Lección n°5: Estudio de una ecuación de transporte-difusión

UCE, verano 2013

1. Introducción

El objetivo de esta lección es presentar *en acción* a los diferentes espacios funcionales presentados hasta aquí. Para ello vamos a estudiar una ecuación en derivadas parciales y vamos a demostrar algunos resultados por medio de técnicas relativamente clásicas en donde los espacios de Lebesgue, de Sobolev y de Besov aparecerán de forma muy natural.

La ecuación que vamos a estudiar es la ecuación quasi-geostrófica que proviene de problemas de meteorología. En su versión original esta ecuación está definida en dimensión 2:

$$\begin{cases} \partial_t\theta(x,t) + \nabla\cdot(v\,\theta)(x,t) + (-\Delta)^\alpha\theta(x,t) = 0 \\ \\ \theta(x,0) = \theta_0(x) \in L^p(\mathbb{R}^2) \\ \\ div(v) = 0 \quad \text{ and } v \in L^\infty([0,T]; bmo(\mathbb{R}^2)). \end{cases}$$

Aquí tenemos

- $0 < \alpha \leq 1$ y $t \in [0,T]$ y $1 \leq p \leq +\infty$.
- $\theta(x,t)$ es una función real ($\theta : \mathbb{R}^2 \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$)
- la velocidad $v : \mathbb{R}^2 \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ está definida usando las transformadas de Riesz: $v = (-R_2\theta, R_1\theta)$. Recordar que desde el punto de vista de la transformada de Fourier se tiene $\widehat{R_j\theta}(\xi,t) = -\frac{i\xi_j}{|\xi|}\widehat{\theta}(\xi,t)$ para $j = 1,2$.
- A partir de esta definición se tiene $div(v) = \nabla\cdot v = \partial_{x_1}v_1 + \partial_{x_2}v_2 = 0$.
- el operador $(-\Delta)^\alpha$ es una potencia fraccionaria del Laplaciano definido en el espacio de Fourier por $\widehat{(-\Delta)^\alpha\theta}(\xi) = c|\xi|^{2\alpha}\widehat{\theta}(\xi)$.
- el espacio $bmo(\mathbb{R}^2)$ está definido como el conjunto de funciones que verifican las siguientes condiciones:

$$\sup_{|B|\leq 1}\frac{1}{|B|}\int_B |f(x) - f_B|dx \leq C \qquad \text{y} \qquad \sup_{|B|>1}\frac{1}{|B|}\int_B |f(x)|dx \leq C$$

  en donde $f_B = \frac{1}{|B|}\displaystyle\int_B f(x)dx$ es el promedio de la función f sobre la bola B.

Observación 1 *Se diferencia tres casos en el análisis de esta ecuación en función del valor del parámetro α que dirige la difusión.*

- El caso $1/2 < \alpha \leq 1$ se conoce como sub-crítico en el sentido que la difusión es *más fuerte* que el transporte.
- El caso $\alpha = 1/2$ se conoce como crítico pues la difusión y el transporte tienen la *misma fuerza.*
- El caso $0 < \alpha < 1/2$ se conoce como super-crítico en el sentido que la difusión es *menos fuerte* que el transporte.

2. Estudio de una EDP

Vamos a estudiar aquí una linearización de esta ecuación en el caso crítico:

$$(T) \quad \begin{cases} \partial_t \theta(x,t) = & \nabla \cdot (v\, \theta)(x,t) - (-\Delta)^{1/2}\theta(x,t) \\ \theta(x,0) = & \theta_0(x) \\ div(v) = & 0. \end{cases} \tag{1}$$

En (1), las funciones θ y v son tales que $\theta : \mathbb{R}^n \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ y $v : \mathbb{R}^n \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Aquí la función v es un *dato del problema*, no depende de θ.

Vamos a dividir nuestro estudio en las siguientes etapas:

1. Una aproximación
2. Formulación integral
3. Construcción y propiedades de las soluciones del problema aproximado
4. Principio del Máximo
5. Paso al límite
6. Existencia de soluciones L^∞.

2.1. Una aproximación

En esta sección vamos a realizar *dos aproximaciones*. La primera se basa en el siguiente resultado:

Lema 1 *Sea f una función que pertenece al espacio $bmo(\mathbb{R}^n)$. Si $k \in \mathbb{N}$, definimos f_k por*

$$f_k(x) = \begin{cases} -k & si \quad f(x) \leq -k \\ f(x) & si \quad -k \leq f(x) \leq k \\ k & si \quad k \leq f(x). \end{cases} \tag{2}$$

Entonces $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge débilmente hacia f en $bmo(\mathbb{R}^n)$.

