, notamos $P_j = f * \omega_{2^j}$ y escribimos $f = P_0 + \displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} P_{j+1} - P_j$. Usamos ahora las desigualdades de Bernstein: para $\alpha \in \mathbb{N}^n$ se tiene

$$\|D^\alpha(f*\omega_R)\|_\infty\leq C_{|\alpha|}R^{|\alpha|}\|f*\omega_R\|_\infty.$$

Entonces, por hipótesis se tiene $\|f - P_j\|_\infty \leq C2^{-j(k+s)}$ y por lo tanto, para $|\alpha| \leq k$ se tiene la desigualdad

$$|D^\alpha f(x)| \leq C_{|\alpha|}\|\omega\|_{L^1}\|f\|_\infty + \sum_{j=0}^{+\infty} C_{|\alpha|}C2^{-j(k+s)}(2^{|\alpha|j} + 2^{|\alpha|(j+1)})$$

Se obtiene así que f pertenece al espacio $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)$. Además si $|\alpha| = k$, se tiene

$$\begin{aligned} |D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)| &\leq \|P_0\|_\infty \min(2C_k; C_{k+1}|x-y|) \\ &+ \sum_{j=0}^{+\infty}(\|f - P_j\|_\infty + \|f - P_{j+1}\|_\infty) \min(2\,2^{k(j+1)}C_k; C_{k+1}2^{(k+1)(j+1)}|x-y|), \end{aligned}$$

de manera que se obtiene que f pertenece al espacio de Hölder $\mathcal{C}^{k,s}(\mathbb{R}^n)$. ■

Ejemplos:

i) Para $0 < \gamma < 1$, la función $f(x) = \sin(x)\,|\sin(x)|^\gamma$ pertenece al espacio $\mathcal{C}^{1,s}(\mathbb{R})$ si y solo si $s \leq \gamma$.

ii) Para $0 < \gamma$, la función $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n\gamma}\cos(2^n x)$ está en $\mathcal{C}^{k,s}(\mathbb{R})$ si y solo si $k + s \leq \gamma$.

Es posible generalizar la caracterización térmica de los espacios de Hölder:

Definición 4 *Sea $0 < s < 1$ un real y sea k un entero. Definimos el conjunto $\mathcal{C}^{k,s}(\mathbb{R}^n)$ como:*

$$\mathcal{C}^{k,s}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in L^\infty(\mathbb{R}^n) : \left\| \frac{\partial^k}{\partial t^k} P_t(f) \right\|_{L^\infty} \leq At^{s-1} \right\}.$$

Además si $\|f\|_{\dot{\mathcal{C}}^{k,s}}$ es la más pequeña constante que aparece en la desigualdad anterior, entonces se obtiene una norma equivalente con la expresión

$$\|f\|_{\mathcal{C}^{k,s}} = \|f\|_{L^\infty} + \|f\|_{\dot{\mathcal{C}}^{k,s}}.$$

Proposición 6 *Si $0 < s < 1$ y para todo $k \in \mathbb{N}$ se tienen las siguientes inclusiones:*

$$\mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{C}^{k,s}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n).$$

3. Funciones Lipschitz y Clase de Zygmund

En la sección anterior hemos dado una primera descripción de los espacios de Hölder cuando $0 < s < 1$ y es necesario estudiar lo que sucede si $s = 1$.

En efecto, vimos con el teorema de Bernstein-Jackson que es posible caracterizar los espacios de Hölder por medio de la teoría de la aproximación: una función f pertenece al espacio $\mathcal{C}^s(\mathbb{R}^n)$, con $0 < s < 1$, si y solo si esta función puede ser aproximada por polinomios de la siguiente manera:

$$\sup_{N \geq 0} N^s\|f - P_N\|_\infty < +\infty \tag{4}$$

en donde P_N es un polinomio de grado N, y quisiéramos saber si esta caracterización se mantiene si $s = 1$. Vamos a ver que este no es el caso, y para ello necesitamos la definición siguiente:

Definición 5 *Cuando $s = 1$, definimos el espacios de funciones Lip($\mathbb{R}^n$) como el conjunto de funciones continuas acotadas que son lipschitzianas. Este espacio es normado por la cantidad*

$$\|f\|_{Lip} = \|f\|_{L^\infty} + \sup_{0\neq y\in\mathbb{R}^n}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\frac{|f(x+y)-f(x)|}{|y|}.$$

Observamos que hay una gran similitud entre los espacios de Hölder y el espacio de Lipschitz en el sentido que éste último puede verse como el límite cuando $s \longrightarrow 1$.

Sin embargo, el espacio de funciones lipschitzianas es distinto de la clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$: por ejemplo la función $f(x) = |\sin(x)|$ es lipschitziana pero no es derivable en el origen.

