Lección n°4: Espacios de Nikol'skij, de Slobodeckij y de Besov

UCE, verano 2013

Introducción

Hemos visto hasta ahora básicamente *dos* formas de medir la regularidad:

- Con los espacios de Hölder-Zygmund $(0 < s < 2)$;

$$\|f\|_{\mathscr{C}^s} = \|f\|_{L^\infty} + \sup_{0\neq y\in\mathbb{R}^n}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\frac{|f(x+y)+f(x-y)-2f(x)|}{|y|^s}.$$

- Con los espacios de Sobolev: si $1 < p \leq +\infty$, $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ si y solo si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y se tiene

$$\sup_{y\neq 0}\frac{\|f(\cdot+y)-f(\cdot)\|_{L^p}}{|y|} < +\infty.$$

Observamos en particular que la noción de *diferencia* (simple o doble) permite capturar información sobre la *regularidad* de las funciones. Formalmente, lo que cambia entre estos dos espacios es la *norma de base* usada para medir esta información dada por las diferencias: en los espacios de Hölder-Zygmund es la norma del supremo, mientras que en los espacios de Sobolev es una norma L^p.

Vamos a presentar y construir los espacios de Besov combinando estas dos ideas: por un lado utilizar diferencias (simples o dobles) y por otro lado utilizar otras normas para medir la información producida por estas diferencias.

1. Espacios de Nikol'skij

Los primeros espacios que aparecieron según esta idea fueron los espacios de Nikol'skij (1955) en donde hay una diferencia simple en el estilo de los espacios de Hölder, pero medida con una norma L^p:

Definición 1 (Espacios de Nikol'skij) *Sea $1 \leq p < +\infty$, sea $0 < s$ un real no entero tal que $s = k + \sigma$ con $k \in \mathbb{N}$ y $\sigma \in]0,1[$. Definimos los espacios de Nikol'skij $N^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ de la siguiente forma: $N^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ es el espacio de funciones $f \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ cuyas derivadas $D^\alpha f$ de orden k verifican*

$$\sup_{y\neq 0}\frac{\|D^\alpha f(\cdot)-D^\alpha f(\cdot+y)\|_{L^p}}{|y|^\sigma} < +\infty.$$

Este espacio puede ser normado por

$$\|f\|_{N^{s,p}} = \|f\|_{W^{k,p}} + \sum_{|\alpha|=k}\sup_{y\neq 0}\frac{\|D^\alpha f(\cdot)-D^\alpha f(\cdot+y)\|_{L^p}}{|y|^\sigma}.$$

Esta norma se construye a partir de dos cantidades: la primera es la norma de un espacio de Sobolev entero (y por lo tanto mide la regularidad de las funciones de manera discreta), mientras que la segunda cantidad permite afinar esta medida de regularidad utilizando las diferencias simples que provienen de los espacios de Hölder.

Ejemplo: Sea $1 < p < +\infty$, si $f(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$ entonces $f \in N^{\frac{1}{p},p}(\mathbb{R})$.

2. Espacios de Slobodeckij

¿Qué sucede si, en vez de tomar el supremo en la variable y en la definición de los espacios de Nikol'skij, se toma una normla L^p? Si se procede de esta manera se obtienen los espacios de Slobodeckij que fueron utilizados para estudiar problemas de traza de los espacios de Sobolev en el año 1958.

Definición 2 (Espacios de Slobodeckij) *Sea $1 \leq p < +\infty$, sea $0 < s$ un real no entero tal que $s = k + \sigma$ con $k \in \mathbb{N}$ y $\sigma \in]0, 1[$. Definimos los espacios de Slobodeckij $S^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ de la siguiente manera: $S^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ es el espacio de funciones $f \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ cuyas derivadas $D^\alpha f$ de orden k verifican:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\|D^\alpha f(\cdot) - D^\alpha f(\cdot + y)\|_{L^p}^p}{|y|^{n+p\sigma}} \, dy < +\infty.$$

Este espacio puede ser normado por

$$\|f\|_{S^{s,p}} = \|f\|_{W^{k,p}} + \sum_{|\alpha|=k} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\|D^\alpha f(\cdot) - D^\alpha f(\cdot + y)\|_{L^p}^p}{|y|^{n+p\sigma}} \, dy \right)^{1/p}$$

Se observa que los espacios de Nikol'skij $N^{s,p}$ y los espacios de Slobodeckij $S^{s,p}$ permiten medir la regularidad de las funciones de una manera más fina que los espacios de Sobolev de orden entero $W^{k,p}$. Nótese que la noción de regularidad fraccionaria usada para estos dos espacios se basa en la idea de las diferencias simples presentadas con los espacios de Hölder.

Indiquemos que la condición $f \in S^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ es más restrictiva que $f \in N^{s,p}(\mathbb{R}^n)$, en particular se tiene la siguiente inclusión de espacios:

Proposición 1 *Sea $s > 0$ y $1 \leq p < +\infty$, entonces se tiene $S^{s,p}(\mathbb{R}^n) \subsetneq N^{s,p}(\mathbb{R}^n)$.*

Veremos la demostración de este hecho un poco más adelante. Observemos sin embargo que, si $1 < p < +\infty$ y si $f(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$, entonces $f \in N^{\frac{1}{p},p}(\mathbb{R})$; pero que $f \notin S^{\frac{1}{p},p}(\mathbb{R})$.

3. Primera definición de los espacios de Besov

Una vez que hemos llegado a este punto, no estamos muy lejos de la definición de los espacios de Besov: entre el "sup" en la variable y usado en los espacios de Nikol'skij y la norma L^p, en esta misma variable, de los espacios de Slobodeckij, es posible introducir un tercer parámetro q con $1 \leq q \leq +\infty$ de manera a considerar una norma L^q en la variable y. Además, es posible usar la idea de las diferencias dobles de los espacios de Zygmund. Todo esto nos lleva a la siguiente definición:

Definición 3 (Espacios de Besov) *Sean $1 \leq p \leq +\infty$, $1 \leq q \leq +\infty$ y $s = k + \sigma$ con $k \in \mathbb{N}$ y $\sigma \in]0, 1]$. Definimos los espacios de Besov $B_q^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ de la siguiente manera: $B_q^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ es el espacio de funciones $f \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ cuyas derivadas $D^\alpha f$ de orden k verifican:*

$$\frac{\|D^\alpha f(\cdot + y) + D^\alpha f(\cdot - y) - 2D^\alpha f(\cdot)\|_{L^p}}{|y|^\sigma} \in L^q(\mathbb{R}^n, \frac{dy}{|y|^n}).$$

Este espacio puede ser normado por la cantidad

$$\|f\|_{B_q^{s,p}} = \|f\|_{W^{k,p}} + \sum_{|\alpha|=k} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\|D^\alpha f(\cdot + y) + D^\alpha f(\cdot - y) - 2D^\alpha f(\cdot)\|_{L^p}^q}{|y|^{n+q\sigma}} dy \right)^{1/q}.$$

Estos espacios fueron estudiados por O.V. Besov en 1960. Notemos que esta definición utiliza todos los ingredientes presentados hasta hora: diferencias dobles, derivadas y dos tipos de normas: L^p en la variable x y L^q en la variable y.

Observación 1 Si el índice $s > 0$ no es un entero ($\sigma \neq 1$), la doble diferencia que interviene en la definición de los espacios de Besov puede ser reemplazada por una diferencia simple, en el sentido que estas dos cantidades son equivalentes.

Con esta observación, tenemos las siguientes identificaciones:

- Espacios de Hölder-Zygmund: $\mathscr{C}^s(\mathbb{R}^n) = B^{s,\infty}_{\infty}(\mathbb{R}^n)$
- Espacios de Nikol'skij: $N^{s,p}(\mathbb{R}^n) = B^{s,p}_{\infty}(\mathbb{R}^n)$
- Espacios de Slobodeckij: $S^{s,p}(\mathbb{R}^n) = B^{s,p}_{p}(\mathbb{R}^n)$

Es muy importante notar que, si bien los espacios de Zygmund, de Nikol'ski y de Slobodeckij han sido desarrollados para estudiar la regularidad fraccionaria, los espacios clásicos $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)$ y $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ *no son* tomados en cuenta en esta escala de espacios de Besov.