La utilidad de este lema es evidente: las funciones f_k son funciones acotadas pues pertenecen al espacio $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Esto nos permitirá, en un principio, trabajar unicamente con funciones que pertenecen al $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ y esto constituye nuestra primera aproximación.

La segunda y más importante aproximación tiene que ver con la modificación de la ecuación inicial de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \partial_t \theta(x,t) + \nabla \cdot (v_\varepsilon\, \theta)(x,t) + (-\Delta)^{1/2}\theta(x,t) = \varepsilon \Delta \theta(x,t) \\ \theta(x,0) = \theta_0(x) \\ div(v) = 0 \quad \text{and } v \in L^\infty([0,T]; L^\infty(\mathbb{R}^n)). \end{cases} \tag{3}$$

en donde $\varepsilon > 0$ es un parámetro real y v_ε está definido por $v_\varepsilon = v * \omega_\varepsilon$ con $\omega_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\omega(x/\varepsilon)$ y $\omega \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ es una función tal que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \omega(x)dx = 1$.

$\Longrightarrow$ hay tres modificaciones con respecto a la ecuación inicial (1)

- la velocidad v es una dato inicial del problema y pertenece al espacio $L^\infty(\mathbb{R}^n)$
- se regulariza la velocidad al considerar v_ε en vez de v
- se regulariza la ecuación al añadir $\varepsilon\Delta\theta$

$\Longrightarrow$ la ecuación (3) es una aproximación de (1) puesto que, al menos formalmente, se tiene que (3) $\underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow}$ (1).

$\Longrightarrow$ el paso al límite (3) $\underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow}$ (1) requiere algunas etapas.

2.2. Formulación integral

Para estudiar la existencia de soluciones de la ecuación aproximada (3) vamos a utilizar una formulación diferente que nos permitirá realizar los cálculos con mayor facilidad.

Proposición 1 *El problema (3) admite la siguiente representación integral:*

$$\theta(x,t) = e^{\varepsilon t\Delta}\theta_0(x) - \int_0^t e^{\varepsilon(t-s)\Delta}\nabla\cdot(v_\varepsilon\,\theta)(x,s)ds - \int_0^t e^{\varepsilon(t-s)\Delta}(-\Delta)^{1/2}\theta(x,s)ds \tag{4}$$

Prueba. Vamos a verificar que si $\theta(x,t)$ se escribe de la forma (4), entonces es solución del problema (3).

Formalmente se tiene:

$$\begin{aligned}
\partial_t\theta(x,t) &= \partial_t\left(e^{\varepsilon t\Delta}\theta_0(x) - \int_0^t e^{\varepsilon(t-s)\Delta}\nabla\cdot(v_\varepsilon\,\theta)(x,s)ds - \int_0^t e^{\varepsilon(t-s)\Delta}(-\Delta)^{1/2}\theta(x,s)ds\right)\\
&= \varepsilon\Delta e^{\varepsilon t\Delta}\theta_0(x) - \varepsilon\Delta\int_0^t e^{\varepsilon(t-s)\Delta}\nabla\cdot(v_\varepsilon\,\theta)(x,s)ds - \nabla\cdot(v_\varepsilon\,\theta)(x,t)\\
&\quad -\varepsilon\Delta\int_0^t e^{\varepsilon(t-s)\Delta}(-\Delta)^{1/2}\theta(x,s)ds - (-\Delta)^{1/2}\theta(x,t)
\end{aligned}$$

Es decir

$$\begin{aligned}
\partial_t\theta(x,t) + \nabla\cdot(v_\varepsilon\,\theta)(x,t) + (-\Delta)^{1/2}\theta(x,t) &= \varepsilon\Delta\left[e^{\varepsilon t\Delta}\theta_0(x) - \int_0^t e^{\varepsilon(t-s)\Delta}\nabla\cdot(v_\varepsilon\,\theta)(x,s)ds\right.\\
&\qquad\left. - \int_0^t e^{\varepsilon(t-s)\Delta}(-\Delta)^{1/2}\theta(x,s)ds\right]\\
&= \varepsilon\Delta\theta(x,t)
\end{aligned}$$

■

2.3. Construcción de una solución aproximada

Utilizando la formulación integral anterior, vamos a construir una solución local del problema (4).

