Lección n°3: Espacios de Sobolev

UCE, verano 2013

Introducción

A partir de los trabajos de Sobolev y de Leray en los años 1930, los espacios de base para el estudio de la regularidad de las soluciones de las ecuaciones diferenciales parciales son los espacios de Sobolev. Esto nos lleva a considerar las derivadas de las funciones en el sentido de las distribuciones y a ver a los espacios de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq +\infty$, como subespacios de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, el espacio de distribuciones temperadas.

1. Espacios de Sobolev

- Funciones cuyas derivadas en el sentido de las distribuciones pertenecen a los espacios de Lebesgue: decimos que $D^\alpha f = g$ en sentido débil (o en sentido de las distribuciones) si
$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) D^\alpha \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\varphi(x)dx \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n) = \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$
En el caso de una función suficientemente regular, una integración por partes muestra que se tiene esta relación en el sentido usual.
- Los espacios de Sobolev miden entonces la regularidad por medio de derivadas en norma $L^p(\mathbb{R}^n)$. Veremos varias formas de caracterizar esta propiedad.

Definición clásica

Es la definición que se enseña en la escuela.

Definición 1 *Sea $1 \leq p \leq +\infty$ y $k \in \mathbb{N}$. Definimos el espacio de Sobolev $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ como el conjunto de funciones que pertenecen al espacio de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^n)$ y cuyas derivadas en el sentido de las distribuciones verifican $D^\alpha f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ si $|\alpha| \leq k$. Este espacio de funciones puede ser normado por la cantidad*
$$\|f\|_{W^{k,p}} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_{L^p}$$

Nótese que si $k = 0$ entonces $W^{0,p}(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$.

Proposición 1 *Para todo $k \in \mathbb{N}$ y para todo $1 \leq p \leq +\infty$ se tienen las inclusiones*
$$W^{k+1,p}(\mathbb{R}^n) \subset W^{k,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$$

Teorema 1 *Los espacios de Sobolev $\big(W^{k,p}(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{W^{k,p}}\big)$ son espacios de Banach.*

Prueba. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$, entonces para todo α se tiene que $(D^\alpha f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $L^p(\mathbb{R}^n)$. Si ahora notamos $f^{(\alpha)} = \lim\limits_{n\to+\infty} D^\alpha f_n$, en donde el límite se toma en el sentido de la norma de los espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$, entonces se tiene, para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$:
$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) D^\alpha \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} f^{(\alpha)}(x)\varphi(x)dx.$$
■

Demos ahora otro tipo de caracterización de los espacios de Sobolev.

Proposición 2 *Sea $1 \leq p < +\infty$. Entonces $f \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ si y solo si existe una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que*

1) cada función $f_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

2) $\|f - f_n\|_{L^p} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

3) Para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tal que $|\alpha| \leq k$ se tiene $\big(\frac{\partial^\alpha f_n}{\partial x^\alpha}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en el sentido de la norma $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Lo interesante de esta caracterización es que no hace falta usar la noción de derivadas débiles: las derivadas que intervienen en el punto 3) son *verdaderas* derivadas.

Prueba.

($\Longleftarrow$) Veamos que si se tienen estos tres puntos, entonces $f \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$.
Para ello si notamos $f^{(\alpha)}(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\partial^\alpha f_n}{\partial x^\alpha}(x)$, se tiene por hipótesis que $f^{(\alpha)}$ pertenece al espacio $L^p(\mathbb{R}^n)$, entonces, dado que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_n \frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial x^\alpha}(x)dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^\alpha f_n}{\partial x^\alpha}(x)\varphi(x)dx,$$

si obtiene al pasar al límite que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial x^\alpha}(x)dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} f^\alpha(x)\varphi(x)dx,$$

lo que muestra que $f \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$.

($\Longrightarrow$) Estudiemos ahora la recíproca. Sea $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx = 1$, para todo $\varepsilon > 0$ definimos $\phi_\varepsilon(x) = \varepsilon^N \phi(x/\varepsilon)$, y para todo $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, escribimos $f_\varepsilon = f * \phi_\varepsilon$.