4. Una notación y un punto de partida

Es necesario explicar la notación $B^{s,p}_q$ fijada para describir los espacios de Besov y el rol de cada uno de estos parámetros.

- El índice real $\mathbf{s} > 0$ expresa la *regularidad* pedida,
- El parámetro $1 \leq \mathbf{p} \leq +\infty$ explicita la norma de Lebesgue de *base* utilizada,
- El parámetro $1 \leq \mathbf{q} \leq +\infty$ constituye una *corrección de la regularidad*.

Los dos primeros parámetros serán puestos arriba, para recordar una cierta cercanía con los espacios de Sobolev $W^{k,p}$, el tercer parámetro será puesto abajo.

Para terminar esta primera definición vamos a usar la noción de diferencias iteradas de la segunda lección:

Sea $k \in \mathbb{N}$ un entero positivo y sea f una función definida sobre $\mathbb{R}^n$. La diferencia simple de una función f está dada por $\Delta_y f(x) = f(x+y) - f(x)$, y las diferencias iteradas de f están definidas por $\Delta_y^{k+1} f(x) = \Delta_y(\Delta_y^k f(x))$. Podemos reescribir estas diferencias iteradas con la fórmula:

$$\Delta_y^k f(x) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} f(x + jy) \qquad \text{où } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Definición 4 (Espacios de Besov por diferencias iteradas) *Sea $s > 0$ un real, y sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $k - 1 \leq s < k$.*

Sea $1 \leq p, q < +\infty$. Definimos los espacios de Besov por medio de la cantidad

$$\|f\|_{B^{s,p}_q} = \|f\|_{L^p} + \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\|\Delta_y^k f\|_{L^p}^q}{|y|^{n+sq}} dy \right)^{1/q}, \tag{1}$$

con las modificaciones usuales si $q = +\infty$:

$$\|f\|_{B^{s,p}_\infty} = \|f\|_{L^p} + \sup_{y \neq 0} \frac{\|\Delta_y^k f\|_{L^p}}{|y|^s}. \tag{2}$$

Es muy importante observar que para definir los espacios de Besov **no es necesario utilizar la noción de derivadas**, pero que es indispensable utilizar la noción de diferencias iteradas. En este sentido, las definiciones dadas en las fórmulas (1) y (2) son más simples y generales, de manera que constituyen un buen punto de partida.

El caso cuando $0 < s < 1$ es de especial interés por su simplicidad y porque muestra claramente el rol de cada uno de los tres parámetros del espacio $B^{s,p}_q(\mathbb{R}^n)$:

Definición 5 *Sea $0 < s < 1$ un real.*
Sea $1 \leq p, q < +\infty$. Definimos los espacios de Besov $B^{s,p}_q(\mathbb{R}^n)$ por medio de la cantidad

$$\|f\|_{B^{s,p}_q} = \|f\|_{L^p} + \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x+y) - f(x)|^p}{|y|^{(n+sq)\frac{p}{q}}} dx\right]^{q/p} dy\right)^{1/q}.$$

En particular se tiene:

- para el espacio $B^{s,p}_1(\mathbb{R}^n)$:
$$\|f\|_{B^{s,p}_1} = \|f\|_{L^p} + \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\|f(\cdot + y) - f(\cdot)\|_{L^p}}{|y|^{n+s}} dy.$$
- para el espacio $B^{s,p}_\infty(\mathbb{R}^n)$:
$$\|f\|_{B^{s,p}_\infty} = \|f\|_{L^p} + \sup_{|y|>0} \frac{\|f(\cdot + y) - f(\cdot)\|_{L^p}}{|y|^s}.$$

5. Una segunda definición: la caracterización térmica

La denominación *térmica* proviene del hecho que se usa el núcleo del calor h_t para la definición de los espacios de Besov. Ya hemos visto en la segunda lección que el uso de este núcleo se aplica a los espacios de Hölder y aquí vamos a desarrollar y ampliar este punto de vista a los espacios de Besov.

$\Longrightarrow$ Esta caracterización térmica tiene muchas aplicaciones interesantes

$\Longrightarrow$ Es posible verificar más fácilmente algunas propiedades de los espacios de Besov por medio de esta caracterización.

5.1. Algunas propiedades útiles

Recordemos que la acción del semi-grupo del calor H_t, definido formalmente por $H_t = e^{t\Delta}$, está dada por convolución con el núcleo del calor que es una gaussiana:

$$H_t(f)(x) = f * h_t(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) \frac{e^{-\frac{|y|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{n/2}} dy$$

Antes de lanzarnos en la caracterización térmica de los espacios de Besov, es necesario explicitar algunas de las propiedades del núcleo del calor que serán utilizadas.

1) Se tiene $h_t(x) \geq 0$ y $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} h_t(x)dx = 1$.

2) para todo $t, s > 0$ se tiene $h_t * h_s = h_{s+t}$.

3) para todo $t > 0$ fijo, la función $x \longmapsto h_t(x)$ pertenece a la clase de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

4) $h_t \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \times]0, +\infty[)$.

Estas propiedades del núcleo del calor intervienen de forma decisiva en muchos resultados del análisis. Necesitaremos ser más precisos sobre el comportamiento del núcleo del calor:

Proposición 2 *Se tienen las siguientes estimaciones para el núcleo del calor h_t:*

(i) para todo $t > 0$:

$$|h_t(x)| \leq \begin{cases} c|x|^{-n} & si\ |x|^2 \geq t \\ ct^{-n/2} & si\ |x|^2 \leq t \end{cases}$$

(ii) Si $\alpha \in \mathbb{N}^n$ es un multi-índice, y si $k \in \mathbb{N}$ entonces

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial t^k} D^\alpha h_t(x)\right| \leq \begin{cases} c|x|^{-[n+|\alpha|+2k]} & si\ |x|^2 \geq t \\ \\ ct^{-[n+|\alpha|+2k]/2} & si\ |x|^2 \leq t \end{cases}$$

(iii) para todo $t > 0$ y para todo $1 \leq p \leq +\infty$ se tiene

$$\left\|\frac{\partial^k}{\partial t^k} D^\alpha h_t\right\|_{L^p} \leq ct^{-\frac{|\alpha|+2k+n(1-1/p)}{2}}$$

(iv) para todo $t > 0$ y para todo $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p \leq +\infty$ se tiene

$$\left\|\frac{\partial^k}{\partial t^k} D^\alpha H_t(f)\right\|_{L^p} \leq ct^{-\frac{|\alpha|+2k}{2}} \|f\|_{L^p}$$

5.2. La definición térmica

Definición 6 (Caracterización Térmica de los espacios de Besov) *Si $s > 0$ y si k es un entero tal que $k > s/2$, diremos que una función f pertenece al espacio de Besov $B_q^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p, q \leq +\infty$ si y solo si la cantidad siguiente es acotada:*

$$\|f\|_{L^p} + \left(\int_0^{+\infty} t^{(k-s/2)q} \left\|\frac{\partial^k H_t f}{\partial t^k}\right\|_{L^p}^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} \tag{3}$$

y esta cantidad define una norma equivalente sobre el espacio de Besov $B_q^{s,p}(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Vamos a verificar que la definición por medio de diferencias es equivalente a la definición térmica en el caso cuando $0 < s < 1$ y $1 \leq p, q \leq +\infty$, es decir con $k = 1$.

$\Longrightarrow$ Sea pues $f \in B_q^{s,p}(\mathbb{R}^n)$, vamos a ver que la cantidad (3) es acotada.