Teorema 1 (Existencia Local) *Sea $2\le p<+\infty$ y sean θ_0 y v dos funciones tales que $\theta_0\in L^p(\mathbb{R}^n)$, $div(v)=0$ y $v\in L^\infty([0,T'];L^\infty(\mathbb{R}^n))$.*

Si el dato inicial verifica $\|\theta_0\|_{L^p}\le K$ y si T' es un tiempo suficientemente pequeño entonces el problema (4) posee una única solución $\theta\in L^\infty([0,T'];L^p(\mathbb{R}^n))$ en la bola cerrada $\overline{B}(0,2K)\subset L^\infty([0,T'];L^p(\mathbb{R}^n))$.

Demostración. Empezamos notanto $L_\varepsilon(\theta)$ y $N_\varepsilon^v(\theta)$ las cantidades

$$L_\varepsilon(\theta)(x,t) = \int_0^t e^{\varepsilon(t-s)\Delta}(-\Delta)^{1/2}\theta(x,s)ds \quad \text{and} \quad N_\varepsilon^v(\theta)(x,t) = \int_0^t e^{\varepsilon(t-s)\Delta}\nabla\cdot(v_\varepsilon\,\theta)(x,s)ds.$$

$\Longrightarrow$ Construimos a partir de θ_0 una sucesión de funciones de la siguiente manera:

$$\theta_{n+1}(x,t) = e^{\varepsilon t\Delta}\theta_0(x) - L_\varepsilon(\theta_n)(x,t) - N_\varepsilon^v(\theta_n)(x,t) \tag{5}$$

$\Longrightarrow$ Consideramos la norma $L^\infty(L^p)$ (con $1 \leq p \leq +\infty$) definida para una función $\theta : \mathbb{R}^n \times [0,T'] \longrightarrow \mathbb{R}$ por la cantidad

$$\|\theta\|_{L^\infty(L^p)} = \sup_{t\in[0,T']} \|\theta(\cdot,t)\|_{L^p}.$$

Calculamos ahora la norma $L^\infty(L^p)$ en la definición de θ_{n+1} para obtener

$$\|\theta_{n+1}\|_{L^\infty(L^p)} \leq \|e^{\varepsilon t\Delta}\theta_0\|_{L^\infty(L^p)} + \|L_\varepsilon(\theta_n)\|_{L^\infty(L^p)} + \|N_\varepsilon^v(\theta_n)\|_{L^\infty(L^p)} \tag{6}$$

$\Longrightarrow$ Verificaremos que cada una de las expresiones de la parte derecha de la fórmula anterior cumple con las estimaciones siguientes:

$$\|e^{\varepsilon t\Delta}\theta_0\|_{L^\infty(L^p)} \leq \|\theta_0\|_{L^p} \tag{7}$$

$$\|L_\varepsilon(\theta_n)\|_{L^\infty(L^p)} \leq C_1 F_1(T')\|\theta_n\|_{L^\infty(L^p)} \tag{8}$$

$$\|N_\varepsilon^v(\theta_n)\|_{L^\infty(L^p)} \leq C_2 F_2(T')\|\theta_n\|_{L^\infty(L^p)} \tag{9}$$

$\Longrightarrow$ Utilizando estas estimaciones, y volviendo a (6) se obtiene

$$\|\theta_{n+1}\|_{L^\infty(L^p)} \leq \|\theta_0\|_{L^p} + C\big(F_1(T') + F_2(T')\big)\|\theta_n\|_{L^\infty(L^p)}$$

$\Longrightarrow$ Por hipótesis se tiene que $\|\theta_0\|_{L^p} \leq K$ y si se tiene que $\big(F_1(T') + F_2(T')\big) \leq K$, lo cual es una consecuencia del hecho que T' es suficientemente pequeño, se tiene que

$$\|\theta_{n+1}\|_{L^\infty(L^p)} \leq 2K$$

$\Longrightarrow$ Por iteración se tiene que la sucesión $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ construida a partir del dato inicial θ_0 pertenece a la bola cerrada $\overline{B}(0,2K) \subset L^\infty([0,T'];L^p(\mathbb{R}^n))$.

$\Longrightarrow$ Para terminar la demostración, hay que verificar que $\theta_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \theta$ en el sentido de la norma del espacio $L^\infty([0,T'];L^p(\mathbb{R}^n))$.