Se tiene entonces los puntos 1) y 2): se verifica $f_\varepsilon \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y además $\|f - f_\varepsilon\|_{L^p} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$.

Finalmente, si f posee derivadas parciales débiles $\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}$, entonces se tiene

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} f_\varepsilon(x) = \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\big(f * \phi_\varepsilon(x)\big) = \big(\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} f\big) * \phi_\varepsilon(x).$$

Podemos entonces aplicar el punto 1) para obtener que la sucesión $\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} f_\varepsilon(x)$ converge en norma $L^p(\mathbb{R}^n)$.

De esta manera vemos que es posible construir una familia de funciones $(f_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ que verifica los tres puntos pedidos.

■

Observación 1 Esta caracterización de los espacios de Sobolev es válida únicamente si $1 \leq p < +\infty$. La obstrucción en el caso $p = +\infty$ proviene del hecho que el espacio $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ no es separable. Indiquemos sin embargo que existen variantes (con otras condiciones) de este resultado para el caso cuando $p = +\infty$.

Veamos ahora otra caracterización de los espacios de Sobolev cuando $k = 1$ que será la fuente de algunos desarrollos posteriores:

Proposición 3 *Si* $1 < p \leq +\infty$ *se tiene la siguiente caracterización:*

$f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ *si y solo si* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *y se tiene*

$$\sup_{y \neq 0} \frac{\|f(\cdot + y) - f(\cdot)\|_{L^p}}{|y|} < +\infty. \tag{1}$$

Prueba. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, se tiene:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \big(f(x) - f(x+y)\big)\varphi(x)dx = \int_0^1 \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(x - ty)dx \right) dt$$

Entonces se tiene, por un lado que:

$$\|f(\cdot + y) - f(\cdot)\|_{L^p} \leq C \sum_{i=1}^n |y_i| \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} f \right\|_{L^p}$$

de donde se deduce que

$$\frac{\|f(\cdot + y) - f(\cdot)\|_{L^p}}{|y|} \leq C\|f\|_{W^{1,p}}.$$

Por otro lado se tiene el siguiente límite en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(x) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(x + \lambda e_i) - f(x)}{\lambda}$$

en donde e_i es el i-ésimo vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$. ■

Observación 2 Esta caracterización de los espacios de Sobolev por medio de una diferencia es válida únicamente si $1 < p$. El problema cuando $p = 1$ se debe al hecho que el espacio $L^1(\mathbb{R}^n)$ **no** es un espacio dual.

En efecto, si una sucesión de funciones de $L^1(\mathbb{R}^n)$ converge en el sentido de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, su límite puede no pertenece a $L^1(\mathbb{R}^n)$. Por ejemplo, la función $f(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$ verifica

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x+y) - f(x)|dx = 2|y|$$

para todo $|y| < 1$, pero se tiene que $f \notin W^{1,1}(\mathbb{R})$.

2. Espacios de Sobolev de regularidad fraccionaria

$\Longrightarrow$ Nos interesamos ahora en estudiar generalizaciones de los espacios de Sobolev cuando el índice de regularidad k deja de ser entero y puede tomar valores reales.

$\Longrightarrow$ Vamos a ver que existen algunas posibilidades para esta generalización. Pero discutiremos este punto posteriormente, por ahora nos concentramos en dos herramientas que serán muy útiles: los potenciales de Riesz y de Bessel.