- Tratamos primero el caso cuando $q = 1$, es decir que estudiamos el espacio $B_1^{s,p}(\mathbb{R}^n)$. Para empezar observamos que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial t} h_t(x)dx = 0$, de manera que se tiene

$$\frac{\partial H_t f}{\partial t}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} [f(x-y) - f(x)] \frac{\partial}{\partial t} h_t(y)dy$$

A partir de esta identidad se obtiene

$$\left\|\frac{\partial H_t f}{\partial t}\right\|_{L^p} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left|\frac{\partial}{\partial t} h_t(y)\right| \|f(\cdot - y) - f(\cdot)\|_{L^p} dy.$$

Usando ahora las estimaciones sobre el núcleo del calor tenemos:

$$\left\|\frac{\partial H_t f}{\partial t}\right\|_{L^p} \leq c\int_{\mathbb{R}^n} t^{-\frac{n+2}{2}} e^{-\frac{|y|^2}{ct}} |y|^{n+s} \frac{\|f(\cdot - y) - f(\cdot)\|_{L^p}}{|y|^{n+s}} dy \tag{4}$$

es decir, usando el teorema de Fubini

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} t^{1-s/2}\left\|\frac{\partial H_t f}{\partial t}\right\|_{L^p}\frac{dt}{t} &\leq c\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\|f(\cdot-y)-f(\cdot)\|_{L^p}}{|y|^{n+s}}\left(\int_0^{+\infty}\left(\frac{|y|^2}{t}\right)^{\frac{n+s}{2}}e^{-\frac{|y|^2}{ct}}\frac{dt}{t}\right)dy.\\ &\leq C\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\|f(\cdot-y)-f(\cdot)\|_{L^p}}{|y|^{n+s}}dy\end{aligned}$$

De donde se obtiene la estimación deseada.

- Tratamos ahora el caso cuando $q=+\infty$ considerando el espacio $B^{s,p}_\infty$. Seguimos los mismos pasos para obtener la estimación (4). Tenemos entonces que

$$t^{1-s/2}\left\|\frac{\partial H_t f}{\partial t}\right\|_{L^p}\leq c\int_{\mathbb{R}^n} t^{1-s/2-\frac{n+2}{2}}e^{-\frac{|y|^2}{ct}}|y|^s\frac{\|f(\cdot-y)-f(\cdot)\|_{L^p}}{|y|^s}dy$$

De manera que se obtiene

$$\begin{aligned}\sup_{t>0} t^{1-s/2}\left\|\frac{\partial H_t f}{\partial t}\right\|_{L^p} &\leq c\sup_{t>0}\int_{\mathbb{R}^n} t^{1-s/2-\frac{n+2}{2}}e^{-\frac{|y|^2}{ct}}|y|^s\frac{\|f(\cdot-y)-f(\cdot)\|_{L^p}}{|y|^s}dy\\ &\leq c\left(\sup_{|y|>0}\frac{\|f(\cdot-y)-f(\cdot)\|_{L^p}}{|y|^s}\right)\sup_{t>0}\int_{\mathbb{R}^n} t^{-\frac{n+s}{2}}e^{-\frac{|y|^2}{ct}}|y|^s dy\\ &\leq C\left(\sup_{|y|>0}\frac{\|f(\cdot-y)-f(\cdot)\|_{L^p}}{|y|^{n+s}}\right)\end{aligned}$$

Con esto se tiene que si $f\in B^{s,p}_q(\mathbb{R}^n)$ entonces la cantidad (3) es acotada.

$\Longrightarrow$ Se tiene también la recíproca: si f es una función tal que la cantidad (3) es acotada, entonces $f\in B^{s,p}_q(\mathbb{R}^n)$. ■

Observación 2 *Cuando la función f pertenece a un espacio de Lebesgue L^p, entonces en la definición térmica (3) es suficiente considerar la integral entre* 0 *y* 1*:*

$$\|f\|_{B^{s,p}_q}=\|f\|_{L^p}+\left(\int_0^1 t^{(k-s/2)q}\left\|\frac{\partial^k H_t f}{\partial t^k}\right\|_{L^p}^q\frac{dt}{t}\right)^{1/q}$$

5.3. Algunas propiedades de los espacios de Besov

Una vez que tenemos a nuestra disposición esta caracterización térmica, es posible verificar de manera muy directa algunos resultados importantes.

$\Longrightarrow$ Para $s>0$, y para todo $1\leq p,q\leq+\infty$ notamos $\|\cdot\|_{\dot{B}^{s,p}_q}$ la cantidad determinada por

$$\|f\|_{\dot{B}^{s,p}_q}=\left(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\|\Delta^k_y f\|^q_{L^p}}{|y|^{n+sq}}dy\right)^{1/q}\qquad(\text{con } k-1\leq s<k)$$

$\Longrightarrow$ Por lo que acabamos de ver, esta cantidad es equivalente a

$$\|f\|_{\dot{B}^{s,p}_q}=\left(\int_0^{+\infty} t^{(k-s/2)q}\left\|\frac{\partial^k H_t f}{\partial t^k}\right\|_{L^p}^q\frac{dt}{t}\right)^{1/q}\qquad(\text{con } 0<s/2<k)$$

Observación 3 *Vemos que la norma de los espacios de Besov se construye por medio de dos cantidades distintas: una norma L^p a la cual se añade una segunda cantidad notada $\dot{B}^{s,p}_q$. Esta última cantidad permite definir los espacios homogéneos que serán presentados más adelante.*

Tenemos el resultado siguiente:

Proposición 3 *Sean $1 \leq p, q \leq +\infty$, $0 < \alpha < s$. Entonces se tiene la relación:*

$$\|(-\Delta)^{\alpha/2} f\|_{\dot{B}^{s-\alpha,p}_q} \simeq \|f\|_{\dot{B}^{s,p}_q}$$

Prueba. Empezamos verificando que se tiene $\|(-\Delta)^{\alpha/2} f\|_{\dot{B}^{s-\alpha,p}_q} \leq C\|f\|_{\dot{B}^{s,p}_q}$. Escribimos pues:

$$\begin{aligned}
\|(-\Delta)^{\alpha/2} f\|_{\dot{B}^{s-\alpha,p}_q} &= \left(\int_0^{+\infty} t^{(k-(s-\alpha)/2)q} \left\| \frac{\partial^k H_t}{\partial t^k} (-\Delta)^{\alpha/2} f \right\|_{L^p}^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} \\
&= \left(\int_0^{+\infty} t^{(k-(s-\alpha)/2)q} \left\| (-\Delta)^{\alpha/2} h_{t/2} * \frac{\partial^k H_{t/2} f}{\partial t^k} \right\|_{L^p}^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} \\
&\leq \left(\int_0^{+\infty} t^{(k-(s-\alpha)/2)q} \left\| (-\Delta)^{\alpha/2} h_{t/2} \right\|_{L^1}^q \left\| \frac{\partial^k H_{t/2} f}{\partial t^k} \right\|_{L^p}^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} \\
&\leq C \left(\int_0^{+\infty} t^{(k-(s-\alpha)/2)q} t^{-\alpha/2q} \left\| \frac{\partial^k H_t f}{\partial t^k} \right\|_{L^p}^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} = \|f\|_{\dot{B}^{s,p}_q}.
\end{aligned}$$

Usando el hecho que $f = (-\Delta)^{-\alpha/2}(-\Delta)^{\alpha/2} f$ se obtiene de forma totalmente similar la desigualdad recíproca. ■

Observación 4

- *Nótese que los cálculos anteriores se basan únicamente sobre la homogeneidad del núcleo del calor y son por lo tanto cálculos simples. Hacer estos cálculos por medio de la definición que se basa en diferencias finitas pueden resultar muy complicados.*
- *Esta propiedad se mantiene al considerar los espacios de Besov $B^{s,p}_q$, basta considerar $(I-\Delta)^{\alpha/2}$ en vez de $(-\Delta)^{\alpha/2}$.*

$\Longrightarrow$ La proposición anterior indica formalmente que si añadimos la acción del operador $(\Delta)^{\alpha/2}$ a una función de un espacio $B^{s,p}_q(\mathbb{R}^n)$, entonces es necesario *compensar* la regularidad y nos situamos en el espacio $B^{s-\alpha,p}_q(\mathbb{R}^n)$.