$\Longrightarrow$ Usando la definición (5) se tiene entonces:

$$\|\theta_{n+1} - \theta_n\|_{L^\infty(L^p)} \leq \|L_\varepsilon(\theta_n - \theta_{n-1})\|_{L^\infty(L^p)} + \|N_\varepsilon^v(\theta_n - \theta_{n-1})\|_{L^\infty(L^p)}$$

$\Longrightarrow$ Con las estimaciones (8) y (9) se obtiene

$$\|\theta_{n+1} - \theta_n\|_{L^\infty(L^p)} \leq C\left(F_1(T') + F_2(T')\right)\|\theta_n - \theta_{n-1}\|_{L^\infty(L^p)}$$

$\Longrightarrow$ Por iteración obtenemos

$$\|\theta_{n+1} - \theta_n\|_{L^\infty(L^p)} \leq \left[C\left(F_1(T') + F_2(T')\right)\right]^n \|\theta_1 - \theta_0\|_{L^\infty(L^p)}$$

$\Longrightarrow$ Si T' es suficientemente pequeño de manera que $C\left(F_1(T') + F_2(T')\right) \leq 1/2$ se tiene

$$\|\theta_{n+1} - \theta_n\|_{L^\infty(L^p)} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \|\theta_1 - \theta_0\|_{L^\infty(L^p)}$$

$\Longrightarrow$ Finalmente, como $L^\infty([0,T'];L^p(\mathbb{R}^n))$ es un espacio de Banach, si $n \longrightarrow +\infty$, la sucesión $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge hacia una función θ in $L^\infty([0,T'];L^p(\mathbb{R}^n))$ y además el límite es único.

Observación 2

- *Este método de construcción de soluciones es bastante general y puede aplicarse en diversas situaciones una vez que se tiene una formulación integral del tipo dado en la expresión (4).*

- *Este método puede aplicarse de varias maneras: el espacio $L^\infty([0,T'];L^p(\mathbb{R}^n))$ puede reemplazarse por cualquier otro espacio funcional: lo importante es obtener estimaciones de tipo (7)-(9) que permitan pasar al límite.*

- *Este método es* local*: el tiempo debe ser "suficientemente pequeño".*

Aún no hemos terminado la demostración del Teorema 1: falta demostrar las estimaciones (7)-(9). Esto será tratado con los lemas a continuación:

Lema 2 *Sea θ_0 una función que pertenece al espacio $L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p \leq +\infty$. Entonces se tiene la estimación $\|e^{\varepsilon t\Delta}\theta_0\|_{L^\infty(L^p)} \leq \|\theta_0\|_{L^p}$, para todo $t>0$ y todo $\varepsilon > 0$.*

Prueba. Dado que $e^{\varepsilon t\Delta}\theta_0 = \theta_0 * h_{\varepsilon t}$, en donde $h_{\varepsilon t}$ es una gaussiana normalizada en norma L^1, se tiene

$$\|e^{\varepsilon t\Delta}\theta_0\|_{L^p} = \|\theta_0 * h_{\varepsilon t}\|_{L^p} \leq \|\theta_0\|_{L^p}\|h_{\varepsilon t}\|_{L^1} = \|\theta_0\|_{L^p}.$$

De manera que $\|e^{\varepsilon t\Delta}\theta_0\|_{L^\infty(L^p)} \leq \|\theta_0\|_{L^p}$. ■

Lema 3 *Si $\theta \in L^\infty([0,T'];L^p(\mathbb{R}^n))$, entonces*

$$\|L_\varepsilon(\theta)\|_{L^\infty(L^p)} \leq C\frac{T'^{1/2}}{\varepsilon^{1/2}}\,\|\theta\|_{L^\infty(L^p)}$$

Prueba. Escribimos

$$\begin{aligned}
\|L_\varepsilon(\theta)\|_{L^\infty(L^p)} &= \sup_{0<t<T'}\left\|\int_0^t e^{\varepsilon(t-s)\Delta}(-\Delta)^{1/2}\theta(\cdot,s)ds\right\|_{L^p} = \sup_{0<t<T'}\left\|\int_0^t (-\Delta)^{1/2}\theta * h_{\varepsilon(t-s)}(\cdot,s)ds\right\|_{L^p}\\
&= \sup_{0<t<T'}\left\|\int_0^t \theta * (-\Delta)^{1/2}h_{\varepsilon(t-s)}(\cdot,s)ds\right\|_{L^p}
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\|L_\varepsilon(\theta)\|_{L^\infty(L^p)} &\leq \sup_{0<t<T'}\int_0^t \|\theta(\cdot,s)\|_{L^p}\left\|(-\Delta)^{1/2}h_{\varepsilon(t-s)}\right\|_{L^1}ds\\
&\leq \|\theta\|_{L^\infty(L^p)}\sup_{0<t<T'}\int_0^t C(\varepsilon(t-s))^{-1/2}ds\\
&\leq C\frac{T'^{1/2}}{\varepsilon^{1/2}}\,\|\theta\|_{L^\infty(L^p)}.
\end{aligned}$$