Motivación

Cuando aplicamos el operador Laplaciano $\Delta = \sum_{j=1}^n \partial_{x_j}^2$ a una función de la clase de Schwartz $f \in \mathcal{S}$ (o a una distribución temperada $f \in \mathcal{S}'$) tenemos la identidad:

$$\widehat{(-\Delta)(f)}(\xi) = c|\xi|^2 \widehat{f}(\xi). \tag{2}$$

Ahora, si tomamos la norma L^2 de esta expresión se tiene, por el teorema de Plancherel

$$\|(-\Delta)(f)\|_{L^2}^2 = \|\widehat{(-\Delta)(f)}\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \left||\xi|^2 \widehat{f}(\xi)\right|^2 d\xi.$$

Vemos entonces que el comportamiento al infinito de la transformada de Fourier de la función f permite estudiar la finitud de la cantidad $\|(-\Delta)(f)\|_{L^2}$, que expresa (formalmente) la regularidad, en el sentido de los espacios de Sobolev de la función f.

Moraleja 1: se puede *leer* la regularidad de una función por medio del *comportamiento al infinito* de su transformada de Fourier.

La expresión (2) puede entonces servir para definir las "potencias fraccionarias" del operador Laplaciano. Por ejemplo, podemos (al menos formalmente) definir el operador $\Lambda^s = (-\Delta)^{s/2}$, con $s > 0$, de la siguiente forma

$$\widehat{\Lambda^s(f)}(\xi) = c|\xi|^s \widehat{f}(\xi).$$

Moraleja 2: se podría utilizar el comportamiento con respecto al peso $|\xi|^s$ de la transformada de Fourier de una función para estudiar su regularidad *fraccionaria*.

La generalización de este proceder está relacionada con los potenciales de Riesz y de Bessel.

Dado que el producto, en el nivel de Fourier, de una función f por la función $|\xi|^s$ puede resultar de interés al estudiar la regularidad de las funciones, enunciamos un hecho que permitirá estudiar lo que sucede en el nivel de la variable real:

Lema 1 *Sea $0 < s < n$. La transformada de Fourier de la función $|x|^{-n+s}$ es la función $c|\xi|^{-s}$.*

Potenciales de Riesz

Definición 2 *Sea $s > 0$. El potencial de Riesz de orden s es el operador definido por $I_s = (-\Delta)^{-s/2}$ y puede escribirse:*

$$I_s(f)(x) = C \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x-y)}{|y|^{n-s}} dy$$

$\Longrightarrow$ El potencial de Riesz I_s de una función es entonces un producto de convolución entre esta función y el núcleo $|x|^{-n+s}$.

$\Longrightarrow$ Nótese que es posible ver la acción del potencial de Riesz I_s sobre una función f en el nivel de Fourier puesto que se tiene, por el Lemma 1 la identidad:

$$\widehat{I_s f}(\xi) = c|\xi|^{-s} \widehat{f}(\xi).$$

Observación 3 Evidentemente siempre es útil disponer de fórmulas exactas que hacen el uso de la transformada de Fourier particularmente eficaz, sin embargo también es interesante poder obtener los resultados sin pasar por el uso de la transformada de Fourier.

Una prueba de ello es el siguiente teorema:

Teorema 2 *Sea $0 < s < n$ y $1 < p < q < +\infty$ tales que $1/p - 1/q = s/n$. Entonces existe una constante $C = C(n, s, p)$ tal que se tenga para toda función $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ la estimación*

$$\|I_s(f)\|_{L^q} \le C\|f\|_{L^p}$$

Si $p = 1$ se tiene la estimación débil:

$$\|I_s(f)\|_{L^{q,\infty}} \le C\|f\|_{L^1}$$

Demostración.

- $I_s(f)$ está bien definida para toda función f acotada que decrece suficientemente rápido al infinito $\Longrightarrow$ basta trabajar en un subconjunto denso de todos los espacios L^p.
- Se puede suponer que $f \geq 0$ pues se tiene $|I_s(f)| \leq I_s(|f|)$.

Escribimos entonces:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x-y)}{|y|^{n-s}} dy = \int_{\{|y|<R\}} \frac{f(x-y)}{|y|^{n-s}} dy + \int_{\{|y|\geq R\}} \frac{f(x-y)}{|y|^{n-s}} dy = I_1(f)(x) + I_2(f)(x)$$

En donde R será fijado posteriormente.