$\Longrightarrow$ Podemos de esta forma definir los espacios de Besov de orden *negativo* de la siguiente manera:

Definición 7 (Espacios de Besov de regularidad negativa) *Sea $s > 0$ y sean $1 \leq p, q \leq +\infty$. Definimos los espacios de Besov $B^{-s,p}_q(\mathbb{R}^n)$ como el conjunto de distribuciones tales que la siguiente cantidad sea finita:*

$$\|f\|_{B^{-s,p}_q} = \|H_1(f)\|_{L^p} + \left(\int_0^{+\infty} t^{sq/2} \|H_t f\|_{L^p}^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q}$$

Una cantidad que será de gran utilidad en lo que sigue es:

$$\|f\|_{\dot{B}^{-s,\infty}_\infty} = \sup_{t>0} t^{s/2} \|H_t f\|_{L^\infty}.$$

6. Una tercera definición: el análisis de Littlewood-Paley

Empecemos considerando el espacio $B^{s,p}_q(\mathbb{R}^n)$ con $0 < s < 1$. Tenemos entonces, con la caracterización térmica:

$$\|f\|_{B^{s,p}_q} = \|f\|_{L^p} + \left(\int_0^1 t^{-sq/2} \left\|\frac{\partial H_t f}{\partial t}\right\|_{L^p}^q dt\right)^{1/q} = \|f\|_{L^p} + \left(\int_0^1 t^{-sq/2} \|f * \psi_t\|_{L^p}^q dt\right)^{1/q}$$

Dado que $0 < t < 1$ es posible discretizar la integral anterior considerando $t \sim 2^{-j/2}$ con $j \in \mathbb{N}$. De esta manera, se obtiene (al menos formalmente) la expresión

$$\left(\int_0^1 t^{-sq/2}\,\|f * \psi_t\|_{L^p}^q\,dt\right)^{1/q} \simeq \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} 2^{jsq}\|f*\psi_j\|_{L^p}^q\right)^{1/q}$$

$\Longrightarrow$ Vamos a generalizar esta idea usando funciones especiales

$\Longrightarrow$ Las funciones cuya transformada de Fourier es de soporte acotado tienen buenísimas propiedades

$\Longrightarrow$ Es útil "recortar" las funciones en el nivel de Fourier para usar estas propiedades

$\Longrightarrow$ Obtendremos un tratamiento unificado de varios espacios funcionales.

Desigualdades de Bernstein

Explican las relaciones existentes entre el soporte en Fourier de una función, su regularidad y su norma L^p:

Teorema 1 *Sean $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$, R_1, R_2 dos reales fijos tales que $0 < R_1 < R_2$ y sea $\lambda > 0$ un real.*

1) *Si sop$(\widehat{f}) \subset B(0,\lambda R_1)$, entonces existe una constante $C > 0$ para todo entero k y para todo p,q con $1 \le p \le q \le +\infty$, tal que:*

$$\sup_{|\alpha|=k}\|\partial^\alpha f\|_{L^q} \le C^k\lambda^{k+n(1/p-1/q)}\|f\|_{L^p}. \tag{5}$$

2) *Si sop$(\widehat{f}) \subset \mathcal{C}(0,\lambda R_1,\lambda R_2)$, entonces existen dos constantes $C_1, C_2 > 0$ para todo entero k y para todo p,q con $1 \le p \le q \le +\infty$, tal que:*

$$C_1^{-k}\lambda^k\|f\|_{L^p} \le \sup_{|\alpha|=k}\|\partial^\alpha f\|_{L^p} \le C_2^k\lambda^k\|f\|_{L^p}. \tag{6}$$

Prueba. Si reemplazamos la función f por $f_\lambda = \delta_\lambda[f] = f(\lambda x_1, ..., \lambda x_n)$, obtenemos

$$\sup_{|\alpha|=k}\|\partial^\alpha f_\lambda\|_{L^q} = \lambda^{k-n/q}\sup_{|\alpha|=k}\|\partial^\alpha f\|_{L^q} \quad \text{y} \quad \|f_\lambda\|_{L^p} = \lambda^{-n/p}\|f\|_{L^p}$$

$\Longrightarrow$ basta considerar $\lambda = 1$.

1) Sea $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ t.q. $\varphi(\xi) = 1$ sobre la bola $B(0,R_1)$ y notamos $\widehat{g}(\xi) = \varphi(\xi)$. Tenemos $\widehat{f}(\xi) = \widehat{g}(\xi)\widehat{f}(\xi)$ y pasando a la transformada de Fourier inversa obtenemos $f(x) = g * f(x)$. Estudiemos $\|\partial^\alpha f\|_{L^q}$. Por las propiedades del producto de convolución se tiene con Young $\|\partial^\alpha f\|_{L^q} = \|f * \partial^\alpha g\|_{L^q} \le \|f\|_{L^p}\|\partial^\alpha g\|_{L^r}$. Utilizando las desigualdades de interpolación obtenemos que

$$\|\partial^\alpha g\|_{L^r} \le \|\partial^\alpha g\|_{L^1}^{1/r}\|\partial^\alpha g\|_{L^\infty}^{1-1/r} \le \|\partial^\alpha g\|_{L^1} + \|\partial^\alpha g\|_{L^\infty}.$$

Sabemos que $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$, de manera que $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ y por las propiedades de las funciones de la classe de Schwartz tenemos que $\|\partial^\alpha g\|_{L^1} \le C\|\partial^\alpha g\|_{L^\infty}$. Además, por definición de transformada de Fourier inversa tenemos

$$\|\partial^\alpha g\|_{L^\infty} \le \|\xi^\alpha\varphi\|_{L^1} \le R_1^\alpha\|\varphi\|_{L^1} = CR_1^\alpha \le C^k$$

2) Por la primera parte, basta verificar $C_1^{-k}\|f\|_{L^p} \le \sup_{|\alpha|=k}\|\partial^\alpha f\|_{L^p}$. Consideramos la función $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ tal que $\psi(\xi) = 1$ sobre la corona $\mathcal{C}(0,R_1,R_2)$ y definimos una nueva función g_α como $\widehat{g_\alpha}(\xi) = (-i\xi)^\alpha|\xi|^{-2k}\psi(\xi)$ de manera que $g_\alpha \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$. Dado que $\sum_{|\alpha|=k}\frac{k!}{\alpha!}(-i\xi)^\alpha(i\xi)^\alpha = |\xi|^{2k}$, podemos escribir

$$\widehat{f}(\xi) = \sum_{|\alpha|=k}\frac{k!}{\alpha!}\widehat{g_\alpha}(\xi)(i\xi)^\alpha\widehat{f}(\xi).$$

Pasando a la transformada de Fourier inversa obtenemos $f(x) = \sum_{|\alpha|=k}\frac{k!}{\alpha!}\; g_\alpha * (\partial^\alpha f)(x)$. Calculamos ahora la norma L^p de esta identidad + Young: $\|f\|_{L^p} = \sum_{|\alpha|=k}\frac{k!}{\alpha!}\;\|g_\alpha\|_{L^1}\|\partial^\alpha f\|_{L^p} \le C_1^k\sup_{|\alpha|=k}\|\partial^\alpha f\|_{L^p}$. ■

Partición de la unidad

- **Primera familia de funciones:** Sea $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ t.q.