■

Lema 4 *Si $\theta \in L^\infty([0,T'];L^p(\mathbb{R}^n))$ y si $v \in L^\infty([0,T'];L^\infty(\mathbb{R}^n))$, entonces*

$$\|N_\varepsilon^v(\theta)\|_{L^\infty(L^p)} \leq C\frac{T'^{1/2}}{\varepsilon^{1/2}}\,\|v\|_{L^\infty(L^\infty)}\|\theta\|_{L^\infty(L^p)}$$

Prueba. Para empezar escribimos:

$$\begin{aligned}
\|N_\varepsilon^v(\theta)\|_{L^\infty(L^p)} &= \sup_{0<t<T'}\left\|\int_0^t e^{\varepsilon(t-s)\Delta}\nabla\cdot(v_\varepsilon\theta)(\cdot,s)ds\right\|_{L^p} = \sup_{0<t<T'}\left\|\int_0^t \nabla\cdot(v_\varepsilon\theta) * h_{\varepsilon(t-s)}(\cdot,s)ds\right\|_{L^p}\\
&\leq \sup_{0<t<T'}\int_0^t \|v_\varepsilon\theta(\cdot,s)\|_{L^p}\left\|\nabla h_{\varepsilon(t-s)}\right\|_{L^1}ds \leq \sup_{0<t<T'}\int_0^t \|v_\varepsilon(\cdot,s)\|_{L^\infty}\|\theta(\cdot,s)\|_{L^p}\,C(\varepsilon(t-s))^{-1/2}ds\\
&\leq \|\theta\|_{L^\infty(L^p)}\|v\|_{L^\infty(L^\infty)}\sup_{0<t<T'}\int_0^t C(\varepsilon(t-s))^{-1/2}ds \leq C\frac{T'^{1/2}}{\varepsilon^{1/2}}\,\|\theta\|_{L^\infty(L^p)}\|v\|_{L^\infty(L^\infty)}.
\end{aligned}$$ ■

Observación 3 *Se ha demostrado las desigualdades (7)-(9) con* $F_1(T') = \frac{T'^{1/2}}{\varepsilon^{1/2}}$ *y* $F_2(T') = \frac{T'^{1/2}}{\varepsilon^{1/2}}\|v\|_{L^\infty(L^\infty)}$. *De manera que la condición T' suficientemente pequeño significa que el tiempo T' verifica la estimación:*

$$\left(C\left(\frac{T'^{1/2}}{\varepsilon^{1/2}} + \frac{T'^{1/2}}{\varepsilon^{1/2}}\|v\|_{L^\infty(L^\infty)}\right)\right) \leq 1/2.$$

Con este hemos terminado la demostración del Teorema 1. ■

Corolario 1 *Las soluciones del problema (4) dependen continuamente del dato inicial θ_0.*

Prueba. Sea $\varphi_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)$ otro dato inicial y sea φ la solución asociada a este dato inicial. Vemos entonces que se tiene:

$$\theta(x,t) - \varphi(x,t) = e^{\varepsilon t\Delta}(\theta_0(x) - \varphi_0(x)) - L_\varepsilon(\theta - \varphi)(x,t) - N_\varepsilon^v(\theta - \varphi)(x,t)$$

Tomando la norma $L^\infty(L^p)$ en esta expresión y utilizando los mismos argumentos anteriores se obtiene

$$\|\theta - \varphi\|_{L^\infty(L^p)} \leq \|\theta_0 - \varphi_0\|_{L^p} + C_0\|\theta - \varphi\|_{L^\infty(L^p)}$$

Esto muestra que se tiene la dependencia continua con respecto al dato inicial pues, por definición se tiene que $C_0 = \left(C\left(\frac{T'^{1/2}}{\varepsilon^{1/2}}\|v\|_{L^\infty(L^\infty)} + \frac{T'^{1/2}}{\varepsilon^{1/2}}\right)\right) \leq 1/2$. ■

$\Longrightarrow$ Es importante notar que este teorema solo nos indica la existencia *local*: es decir que el tiempo $T' = T'(\varepsilon, v)$ debe ser *pequeño*.