- para I_1: Se observa que I_1 no es más que la convolución entre f y la función $g = |y|^{-n+s}\mathbb{1}_{\{|y|<R\}}$. Se tiene entonces que g es una función radial, decreciente, integrable y por lo tanto podemos escribir

  $$I_1(f)(x) \leq \mathfrak{M}(f)(x) \int_{\{|y|<R\}} |y|^{-n+s} dy = cR^s \mathfrak{M}(f)(x)$$

  en donde $\mathfrak{M}$ es la función maximal de Hardy-Littlewood.

- para I_2: la desigualdad de Hölder nos da

  $$|I_2(f)(x)| \leq \left(\int_{\{|y|\geq R\}} |y|^{(s-n)p'} \right)^{1/p'} \|f\|_{L^p} = cR^{-n/q} \|f\|_{L^p}$$

  en donde hemos usado las relaciones $1/p - 1/q = s/n$ y $1/p' + 1/p = 1$.

Juntando estas dos estimaciones obtenemos, para todo $R > 0$:

$$I_s(f)(x) \leq C \left(R^s \mathfrak{M}(f)(x) + R^{-n/q} \|f\|_{L^p} \right).$$

Ahora vamos a fijar R de manera a minimizar esta expresión, es decir

$$R = \frac{\mathfrak{M}(f)(x)^{-p/n}}{\|f\|_{L^p}^{-p/n}}$$

lo que nos da:

$$I_s(f)(x) \leq C \mathfrak{M}(f)(x)^{p/q} \|f\|_{L^p}^{1-p/q}. \tag{3}$$

Para terminar, basta elevar esta expresión a la raíz q-ésima, integrar sobre $\mathbb{R}^n$ y utilizar el hecho que la función maximal de Hardy-Littlewood es acotada de L^p en L^p para $1 < p < +\infty$.

Para tratar el caso $p = 1$ y $q = n/(n-s)$, utilizamos la estimación (3) para obtener

$$\big|\{I_s(f) > \alpha\}\big| \leq \big|\{C\mathfrak{M}(f)(x)^{(n-s)/n} \|f\|_{L^1}^{s/n} > \alpha\}\big| = \left| \left\{ \mathfrak{M}(f)(x) > \left(\frac{\alpha}{C\|f\|_{L^1}^{s/n}} \right)^{n/(n-s)} \right\} \right|$$

En este punto recordamos que la función maximal $\mathfrak{M}$ es acotada de $L^{1,\infty}$ en L^1 lo que nos permite escribir

$$\big|\{I_s(f) > \alpha\}\big| \leq \left(\frac{C\|f\|_{L^1}^{s/n}}{\alpha} \right)^{n/(n-s)} \|f\|_{L^1} = \frac{\|f\|_{L^1}^{n/(n-s)}}{\alpha^{n/(n-s)}}$$

de donde se deduce

$$\|I_s(f)\|_{L^{q,\infty}} \leq C\|f\|_{L^1}.$$

■

Observación 4 Existen muchas demostraciones de este resultado, el mérito de esta prueba es la utilización de las funciones maximales.

Potenciales de Bessel

Definición 3 *Sea $s > 0$. El potencial de Bessel de orden s es el operador definido por $J_s = (Id - \Delta)^{-s/2}$. La acción de este potencial sobre las funciones está explicitada por la fórmula:*

$$J_s(f)(x) = \left(\widehat{f}\,\widehat{G_s}\right)^{\vee} = f * G_s$$

en donde $\widehat{G_s}(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{-s/2}$

Proposición 4 *Sea $s > 0$, entonces $G_s(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Si $0 < s < n$, se tiene además*

$$G_s(x) \simeq \begin{cases} |x|^{s-n} & si\ |x| \leq 2 \\ e^{-|x|/2} & si\ |x| > 2 \end{cases}$$

Este resultado nos permite demostrar el análogo del Teorema 2 para los potenciales de Bessel:

Teorema 3 *Sea $0 < s < n$ y $1 < p < q < +\infty$ tales que $1/p - 1/q = s/n$. Entonces existe una constante $C = C(n, s, p)$ tal que se tenga para toda función $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ la estimación*

$$\|J_s(f)\|_{L^q} \leq C\|f\|_{L^p}$$

Si $p = 1$ se tiene la estimación débil:

$$\|J_s(f)\|_{L^{q,\infty}} \leq C\|f\|_{L^1}$$

Demostración. Utilizando la proposición anterior podemos escribir:

$$\begin{aligned} J_s(f)(x) &\leq C\left(\int_{\{|y|\leq 2\}} |f(x-y)||y|^{s-n}dy + \int_{\{|y|>2\}} |f(x-y)|e^{-|y|/2}dy\right) \\ &\leq C\left(I_s(|f|)(x) + \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|e^{-|y|/2}dy\right) \end{aligned}$$

Para terminar la demostración, basta utilizar el Teorema 2 para el primer término y las desigualdades de Young para el segundo. ■

Espacios Potenciales

- Como los espacios de Hölder, los espacios potenciales $\mathcal{W}^{s,p}$ con $s \geq 0$ permiten estudiar la regularidad fraccionaria.
- utilización intensiva los potenciales de Riesz y de Bessel.

Definición 4 *Definimos los espacios potenciales $\mathcal{W}^{s,p}(\mathbb{R}^n)$, con $1 \leq p \leq +\infty$ y $s \geq 0$, como el conjunto de todas las funciones f que pueden escribirse de la forma $f = J_s(g)$ con $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Este espacio puede ser dotado de la siguiente norma:*

$$\|f\|_{\mathcal{W}^{s,p}} = \|g\|_{L^p}$$

si $f = J_s(g)$.

Veamos que esta fórmula permite dar una definición consistente: es necesario verificar que si se tiene $J_s(g_1) = J_s(g_2)$, entonces se tiene que $g_1 = g_2$. Para ello escribimos, para toda función $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} J_s(g_1)(x)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} G_s(x-y)g_1(y)\varphi(x)dxdy = \int_{\mathbb{R}^n} g_1(x)J_s(\varphi)(x)dx$$

De manera que si se tiene $J_s(g_1) = J_s(g_2)$, entonces se tiene, para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} (g_1 - g_2)(x) J_s(\varphi)(x) dx = 0$$

de donde se deduce que $g_1 = g_2$.

Es posible ahora "pasar" la acción del potencial de Bessel en el nivel de Fourier para obtener la siguiente caracterización de los espacios potenciales:

Definición 5 *Sea $1 \leq p \leq +\infty$ y $s \geq 0$. Definimos el espacio Potencial $\mathcal{W}^{s,p}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ por*

$$\mathcal{W}^{s,p}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \ : \|f\|_{\mathcal{W}^{s,p}} < +\infty\}$$

en donde

$$\|f\|_{\mathcal{W}^{s,p}} = \left\| \left((1 + |\cdot|^2)^{s/2} \widehat{f} \right)^{\vee} \right\|_{L^p}$$

Observación 5 Como anunciado, la regularidad de las funciones se "lee" en su <u>decrecimiento al infinito</u> en el nivel de Fourier.

¿Cuál es la relación entre los espacios potenciales $\mathcal{W}^{s,p}$ y los espacios de Sobolev $W^{k,p}$? Vamos a ver con el siguiente resultado cómo y en qué sentido estos espacios coinciden.

Teorema 4 *Para todo $k \in \mathbb{N}$ y para $1 < p < +\infty$ se tiene la equivalencia entre espacios*

$$\mathcal{W}^{k,p}(\mathbb{R}^n) \simeq W^{k,p}(\mathbb{R}^n).$$

*Este resultado es **falso** si $p = 1$ o si $p = +\infty$.*

Observación 6 *Para $1 < p < +\infty$ definiremos los espacios de Sobolev de regularidad fraccionaria como los espacios potenciales $\mathcal{W}^{k,p}$.*

Demostración.