Proposición 7 *Se tiene la inclusión de espacios $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n) \subset$ Lip($\mathbb{R}^n$).*

Además, desde el punto de vista de la teoría de la aproximación, el espacio de funciones lipschitzianas no puede ser caracterizado por la condición (4).

$\Longrightarrow$ Consideramos la función de Weierstrass

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n}\cos(2^n x)$$

Se sabe que esta función es continua pero no es derivable en ningún punto y no pertenece al espacio Lip($\mathbb{R}$). Sin embargo, esta función verifica la condición (4) con $s = 1$.

Vamos a ver, de forma sorprendente, que el espacio de funciones que puede ser caracterizado por esta condición es un conjunto de funciones diferente a los estudiados hasta ahora.

Definición 6 (Clase de Zygmund) *Sea $0 < s < 2$ un real. Definimos la clase de Zygmund $\mathscr{C}^s(\mathbb{R}^n)$ como el espacio de funciones $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ que verifican*

$$\sup_{0\neq y\in\mathbb{R}^n}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\frac{|f(x+y)+f(x-y)-2f(x)|}{|y|^s} < +\infty.$$

Es un espacio normado por

$$\|f\|_{\mathscr{C}^s} = \|f\|_{L^\infty} + \sup_{0\neq y\in\mathbb{R}^n}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\frac{|f(x+y)+f(x-y)-2f(x)|}{|y|^s}. \tag{5}$$

Y el espacio $\mathscr{C}^s(\mathbb{R}^n)$ es un espacio de Banach.

En el caso de regularidad superior, si $s = k + \sigma$ con $k \in \mathbb{N}$ y $\sigma \in]0,1]$, definimos el espacio $\mathscr{C}^s(\mathbb{R}^n)$ por la condición $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)$ y, para $|\alpha| = k$, $D^\alpha f \in \mathscr{C}^\sigma(\mathbb{R}^n)$.

Observación 2 Nótese que aquí el parámetro s puede tomar el valor 1.

Desde el punto de vista de la teoría de la aproximación se tiene el siguiente resultado:

Teorema 5 *Sean $s \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{N}$ tales que $k < s \leq k+1$. Sea $\omega \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ una función que verifica*

- *la transformada de Fourier Ω de ω es a soporte compacto en la bola $\{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| < 1\}$*
- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \omega \; dx = 1$
- *para $\alpha \in \mathbb{N}^n$ y $0 < |\alpha| \leq k+1$,* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha \omega(x) \; dx = 0.$

Para $R > 0$ escribimos $\omega_R(x) = R^n \omega(Rx)$.

Entonces, para una función continua acotada f definida sobre $\mathbb{R}^n$, se tiene la equivalencia:

$$f \in \mathscr{C}^s(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow \sup_{R>0} R^s \|f - \omega_R * f\|_\infty < +\infty.$$

Como vemos en este resultado, la clase de Zygmund es el conjunto de funciones que aparece naturalmente cuando se estudia el problema de la velocidad de convergencia de la mejor aproximación de una función dada. Notamos especialmente que, cuando se trabaja con esta clase de funciones, no hay ningún problema cuando el índice de regularidad s pasa por valores enteros.

Pero, ¿cuál es la relación entre la clase de Zygmund y los otros espacios presentados cuando $s = 1$? El siguiente reusltado nos dice que la clase de Zygmund es en realidad mucho más grande:

Proposición 8 $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n) \subsetneq \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^n) \subsetneq \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^n)$.

Ejemplos:

i) La función $f(x) = |\sin(x)|$ está en $\mathrm{Lip}(\mathbb{R})$ pero no en $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

ii) La función $g(x) = \sin(x) \ln|\sin(x)|$ pertenece a la clase de Zygmund $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$, pero no pertenece al espacio $\mathrm{Lip}(\mathbb{R})$.

iii) La función $h(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} \cos(2^n x)$ está en $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ pero no está en $\mathrm{Lip}(\mathbb{R})$.

Proposición 9 (Identificación de los espacios funcionales)

1) Si $0 < s < 1$ es un real y si $k \in \mathbb{N}$, entonces $\mathscr{C}^s(\mathbb{R}^n) = \mathcal{C}^{k,s}(\mathbb{R}^n)$.

2) Para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene la inclusión $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{C}^k(\mathbb{R}^n)$.

Prueba: Solo consideramos el caso cuando $0 < s < 1$.

$\Longrightarrow$) Esta parte es inmediata pues se tiene

$$|f(x+y) + f(x-y) - 2f(x)| \leq |f(x+y) - f(x)| + |f(x-y) - f(x)|,$$

de donde se deduce que $\|f\|_{\mathscr{C}^s} \leq 2\|f\|_{\mathcal{C}^s}$, es decir que $\mathcal{C}^s \subset \mathscr{C}^s$.