$\Longrightarrow$ Para poder considerar tiempos mayores de existencia de soluciones observamos lo siguiente:
Si $\theta(x,t)$ es una solución del problema (4) sobre $\mathbb{R}^n \times [0,T']$, de dato inicial $\theta_0(x)$; entonces para todo $\tau > 0$ se tiene que $\theta(x, t+\tau)$ es una solución del problema (4) sobre $\mathbb{R}^n \times [0, T' + \tau]$ de dato inicial $\theta(x,\tau)$.

Dado que el problema (4) es lineal en tiempo, es posible repetir la construcción anterior y obtener soluciones sobre un intervalo $[0,T]$.

2.4. Regularidad del problema aproximado

En la sección anterior hemos construido una solución del problema aproximado (4) sobre el espacio $L^\infty([0,T]; L^p(\mathbb{R}^n))$. Vamos a ver que estas soluciones aproximadas son *regulares*.

Teorema 2 *Sean $0 < T_0 < T_1 < t < T_2 < T^* < T$. Entonces las soluciones θ del problema aproximado (4) son regulares en el sentido que verifican*

$$\theta \in \bigcap_{0<T_0<T_1<t<T_2<T^*} L^\infty([0,t]; W^{\frac{k}{2},p}(\mathbb{R}^n)) \qquad \textit{para todo } k \geq 0.$$

Demostración. Vamos a proceder por inducción.

$\Longrightarrow$ Observemos primero que por los resultados anteriores se tiene esta propiedad si $k = 0$ pues el espacio $W^{0,p}(\mathbb{R}^n)$ no es más que un espacio de Lebesgue L^p usual.

$\Longrightarrow$ Supongamos que esto es verdadero si $k > 0$ y mostremos que esta propiedad se mantiene en la etapa $k+1$.

Sea t tal que $0 < T_0 < T_1 < t < T_2 < T^*$ y consideremos el siguiente problema:

$$\theta(x,t) = e^{\varepsilon(t-T_0)\Delta}\theta(x,T_0) - \int_{T_0}^t e^{\varepsilon(t-s)\Delta}\nabla\cdot(v_\varepsilon\, \theta)(x,s)ds - \int_{T_0}^t e^{\varepsilon(t-s)\Delta}(-\Delta)^{1/2}\theta(x,s)ds$$

Calculamos ahora la norma $L^\infty(W^{\frac{k+1}{2},p})$ para obtener:

$$\|\theta\|_{L^\infty(W^{\frac{k+1}{2},p})} \leq \|e^{\varepsilon(t-T_0)\Delta}\theta(\cdot,T_0)\|_{L^\infty(W^{\frac{k+1}{2},p})} \tag{10}$$

$$+\left\|\int_{T_0}^t e^{\varepsilon(t-s)\Delta}\nabla\cdot(v_\varepsilon\;\theta)(\cdot,s)ds\right\|_{L^\infty(W^{\frac{k+1}{2},p})} \tag{11}$$

$$+\left\|\int_{T_0}^t e^{\varepsilon(t-s)\Delta}(-\Delta)^{1/2}\theta(\cdot,s)ds\right\|_{L^\infty(W^{\frac{k+1}{2},p})} \tag{12}$$

Vamos a tratar cada uno de estos términos por separado:

(i) Para el primer término se tiene

$$\begin{aligned}\|e^{\varepsilon(t-T_0)\Delta}\theta(\cdot,T_0)\|_{W^{\frac{k+1}{2},p}} &= \|\theta(\cdot,T_0)*h_{\varepsilon(t-T_0)}\|_{L^p}+\|\theta(\cdot,T_0)*(-\Delta)^{\frac{k+1}{4}}h_{\varepsilon(t-T_0)}\|_{L^p}\\ &\leq \|\theta(\cdot,T_0)\|_{L^p}\|h_{\varepsilon(t-T_0)}\|_{L^1}+\|\theta(\cdot,T_0)\|_{L^p}\|(-\Delta)^{\frac{k+1}{4}}h_{\varepsilon(t-T_0)}\|_{L^1}\end{aligned}$$