($\Longrightarrow$) Sea $f \in \mathcal{W}^{k,p}$ con $k \in \mathbb{N}$ y $1 < p < +\infty$. Entonces para todo multi-índice $|\alpha| \leq k$ se tiene

$$D^\alpha f = c\big(\widehat{f}(\xi)\, \xi^\alpha\big)^{\vee} = c\left(\widehat{f}(\xi)(1 + |\xi|^2)^{k/2} \frac{\xi^\alpha}{(1 + |\xi|^2)^{k/2}}\right)^{\vee} \tag{4}$$

Lema 2 *Para todo $|\alpha| \leq k$, la función $m_\alpha(\xi) = \frac{\xi^\alpha}{(1+|\xi|^2)^{k/2}}$ es un multiplicador en L^p con $1 < p < +\infty$. Esto significa que el operador $T_{m_\alpha}(f) = \big(\widehat{f} m_\alpha\big)^{\vee}$ es acotado de L^p en L^p.*

Prueba. (Rápida y sólo la parte fácil) Por el teorema de Plancherel podemos escribir

$$\|T_{m_\alpha}(f)\|_{L^2}^2 = \|\widehat{f} m_\alpha\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)|^2 \frac{|\xi|^{2\alpha}}{(1 + |\xi|^2)^k} d\xi \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

pues $|\alpha| \leq k$ y entonces tenemos la estimación $\|T_{m_\alpha}(f)\|_{L^2}^2 \leq C\|f\|_{L^2}^2$: el operador es acotado de L^2 en L^2.

Para la parte complicada (que no demostraremos aquí) hay que demostrar que se tiene

$$\|T_{m_\alpha}(f)\|_{L^{1,\infty}} \leq C\|f\|_{L^1}$$

Nótese la utilidad de los espacios de Lorentz.

Entonces, aplicando el teorema de interpolación de Marcinkiewicz se obtiene el resultado deseado para todo $1 < p < 2$, por dualidad se obtiene los casos restantes. (Notar la utilización de los espacios de Lorentz y de los resultados de interpolación). ■

Con este lema, volvemos a (4): como por hipótesis se tiene que $\left(\widehat{f}(\xi)(1+|\xi|^2)^{k/2}\right)^{\vee} \in L^p$, podemos escribir la estimación siguiente:

$$\|f\|_{W^{k,p}} = \sum_{|\alpha|\leq k} \|\partial^\alpha f\|_{L^p} \leq C \left\| \left((1+|\cdot|^2)^{k/2}\widehat{f}\right)^{\vee} \right\|_{L^p} = C\|f\|_{\mathcal{W}^{k,p}}$$

($\Longleftarrow$) Sea ahora $f \in W^{k,p}$ con $k \in \mathbb{N}$ y $1 < p < +\infty$. Escribimos entonces

$$(1+\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2)^{k/2} = \sum_{|\alpha|\leq k} \frac{k!}{\alpha_1!\cdots\alpha_n!}\xi^\alpha \frac{\xi^\alpha}{(1+|\xi|^2)^{k/2}}$$

Utilizamos una vez más el hecho que las funciones $m_\alpha(\xi) = \frac{\xi^\alpha}{(1+|\xi|^2)^{k/2}}$ son multiplicadores en L^p con $1 < p < +\infty$ si $|\alpha| \leq k$. Por lo tanto tenemos

$$\left((1+|\cdot|^2)^{k/2}\widehat{f}\right)^{\vee} = \sum_{|\alpha|\leq k} c_{\alpha,k}\left(m_\alpha(\xi)\,\xi^\alpha\,\widehat{f}(\xi)\right)^{\vee} = \sum_{|\alpha|\leq k} c_{\alpha,k}\left(m_\alpha(\xi)\widehat{\partial^\alpha f}(\xi)\right)^{\vee}$$

de donde se deduce

$$\|f\|_{\mathcal{W}^{k,p}} = \left\| \left((1+|\cdot|^2)^{k/2}\widehat{f}\right)^{\vee} \right\|_{L^p} \leq C \sum_{|\alpha|\leq k} \|\partial^\alpha f\|_{L^p} \leq C\|f\|_{W^{k,p}}$$