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |\xi| \leq 1/2 \\ 0 & \text{si} \quad |\xi| > 1. \end{cases} \tag{7}$$

$\Longrightarrow$ el soporte de $\widehat{\varphi}$ está contenido en la bola $\{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq 1\}$.

Para todo $j \in \mathbb{N}$ definimos las funciones dilatadas φ_j de esta forma $\widehat{\varphi}_j(\xi) = \widehat{\varphi}(2^{-j}\xi)$.
$\Longrightarrow$ el soporte de $\widehat{\varphi}_j$ está contenido en las bolas de radio diádico $\{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq 2^j\}$.

- **Segunda familia de funciones:** Definimos ψ como

$$\widehat{\psi}(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi/2) - \widehat{\varphi}(\xi). \tag{8}$$

Luego, para todo $j \in \mathbb{Z}$ escribimos $\widehat{\psi}_j(\xi) = \widehat{\psi}(2^{-j}\xi) = \widehat{\varphi}_{j+1}(\xi) - \widehat{\varphi}_j(\xi)$.
$\Longrightarrow$ el soporte de estas funciones está contenido en las coronas diádicas

$$\mathcal{C}(0, 2^{j-1}, 2^j) = \{\xi \in \mathbb{R}^n : 2^{j-1} \leq |\xi| \leq 2^{j+1}\}.$$

Observación 5 Nótese que todas las funciones $\widehat{\varphi}_j$ y $\widehat{\psi}_j$ pertenecen al espacio $\mathcal{C}_0^\infty$ que es un subconjunto de $\mathcal{S}$. Dado que la transformada de Fourier es una biyección en $\mathcal{S}$, obtenemos que todas las funciones φ_j y ψ_j pertenecen a la clase de Schwartz $\mathcal{S}$.

A partir de estas familias de funciones obtenemos algunos resultados interesantes que serán fundamentales para explicar las propiedades de los bloques diádicos.

Proposición 4 *Sea φ la función de base fijada en (7). Entonces*

1) Para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$, se tiene la identidad $\widehat{\varphi}_j(\xi) = \widehat{\varphi}_0(\xi) + \sum_{k=0}^{j-1} \widehat{\psi}_k(\xi)$

2) Tenemos el límite $\lim\limits_{j \to +\infty} \widehat{\varphi}_j(\xi) \equiv 1$

3) Se tiene la identidad siguiente $\widehat{\varphi}_0(\xi) + \sum_{j=0}^{+\infty} \widehat{\psi}_j(\xi) \equiv 1$

Prueba. Moralmente, basta usar las definiciones de φ_j y de ψ_j: en efecto, el primer punto es inmediato. El tercero es una consecuencia del segundo pues se tiene

$$\widehat{\varphi}_0(\xi) + \sum_{j=0}^{+\infty} \widehat{\psi}_j(\xi) = \lim_{j \to +\infty} \left(\widehat{\varphi}_0(\xi) + \sum_{k=0}^{j-1} \widehat{\psi}_k(\xi) \right) = \lim_{j \to +\infty} \widehat{\varphi}_j(\xi) \equiv 1.$$

Para el segundo punto hacer un dibujo. ■

Este resultado explica lo que sucede cuando $j \longrightarrow +\infty$, es decir en las grandes frecuencias. El resultado a continuación muestra qué pasa cuando $j \longrightarrow 0$ con las pequeñas frecuencias.

Proposición 5 *Sea φ la función de base fijada en (7). Entonces*

1) *Para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ tal que $\xi \neq 0$ se tiene* $\widehat{\varphi}_j(\xi) = \sum_{k \leq j-1} \widehat{\psi}_k(\xi)$

2) *Se tiene la identidad siguiente para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ tal que $\xi \neq 0$*

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \widehat{\psi}_j(\xi) \equiv 1 \tag{9}$$

Cuidado! Las dos identidades precedentes son **falsas** cuando $\xi = 0$ pues se tiene por un lado $\widehat{\psi}_j(0) = 0$ para todo j, pero por otro lado se tiene $\widehat{\varphi}_j(0) = 1$.

Prueba. Estas dos propiedades se deducen directamente de las definiciones de las funciones φ_j y ψ_j. ■

Proposición 6

- *Para todo $j \in \mathbb{Z}$ se tiene la identidad $\|\varphi_j\|_{L^1} = \|\varphi\|_{L^1}$ y $\|\varphi_j\|_{L^p} = 2^{jn(1/p-1)}\|\varphi\|_{L^p}$ para $1 < p < +\infty$.*
- *Para todo $j \in \mathbb{Z}$, las funciones ψ_j tienen un momento nulo:* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \psi_j(x)dx = 0$.

Prueba.

- Para el primer punto basta observar que se tiene la identidad $\varphi_j(x) = 2^{-jn}\varphi(2^{-j}x)$, un simple cambio de variable muestra entonces que se tiene el resultado deseado.
- Para el segundo escribimos:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi_j(x)dx \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_{j+1}(x) - \varphi_j(x)dx = 2^{-(j+1)n}\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(2^{-(j+1)}x)dx - 2^{-jn}\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(2^{-j}x)dx = 0$$

■

Bloques diádicos

- A partir de las funciones φ_j y ψ_j que acabamos de considerar es posible determinar operadores utilizando el producto de convolución.
- Estos productos de convolución están bien definidos para distribuciones temperadas pues las funciones φ_j y ψ_j son elementos de la clase de Schwartz.

Definición 8 (Operadores de Littlewood-Paley) *Sea $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Para todo $j \in \mathbb{Z}$ definimos*

- *los* operadores de Littlewood-Paley S_j *por* $S_j(f) = f * \varphi_j$.
- *los* Bloques diádicos Δ_j *por* $\Delta_j(f) = f * \psi_j$.

Al nivel de Fourier tenemos

$$\widehat{S_j(f)}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{\varphi}_j(\xi) \qquad \text{y} \qquad \widehat{\Delta_j(f)}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{\psi}_j(\xi)$$

$\Longrightarrow$ los operadores S_j y Δ_j son operadores de truncatura en Fourier:

$$sop(\widehat{S_j(f)}) \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq 2^j\} \qquad \text{y} \qquad sop(\widehat{\Delta_j(f)}) \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : 2^{j-1} \leq |\xi| \leq 2^{j+1}\}.$$

De esta forma se realiza, al nivel de Fourier, un "corte" diádico en el soporte de las funciones. Pues cada uno de estos operadores está bien localizado en Fourier: su soporte está totalmente controlado.

Veamos un primer resultado:

Proposición 7 *Para toda distribución temperada $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ se tiene*

$$S_j(f) = S_0(f) + \sum_{k=0}^{j-1} \Delta_j(f)$$

Prueba. Pasar en Fourier y usar el teorema 4. En efecto:

$$\widehat{S_0(f)} + \sum_{k=0}^{j-1} \widehat{\Delta_j(f)} \;=\; \widehat{f}(\xi)\widehat{\varphi}_0(\xi) + \sum_{k=0}^{j-1} \widehat{f}(\xi)\widehat{\psi}_k(\xi) = \widehat{f}(\xi)\left(\widehat{\varphi}_0(\xi) + \sum_{k=0}^{j-1} \widehat{\psi}_k(\xi)\right) = \widehat{f}(\xi)\widehat{\varphi}_j(\xi) = \widehat{S_j(f)}$$

de donde se deduce la identidad deseada. ■

Desigualdades de Bernstein aplicadas a los bloques diádicos

- En el nivel de Fourier los bloques diádicos tienen un soporte acotado de forma muy precisa: están en coronas diádicas
- Este es justamente el caso ideal para utilizar las desigualdades de Bernstein.

Definición 9 (Funciones auxiliares) *Sean las funciones φ y ψ definidas por (7) y (8) respectivamente.*

1) Definimos la función $\widetilde{\varphi}$ como $\widehat{\widetilde{\varphi}}(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi/2)$. Para todo $j \in \mathbb{Z}$ definimos $\widetilde{\varphi}_j$ como $\widehat{\widetilde{\varphi}}_j(\xi) = \widehat{\widetilde{\varphi}}(2^{-j}\xi)$.