$\Longleftarrow$) Es suficiente estudiar lo que sucede si $0 < y < \tau$ es pequeño. Si $|f(x+y) + f(x-y) - 2f(x)| \leq C|y|^s$, se tiene también

$$|f(x+y) + f(x) - 2f(x + 1/2y)| \leq C'|y|^s$$

de modo que si escribimos $g(y) = f(x+y) - f(x)$ se tiene que esta expresión puede reescribirse como

$$|g(y) - 2g(\frac{1}{2}y)| \leq C|y|^s$$

Reemplazando y por $y/2$ se obtiene

$$|2g(y) - 2^2 g(\frac{1}{2^2}y)| \leq C|y|^s 2^{1-s}, ..., |2^{n-1}g(y/2^{n-1}) - 2^n g(\frac{1}{2^n}y)| \leq C|y|^s 2^{n(1-s)},$$

de manera que sumando término a término se tiene la mayoración:

$$|g(y) - 2^n g(y/2^n)| \leq C|y|^s \sum_{j=0}^{n} 2^{j(1-s)} \iff |g(y/2^n)| \leq C|y|^s 2^{-n} \sum_{j=0}^{n} 2^{j(1-s)} + \frac{2\|f\|_{L^\infty}}{2^n}$$

Sea $0 < h < \tau$, entonces si n es un entero tal que $1/2\tau \leq 2^n h \leq \tau$ podemos escribir con $y = 2^n h$:

$$|g(h)| \leq C|h|^s 2^{-n(1-s)} \sum_{j=0}^{n} 2^{j(1-s)} + \frac{2\|f\|_{L^\infty} h}{2^n h} \leq C|h|^s + C/\tau \|f\|_{L^\infty} h$$

De donde se obtiene finalmente que $|f(x+h) - f(x)| \leq C|h|^s$, es decir que se tiene la inclusión $\mathscr{C}^s \subset \mathcal{C}^s$.

Con estos dos resultados se obtiene la identificación de espacios $\mathscr{C}^s = \mathcal{C}^s$. ■

El resultado que sigue explicita una propiedad de las funciones de la clase de Zygmund:

Proposición 10 *Si* $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ *entonce se tiene* $\displaystyle\sup_{y\neq 0}\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{|f(x) - f(x+y)|}{|y|\,|\ln|y||} < +\infty$.

Esta proposición explica por qué la función $\sin(x)\ln|\sin(x)|$ es representativa de la clase de Zygmund $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$. En particular, si $\alpha > 1$, entonces la función $\sin(x)\big|\ln|\sin(x)|\big|^\alpha$ no pertenece al espacio $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$.

4. Diferencias iteradas y Espacios de Hölder-Zygmund

Como hemos visto, el hecho de pedir dos diferencias (tal como lo habíamos hecho al definir la clase de Zygmund), en vez de una sola (como en los espacios de Hölder) puede ser muy útil y se obtiene de esta manera un espacio de funciones mucho más grande y con propiedades más agradables desde el punto de vista de la teoría de la aproximación.

Esto sugiere que es posible prescindir de la noción de derivada para estudiar la regularidad superior a 1 y que el precio a pagar consiste en pedir más diferencias. Este pequeño razonamiento nos llevará a definir las diferencias iteradas de una función y a caracterizar los espacios de Hölder-Zygmund por medio de estas diferencias.

Definición 7 (Diferencias iteradas) *Para* $y \in \mathbb{R}^n$ *definimos para una función continua* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *el operador de diferencia finita* Δ_y *por*

$$\Delta_y(f) = f(x+y) - f(x)$$

Tenemos además $\Delta_y^{k+1}(f) = \Delta_y(\Delta_y(f)^k)$, *es decir:*

$$\Delta_y^k(f)(x) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} f(x+jy)$$

Con esta noción de diferencias iteradas, se puede dar una definición general de los espacios de Hölder-Zygmund:

Definición 8 (Espacios de Hölder-Zygmund) *Sea $s > 0$ un real y sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $k-1 \leq s < k$. El espacio de Hölder-Zygmund $\mathscr{C}^s(\mathbb{R}^n)$ está definido por:*

$$\mathscr{C}^s(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \ : \|f\|_{\mathscr{C}^s} < +\infty\}$$

en donde

$$\|f\|_{\mathscr{C}^s} = \|f\|_{L^\infty} + \sup_{y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|\Delta_y^k(f)\|_{L^\infty}}{|h|^s}$$

Observación 3

- Para definir los espacios de Hölder-Zygmund no es indispensable utilizar las derivadas: se las puede reemplazar por los operadores de diferencias finitas.
- Cuando el índice s no es entero, se obtiene los espacios de Hölder usuales.
- Cuando el índice s es entero (digamos $s = k$), los espacios de Hölder-Zygmund son mucho más grandes que los espacios $\mathcal{C}^k$.