■

Demos, para terminar esta sección, otra caracterización equivalente:

Proposición 5 *Sea $1 < p < +\infty$ y sea $s > 0$. Entonces podemos caracterizar los espacios de Sobolev por medio de la norma:*

$$\|f\|_{W^{s,p}} = \|f\|_{L^p} + \|(-\Delta)^{s/2} f\|_{L^p}.$$

Observación 7 Esta es la definición más usada en el análisis armónico y funcional, pero no es la única y existen *otras* caracterizaciones equivalentes que pueden ser de gran utilidad.

$\Longrightarrow$ Si notamos $\|f\|_{\dot{W}^{s,p}} = \|(-\Delta)^{s/2} f\|_{L^p}$ vemos que la norma del espacio de Sobolev se construye como la suma de dos términos distintos.

$\Longrightarrow$ La cantidad $\|\cdot\|_{\dot{W}^{s,p}}$ es de gran utilidad. En particular tenemos:

Proposición 6 *Sea $1 < p < +\infty$ y sea $0 < \alpha < s$. Entonces tenemos la identidad*

$$\|(-\Delta)^{\alpha/2} f\|_{\dot{W}^{s-\alpha,p}} = \|f\|_{\dot{W}^{s,p}}.$$

En el caso de los espacios de Sobolev tenemos

$$\|(I-\Delta)^{\alpha/2} f\|_{W^{s-\alpha,p}} = \|f\|_{W^{s,p}}.$$

3. Desigualdades de Sobolev clásicas

Las desigualdades de Sobolev son una **herramienta fundamental** en el análisis y en el estudio de las Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDP). Esta desigualdad expresan el hecho sorprendente que es posible *controlar* el tamaño de una función por el tamaño de sus derivadas. Más precisamente tenemos el siguiente teorema:

Teorema 5 *Sea $0 < s < n/p$ y $1 < p < +\infty$. Si $1/p - 1/q = s/n$ entonces el espacio de Sobolev $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ está continuamente contenido en el espacio de Lebesgue $L^q(\mathbb{R}^n)$:*

$$\|f\|_{L^q} \leq C\|f\|_{W^{s,p}}$$

Observación 8 Hay una manera sencilla de verificar la razón por la cual se tiene la relación $1/p - 1/q = s/n$: basta reemplazar f por la función dilatada f_γ. Nótese que este relación entre índices es esencial, si s, p, q no están relacionados de esta forma el teorema es falso.

Demostración. Si $f \in W^{s,p}$, entonces sabemos que $f_s = \big((1 + |\xi|^2)^{s/2}\widehat{f}\big)^\vee \in L^p$ y podemos escribir

$$f(x) = \big((1 + |\xi|^2)^{-s/2}\widehat{f_s}\big)^\vee(x)$$

y por lo tanto tenemos $f = G_s * f_s$ en donde G_s es el núcleo de convolución del potencial de Bessel. Como $0 < s < n$, podemos usar la proposición 4 para obtener $|f| = |G_s * f_s| \leq CI_s(|f_s|)$. En este punto basta aplicar el Teorema 2:

$$\|f\|_{L^q} \leq C\|I_s(|f_s|)\|_{L^p} = C\|f\|_{W^{s,p}}$$

■

Cuando $p = 1$, no es posible usar los espacios potenciales $\mathcal{W}^{s,1}$ pues en este caso, éstos últimos no coinciden con los espacios de Sobolev clásicos $W^{k,1}$. Tenemos sin embargo el siguiente resultado:

Teorema 6 *Sea $1 < q < +\infty$ y $k \in \mathbb{N}$ tal que $1 < n/k$. Entonces si $k/n = 1 - 1/q$, se tiene la desigualdad de Sobolev:*

$$\|f\|_{L^q} \leq C\|f\|_{W^{k,1}}.$$