2) Definimos la función $\widetilde{\psi}$ como $\widehat{\widetilde{\psi}}(\xi) = \widehat{\widetilde{\varphi}}(\xi/2) - \widehat{\widetilde{\varphi}}(\xi)$. Para todo $j \in \mathbb{Z}$ definimos $\widetilde{\psi}_j$ como $\widehat{\widetilde{\psi}}_j(\xi) = \widehat{\widetilde{\psi}}(2^{-j}\xi)$.

¿Cuál es la utilidad de estas funciones? Nótese que sobre el soporte de $\widehat{\varphi}$ se tiene que $\widehat{\widetilde{\varphi}} = 1$, de manera que se tiene la identidad $\widehat{\varphi}(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi)\widehat{\widetilde{\varphi}}(\xi)$ y si se tiene esta identidad en Fourier se tienen resultados interesantes en la variable real! por ejemplo, podremos pasar todas las derivadas a las funciones auxiliares:

Definición 10 (Operadores asociados) *Sea $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Para todo $j \in \mathbb{Z}$ definimos los operadores $\widetilde{S_j}$ y $\widetilde{\Delta_j}$ asociados a las funciones $\widetilde{\varphi}_j$ y $\widetilde{\psi}_j$ por las fórmulas*

$$\widetilde{S_j}(f) = f * \widetilde{\varphi}_j \qquad \text{es decir en Fourier} \qquad \widehat{\widetilde{S_j}f}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{\widetilde{\varphi}}_j(\xi)$$

$$\widetilde{\Delta_j}(f) = f * \widetilde{\psi}_j \qquad\qquad \widehat{\widetilde{\Delta_j}f}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{\widetilde{\psi}}_j(\xi)$$

El primer resultado que muestra las utilidas de estas funciones auxiliares es el siguiente:

Proposición 8 *Sea $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Se tiene para todo $j \in \mathbb{Z}$ las identidades*

$$S_j(f) = \widetilde{S}_j(S_j(f)) \qquad y \qquad \Delta_j(f) = \widetilde{\Delta}_j(\Delta_j(f)).$$

Prueba. Formalmente, basta pasar en Fourier: en efecto se tiene, por definición de las funciones auxiliares las identidades $\left(\widetilde{S}_j(S_j(f))\right)^{\wedge}(\xi) = \widehat{\widetilde{\varphi}}_j(\xi)\widehat{\varphi}_j(\xi)\widehat{f}(\xi) = \widehat{\varphi}_j(\xi)\widehat{f}(\xi)$ de donde se deduce el resultado deseado. La identidad buscada para los operadores $\Delta_j(f)$ se deduce de la misma manera. ■

Veamos ahora lo que sucede cuando intervienen derivadas y normas L^p.

Proposición 9 *Sea $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Para todo multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^n$, para todo $j \in \mathbb{Z}$ y para todo $1 \leq p \leq q \leq +\infty$ entonces:*

1) $\|\partial^\alpha S_j(f)\|_{L^p} \leq 2^{j|\alpha|}\|\partial^\alpha \widetilde{\varphi}\|_{L^1}\|S_j(f)\|_{L^p}$

2) $\|\partial^\alpha \Delta_j(f)\|_{L^p} \leq 2^{j|\alpha|}\|\partial^\alpha \widetilde{\psi}\|_{L^1}\|\Delta_j(f)\|_{L^p}$

Prueba. Aquí usaremos la propiedad anterior $S_j(f) = \widetilde{S}_j(S_j(f))$ que es equivalente a escribir $S_j(f) = f*\varphi_j*\widetilde{\varphi}_j$, de manera que al aplicar la derivación obtenemos $\partial^\alpha S_j(f) = f * \varphi_j * \partial^\alpha \widetilde{\varphi}_j$. Tomando la norma L^p y usando las desigualdades de Minkowski se tiene $\|\partial^\alpha S_j(f)\|_{L^p} \leq \|f * \varphi_j\|_{L^p}\|\partial^\alpha \widetilde{\varphi}_j\|_{L^1}$. Usando la definición de $\widetilde{\varphi}_j$ y la homogeneidad de los espacios L^1 se obtiene el resultado. ■

Proposición 10 *Sea $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ y sean $1 \leq p, q, r \leq +\infty$. Entonces:*

1) $\|S_j(f)\|_{L^q} \leq 2^{jn(1/p-1/q)}\|\widetilde{\varphi}\|_{L^r}\|S_j(f)\|_{L^p}$ *con* $1 + 1/q = 1/p + 1/r$.

2) $\|\Delta_j(f)\|_{L^q} \leq 2^{jn(1/p-1/q)}\|\widetilde{\psi}\|_{L^r}\|\Delta_j(f)\|_{L^p}$ *con* $1 + 1/q = 1/p + 1/r$.

Prueba. Basta aplicar las desigualdades de Young. En efecto escribimos: $\|S_j(f)\|_{L^q} \leq \|f * \varphi_j\|_{L^p}\|\widetilde{\varphi}_j\|_{L^r}$. En este punto aplicamos la homogeneidad de los espacios de Lebesgue L^r para obtener la estimación:
$\|S_j(f)\|_{L^q} \leq \|f * \varphi_j\|_{L^p}2^{j(n-n/r)}\|\widetilde{\varphi}\|_{L^r} = 2^{jn(1/p-1/q)}\|f * \varphi_j\|_{L^p}\|\widetilde{\varphi}\|_{L^r}$ ■

Observación 6 Nótese que la combinación de estas dos proposiciones proporciona las desigualdades de Bernstein aplicadas precisamente a los bloques diádicos.

6.1. Descomposiciones de Littlewood-Paley

$\Longrightarrow$ **idea**: expresar las distribuciones temperadas como una suma de bloques diádicos.

Descomposición inhomogénea

Teorema 2 *Sea $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Se tiene la siguiente identidad en el sentido de las distribuciones*

$$f = S_0(f) + \sum_{j\in\mathbb{N}} \Delta_j(f)$$

Prueba. Basta pasar en Fourier. En efecto se tiene, al menos "formalmente", la identidad

$$\widehat{f} \;=\; \widehat{S_0(f)} + \sum_{j\in\mathbb{N}} \widehat{\Delta_j(f)} = \widehat{f}\left(\widehat{\varphi}_0 + \sum_{j\in\mathbb{N}} \widehat{\psi}_j\right) = \widehat{f} \lim_{j\to+\infty}\left(\widehat{\varphi}_0 + \sum_{k=0}^{j-1} \widehat{\psi}_k\right)$$

■

Observación 7 *La gran mayoría de espacios funcionales conocidos (Lebesgue, Sobolev, Besov, Hardy, etc.) pueden caracterizarse cómodamente en función de esta descomposición inhomogénea.*

Descomposición homogénea

- En la sección anterior hemos usado la descomposición $\widehat{\varphi}_0(\xi) + \sum_{j=0}^{+\infty} \widehat{\psi}_j(\xi) \equiv 1$. Es decir en donde sólo interviene la partición en las grandes frecuencias.
- Es posible usar la descomposición $\sum_{j\in\mathbb{Z}} \widehat{\psi}_j(\xi) \equiv 1$ en donde intervienen las pequeñas frecuencias, pero hay que tomar ciertas precauciones: recuérdese que esta fórmula era válida sólo cuando $\xi \neq 0$.

$\Longrightarrow$ el problema de está en el orígen, una forma de solucionarlo es "descartar" todas las funciones/distribuciones cuya transformada de Fourier tiene por soporte $\{0\}$.

Teorema 3 *Sea $f \in \mathcal{S}'/\mathcal{P}$ en donde $\mathcal{P}$ es el conjunto de todos los polinomios. Se tiene la siguiente fórmula en el sentido de las distribuciones*

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \Delta_j(f)$$

6.2. Definición de los espacios de Besov

Con estas descomposiciones podemos dar la siguiente definición.