Dado que h_t es el núcleo del calor, se tiene:

$$\|e^{\varepsilon(t-T_0)\Delta}\theta(\cdot,T_0)\|_{L^\infty(W^{\frac{k+1}{2},p})}\leq C\|\theta(\cdot,T_0)\|_{L^p}\sup\left\{[\varepsilon(t-T_0)]^{-\frac{k+1}{4}}\,;1\right\}$$

(ii) Para el segundo término escribimos:

$$I=\left\|\int_{T_0}^t e^{\varepsilon(t-s)\Delta}\nabla\cdot(v_\varepsilon\;\theta)(\cdot,s)ds\right\|_{W^{\frac{k+1}{2},p}} \leq \int_{T_0}^t\|\nabla\cdot(v_\varepsilon\;\theta)*h_{\varepsilon(t-s)}\|_{W^{\frac{k+1}{2},p}}ds$$

$$\begin{aligned}&\leq \int_{T_0}^t\|\nabla\cdot(v_\varepsilon\;\theta)*h_{\varepsilon(t-s)}\|_{L^p}ds+\int_{T_0}^t\|(-\Delta)^{\frac{k}{4}}(v_\varepsilon\;\theta)*(-\Delta)^{\frac14}\nabla h_{\varepsilon(t-s)}\|_{L^p}ds\\ &\leq \int_{T_0}^t\|v_\varepsilon\;\theta\|_{L^p}\|\nabla h_{\varepsilon(t-s)}\|_{L^1}ds+\int_{T_0}^t\|(-\Delta)^{\frac{k}{4}}(v_\varepsilon\;\theta)\|_{L^p}\|(-\Delta)^{\frac14}\nabla h_{\varepsilon(t-s)}\|_{L^1}ds\\ &\leq \int_{T_0}^t\|v_\varepsilon\;\theta\|_{W^{\frac{k}{2},p}}\sup\left\{[\varepsilon(t-s)]^{-\frac12}\,;[\varepsilon(t-s)]^{-\frac34}\right\}ds\end{aligned}$$

Observamos ahora que se tiene la siguiente desigualdad para $N\geq k/2$

$$\|v_\varepsilon\theta(\cdot,s)\|_{W^{\frac{k}{2},p}} \leq \|v_\varepsilon(\cdot,s)\|_{\mathcal{C}^N}\|\theta(\cdot,s)\|_{W^{\frac{k}{2},p}}\leq C\varepsilon^{-N}\|v(\cdot,s)\|_{L^\infty}\|\theta(\cdot,s)\|_{W^{\frac{k}{2},p}}$$

de manera que podemos escribir

$$I \leq C\|v\|_{L^\infty(L^\infty)}\|\theta\|_{L^\infty(W^{\frac{k}{2},p})}\int_{T_0}^t\varepsilon^{-N}\sup\left\{[\varepsilon(t-s)]^{-\frac12}\,;[\varepsilon(t-s)]^{-\frac34}\right\}ds$$

(iii) Finalmente, para el último término se tiene

$$\left\|\int_{T_0}^t e^{\varepsilon(t-s)\Delta}(-\Delta)^{1/2}\theta(\cdot,s)ds\right\|_{W^{\frac{k+1}{2},p}} \leq C\int_{T_0}^t\|\theta(\cdot,s)\|_{W^{\frac{k}{2},p}}\sup\left\{[\varepsilon(t-s)]^{-\frac12}\,;[\varepsilon(t-s)]^{-\frac34}\right\}ds$$

$$\left\|\int_{T_0}^t e^{\varepsilon(t-s)\Delta}(-\Delta)^{1/2}\theta(\cdot,s)ds\right\|_{L^\infty(W^{\frac{k+1}{2},p})} \leq C\|\theta\|_{L^\infty(W^{\frac{k}{2},p})}\int_{T_0}^t\sup\left\{[\varepsilon(t-s)]^{-\frac12}\,;[\varepsilon(t-s)]^{-\frac34}\right\}ds.$$