Definición 11 *Sea $s \in \mathbb{R}$ y sean $1 \leq p, q \leq +\infty$. Una función (o distribución) f pertenece al espacio de Besov $B_q^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ si la cantidad siguiente es acotada:*

$$\|f\|_{B_q^{s,p}} = \|S_0(f)\|_{L^p} + \left(\sum_{j \in \mathbb{N}} 2^{jsq} \|\Delta_j(f)\|_{L^p}^q\right)^{1/q}$$

$\Longrightarrow$ Los espacios de Besov son *espacios de sucesiones* en el sentido que se tiene

$$\|f\|_{B_q^{s,p}} = \|S_0(f)\|_{L^p} + \left\|2^{js}\|\Delta_j(f)\|_{L^p}\right\|_{\ell^q}$$

Dicho de otra manera, podemos ver esta cantidad como una norma en el espacio $\ell^q(L^p)$ al cual se ha puesto un "peso" 2^{js} en la norma ℓ^q.

$\Longrightarrow$ Es posible definir los espacios de Besov para índices de regularidad negativos, pero en este caso pueden ser distribuciones y no solo funciones.

$\Longrightarrow$ Ejemplo: la maza de Dirac δ_0 pertenece a $B_q^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ si y solo si $s < -nq$.

Proposición 11 *Sean $s \in \mathbb{R}$ y $1 \leq p, q \leq +\infty$.*
Los espacios de Besov $B_q^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ son espacios de Banach.
Además la clase de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es un subconjunto denso de $B_q^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ si $1 \leq p < +\infty$ y $1 \leq q < +\infty$.

Proposición 12 *Sean $s \in \mathbb{R}$, $1 \leq p, q \leq +\infty$ y $q_0 < q < q_1$. Entonces los espacios de Besov son crecientes con respecto al índice q:*

$$B_1^{s,p} \subset B_{q_0}^{s,p} \subset B_q^{s,p} \subset B_{q_1}^{s,p} \subset B_\infty^{s,p}$$

Prueba. Esto es una consecuencia del hecho que los espacios de sucesiones ℓ^q son crecientes en función del parámetro q. ■

Es interesante representar esta cadena de inclusiones al nivel de las normas:

$$\|f\|_{B_\infty^{s,p}} \leq \|f\|_{B_{q_1}^{s,p}} \leq \|f\|_{B_q^{s,p}} \leq \|f\|_{B_{q_0}^{s,p}} \leq \|f\|_{B_1^{s,p}}$$

Proposición 13 (Dualidad) *Sean $s \in \mathbb{R}$, $1 \leq p, q < +\infty$ y sean p' y q' los conjugados armónicos de p y q: $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ y $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$. Entonces el espacio dual del espacio de Besov $B_q^{s,p}$ es el espacio $B_{q'}^{-s,p'}$:*

$$\left(B_q^{s,p}\right)' = B_{q'}^{-s,p'}$$

Prueba. Diremos que una distribución $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ pertenece al espacio dual $\left(B_q^{s,p}\right)'$ si existe una constante $C > 0$ tal que

$$\left|T(\varphi)\right| \leq C\|\varphi\|_{B_q^{s,p}}$$

para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Sabemos que el espacio dual del espacio de sucesiones ℓ^q es $\ell^{q'}$, de la misma manera sabemos que el espacio dual del espacio L^p es $L^{p'}$. Utilizando la desigualdad de Hölder se ve que $\ell^{q'}(L^{p'}) \subset \big(\ell^q(L^p)\big)'$. Esta desigualdad se mantiene usando los pesos 2^{js} y 2^{-js} respectivamente. De esta manera se obtiene la dualidad entre estos espacios. ■

Proposición 14 (Inyecciones) *Si $1 \leq q_1 \leq q_2 \leq +\infty$ y si $s_1 - \frac{n}{p_1} = s_2 - \frac{n}{p_2}$ entonces se tiene la inclusión*

$$B^{s_1,p_1}_{q_1} \subset B^{s_2,p_2}_{q_2}$$

Prueba. Podemos suponer, para empezar que $q_1 = q_2 = q$. De manera que lo que hay que demostrar es la desigualdad siguiente:

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} 2^{js_2q}\|\Delta_j(f)\|^q_{L^{p_2}} \leq C\sum_{j\in\mathbb{N}} 2^{js_1q}\|\Delta_j(f)\|^q_{L^{p_1}}$$

En este punto observamos que se tiene, por la Proposición 10, la mayoración $\|\Delta_j(f)\|_{L^{p_2}} \leq C2^{jn(1/p_1-1/p_2)}\|\Delta_j(f)\|_{L^{p_1}}$, dado que $s_1 - \frac{n}{p_1} = s_2 - \frac{n}{p_2}$ se obtiene

$$2^{js_2}\|\Delta_j(f)\|_{L^{p_2}} \leq C2^{js_1}\|\Delta_j(f)\|_{L^{p_1}}$$

En este punto basta *reconstruir* la norma de los espacios de Besov para obtener el resultado deseado. ■

7. Espacios de Triebel-Lizorkin

La descomposición de Littlewood-Paley permite dar un tratamiento unificado de muchos espacios funcionales. Para ello vamos a reagruparlos en la siguiente definición:

Definición 12 (Espacios de Triebel-Lizorkin) *Sea $s \in \mathbb{R}$ y sean $1 < p, q < +\infty$. Una función (o distribución) f pertenece al espacio de Triebel-Lizorkin $F^{s,p}_q(\mathbb{R}^n)$ si la cantidad siguiente es acotada:*

$$\|f\|_{F^{s,p}_q} = \|S_0(f)\|_{L^p} + \left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{N}} 2^{jsq}|\Delta_j(f)(\cdot)|^q\right)^{1/q}\right\|_{L^p}$$

Proposición 15 *Sean $s \in \mathbb{R}$, $1 < p, q < +\infty$ y $q_0 < q < q_1$. Entonces los espacios de Triebel-Lizorkin son crecientes con respecto al índice q:*

$$F^{s,p}_{q_0} \subset F^{s,p}_q \subset F^{s,p}_{q_1}$$

Esta propiedad se deduce, una vez más, de las propiedades de inclusión de los espacios de sucesiones ℓ^q.

$\Longrightarrow$ Podría pensarse que estos espacios $F^{s,p}_q$ son parecidos a los espacios de Besov $B^{s,p}_q$, sin embargo son muy diferentes.

Proposición 16 *Sea $s \in \mathbb{R}$ y sean $1 < p, q < +\infty$.*

- *Se tiene $B^{s,p}_p \simeq F^{s,p}_p$*
- *Entonces se tienen las siguientes relaciones entre los espacios de Besov y los espacios de Triebel-Lizorkin:*

$$B^{s,p}_{\text{mín}(p,q)} \subset F^{s,p}_q \subset B^{s,p}_{\text{máx}(p,q)}$$

Prueba. Basta verificar el primer punto, pues el segundo se deduce del primero usando la propiedad de crecimiento según el parámetro q de los espacios de Triebel-Lizorkin.

$\Longrightarrow$ En efecto, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $p > q$. Entonces si se tiene $B_p^{s,p} \simeq F_p^{s,p}$, se deduce que $F_q^{s,p} \subset F_p^{s,p} \simeq B_p^{s,p}$.

$\Longrightarrow$ Por otro lado la inclusión $B_q^{s,p} \subset F_q^{s,p}$ se deduce directamente de la desigualdad triangular:

$$\left\| \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} 2^{jsq} |\Delta_j(f)(\cdot)|^q \right)^{1/q} \right\|_{L^p} \leq \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} 2^{jsq} \|\Delta_j(f)\|_{L^p}^q \right)^{1/q}$$

$\Longrightarrow$ Debemos pues verificar que $B_p^{s,p} \simeq F_p^{s,p}$ y para esto es suficiente estudiar $F_p^{s,p} \subset B_p^{s,p}$ pues la inclusión recíproca se deduce por la desigualdad triangular. Es decir, que al nivel de las normas debemos verificar que $\|f\|_{B_p^{s,p}} \leq \|f\|_{F_p^{s,p}}$ y esto se obtiene directamente por la desigualdad de Minkowski en su versión continua:

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |2^{js}\Delta_j(f)(x)|^p dx \right) \leq \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j\in\mathbb{N}} |2^{js}\Delta_j(f)(x)|^p dx = \left\| \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} |2^{js}\Delta_j(f)(x)|^p \right)^{1/p} \right\|_{L^p}^p$$

$\blacksquare$

$\Longrightarrow$ Damos a continuación una identificación de espacios en el marco de los espacios de Triebel-Lizorkin. **Importante**: esta identificación es válida únicamente cuando se tiene $1 < p < +\infty$ en la norma de base L^p.

Proposición 17

- *Espacios de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 < p < +\infty$*

$$\|f\|_{L^p} \simeq \|S_0(f)\|_{L^p} + \left\| \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} |\Delta_j(f)(\cdot)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p}$$

De manera que se tiene

$$L^p \simeq F_2^{0,p}$$

- *Espacios de Sobolev $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ con $s \in \mathbb{R}$ y $1 < p < +\infty$:*

$$\|f\|_{W^{s,p}} \simeq \|S_0(f)\|_{L^p} + \left\| \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} 2^{2js} |\Delta_j(f)(\cdot)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p}$$

De manera que se tiene

$$W^{s,p} \simeq F_2^{s,p}$$

Recuérdese que estas identificaciones son válidas únicamente cuando $1 < p < +\infty$.

8. Espacios Homogéneos

Definición 13 *Sea f un función definida sur $\mathbb{R}^n$ y sea $a > 0$. Definimos $f_a(x) = f(ax)$. Diremos que una norma $\|\cdot\|$ de un espacio A es* homogénea *si existe un índice σ tal que se tenga, para todo f, la identidad:*

$$\|f_a\| = a^{-\sigma}\|f\|.$$

$\Longrightarrow$ Los espacios de Lebesgue y de Lorentz verifican esta identidad con $\sigma = n/p$.

$\Longrightarrow$ Los espacios de Sobolev, de Besov y de Triebel-Lizorkin no verifican esta relación pues sus normas están construidas como la suma de dos términos de homogeneidad diferente.

Existen variantes homogéneas de estos espacios que se obtienen modificando ligeramente sus normas. Pero hay que tener un poco de cuidado: consideremos por ejemplo $f \in \mathcal{C}^s(\mathbb{R}^n)$ con $0 < s < 1$. Este espacio de Hölder es normado por

$$\|f\|_{\mathcal{C}^s} = \|f\|_\infty + \sup_{|h|>0} \frac{\|f(x+h) - f(h)\|_\infty}{|h|^s}. \tag{10}$$

Esta norma no es homogénea, pero cuando se calcula la norma de f_a en $\mathcal{C}^s(\mathbb{R}^n)$ se obtiene que

$$\|f_a\|_{\mathcal{C}^s} = a^s |||f||| + O(1) \qquad \text{si} \quad a \longrightarrow +\infty.$$

en donde hemos escrito $|||f||| = \sup\limits_{|h|>0} \frac{\|f(x+h)-f(h)\|_\infty}{|h|^s}$. De esta manera surge la idea de guardar un solo término en la definición de la norma del espacio homogéneo correspondiente $\dot{\mathcal{C}}^s(\mathbb{R}^n)$. Así se tiene $f(x) = |x|^s \in \dot{\mathcal{C}}^s(\mathbb{R}^n)$, pero $|x|^s \notin \mathcal{C}^s(\mathbb{R}^n)$, simplemente por que $|x|^s$ no es una función acotada.

Observación 8 *Hemos visto anteriormente cómo trabajar con este tipo de cantidades homogéneas y las habíamos denotado por medio de un punto: $\dot{\mathcal{C}}^s$, $\dot{W}^{s,p}$ y $\dot{B}^{s,p}_q$. Pero no habíamos utilizado estas cantidades para definir espacios funcionales: para ello hay que tener un poco de cuidado.*

En efecto, volviendo al ejemplo anterior, la cantidad $|||\cdot|||$ no es una norma pues toda función constante g verifica $|||g||| = 0$. Para definir correctamente el espacio homogéneo $\dot{\mathcal{C}}^s$ debemos hacerlo de la siguiente manera:

$$\dot{\mathcal{C}}^s(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \quad \text{modulo las constantes} \ / \quad |||f||| < +\infty\}.$$

Con estas precauciones, podemos definir los espacios de Besov homogéneos y para ello vamos a usar la descomposición de Littlewood-Paley homogénea:

Definición 14 *Sean $s \in \mathbb{R}$, $1 \leq p, q \leq +\infty$. Definimos los espacios de Besov homogéneos $\dot{B}^{s,p}_q(\mathbb{R}^n)$ como el conjunto de distribuciones, módulo los polinomios, tales que la cantidad siguiente es acotada:*

$$\|f\|_{\dot{B}^{s,p}_q} = \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{jsq} \|\Delta_j(f)\|^q_{L^p} \right)^{1/q}$$

Se tienen entonces las caracterizaciones equivalentes siguientes:

Proposición 18

- *Caracterización por medio de diferencias:*
  - *Sea $s > 0$ un real, y sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $k - 1 \leq s < k$. Sea $1 \leq p, q \leq +\infty$.*

$$\|f\|_{\dot{B}^{s,p}_q} \simeq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\|\Delta^k_y f\|^q_{L^p}}{|y|^{n+sq}} dy \right)^{1/q}$$

- *Caracterización térmica:*
  - *Si $0 < s/2 < k$ con $k \in \mathbb{N}$ y si $1 \leq p, q \leq +\infty$ se tiene*

$$\|f\|_{\dot{B}^{s,p}_q} \simeq \left(\int_0^{+\infty} t^{(k-s/2)q} \left\| \frac{\partial^k H_t f}{\partial t^k} \right\|^q_{L^p} \frac{dt}{t} \right)^{1/q}$$

  - *Si $s > 0$ y si $1 \leq p, q \leq +\infty$ se tiene*

$$\|f\|_{\dot{B}^{-s,p}_q} \simeq \left(\int_0^{+\infty} t^{sq/2} \, \|H_t f\|^q_{L^p} \, \frac{dt}{t} \right)^{1/q}$$

$\Longrightarrow$ Los espacios de Triebel-Lizorkin homogéneos son definidos de forma similar.

Definición 15 *Sean $s \in \mathbb{R}$, $1 \leq p, q < +\infty$. Definimos los espacios de Triebel-Lizorkin homogéneos $\dot{F}_q^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ como el conjunto de distribuciones, módulo los polinomios, tales que la cantidad siguiente es acotada:*

$$\|f\|_{\dot{F}_q^{s,p}} = \left\| \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{jsq} |\Delta_j(f)(\cdot)|^q \right)^{1/q} \right\|_{L^p}$$

En particular tenemos para los espacios de Lebesgue y de Sobolev homogéneos el resultado siguiente:

Proposición 19

- *Espacios de Lebesgue L^p con $1 < p < +\infty$*

$$\|f\|_{L^p} \simeq \left\| \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\Delta_j(f)(\cdot)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p}$$

- *Espacios de Sobolev $\dot{W}^{s,p}$ con $s \in \mathbb{R}$ y $1 < p < +\infty$*

$$\|f\|_{\dot{W}^{s,p}} = \|(-\Delta)^{s/2} f\|_{L^p} \simeq \left\| \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{2js} |\Delta_j(f)(\cdot)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p}$$