$\Longrightarrow$ Ahora, con las estimaciones (i)-(iii) que permiten controlar las expresiones (10)-(12) vemos que la cantidad $\|\theta\|_{L^\infty(W^{\frac{k+1}{2},p})}$ puede ser controlada por:

$$\begin{aligned}
\|\theta\|_{L^\infty(W^{\frac{k+1}{2},p})} &\leq C\|\theta(\cdot,T_0)\|_{L^p}\sup\left\{[\varepsilon(t-T_0)]^{-\frac{k+1}{4}};1\right\}\\
&+C\|v\|_{L^\infty(L^\infty)}\|\theta\|_{L^\infty(W^{\frac{k}{2},p})}\int_{T_0}^t \varepsilon^{-N}\sup\left\{[\varepsilon(t-s)]^{-\frac{1}{2}};[\varepsilon(t-s)]^{-\frac{3}{4}}\right\}ds\\
&+C\|\theta\|_{L^\infty(W^{\frac{k}{2},p})}\int_{T_0}^t \sup\left\{[\varepsilon(t-s)]^{-\frac{1}{2}};[\varepsilon(t-s)]^{-\frac{3}{4}}\right\}ds.
\end{aligned}$$

Puesto que tenemos por hipótesis que las cantidades $\|\theta\|_{L^\infty(W^{\frac{k}{2},p})}$ y $\|v\|_{L^\infty(L^\infty)}$ son finitas, vemos que la cantidad $\|\theta\|_{L^\infty(W^{\frac{k+1}{2},p})}$ es controlada por una constante que depende de $\varepsilon > 0$ y hemos verificado de esta manera la regularidad espacial.

La regularidad en tiempo se deduce de lo anterior puesto que se tiene:

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k}\theta(x,t)+\nabla\cdot\left(\frac{\partial^k}{\partial t^k}(v_\varepsilon\,\theta)\right)(x,t)+(-\Delta)^{1/2}\left(\frac{\partial^k}{\partial t^k}\theta\right)(x,t)=\varepsilon\Delta\left(\frac{\partial^k}{\partial t^k}\theta\right)(x,t).\qquad\blacksquare$$

Observación 4 *Con estos resultado hemos demostrado que el problema aproximado*

$$\theta(x,t)=e^{\varepsilon t\Delta}\theta_0(x)-\int_0^t e^{\varepsilon(t-s)\Delta}\nabla\cdot(v_\varepsilon\,\theta)(x,s)ds-\int_0^t e^{\varepsilon(t-s)\Delta}(-\Delta)^{1/2}\theta(x,s)ds$$

posee soluciones que viven en $L^\infty(L^p)$ y que además son regulares. Sin embargo, estas soluciones -y sus propiedades- dependen del parámetro de regularización ε. Para poder hacer $\varepsilon \longrightarrow 0$ será necesario una etapa adicional.

2.5. Principio del Máximo

Este tipo de ecuaciones tiene una propiedad muy interesante llamada el *principio del máximo*: la norma L^p de la solución $\theta(x,t)$ se puede controlar por la norma L^p del dato inicial θ_0. Vamos a verificarlo primero en el caso de las soluciones aproximadas pues esta herramienta será necesaria para pasar al límite $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Teorema 3 (Principio del Máximo) *Sea $2\leq p<+\infty$ y sea θ una solución regular de (4). Entonces*

$$\|\theta(\cdot,t)\|_{L^p}\leq\|\theta_0\|_{L^p}. \tag{13}$$

Demostración. Escribimos

$$\frac{d}{dt}\|\theta(\cdot,t)\|_{L^p}^p = p\int_{\mathbb{R}^n}|\theta|^{p-2}\theta\,\partial_t\theta dx = p\int_{\mathbb{R}^n}|\theta|^{p-2}\theta\Big(\varepsilon\Delta\theta-\nabla\cdot(v_\varepsilon\,\theta)-(-\Delta)^{1/2}\theta\Big)dx$$

Usando el hecho que $div(v)=0$, obtenemos:

$$\frac{d}{dt}\|\theta(\cdot,t)\|_{L^p}^p-p\varepsilon\int_{\mathbb{R}^n}|\theta|^{p-2}\theta\Delta\theta dx+p\int_{\mathbb{R}^n}|\theta|^{p-2}\theta(-\Delta)^{1/2}\theta dx=0,$$

De manera que al integrar con respecto al tiempo se tiene

$$\|\theta(\cdot,t)\|_{L^p}^p-p\varepsilon\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}|\theta|^{p-2}\theta\Delta\theta dxds+p\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}|\theta|^{p-2}\theta(-\Delta)^{1/2}\theta dxds=\|\theta_0\|_{L^p}^p. \tag{14}$$

Necesitaremos el siguiente lema

Lema 5 *Las cantidades* $-p\varepsilon\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}|\theta|^{p-2}\theta\Delta\theta dx$ *y* $p\displaystyle\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}|\theta|^{p-2}\theta(-\Delta)^{1/2}\theta dxds$ *son positivas.*

Utilizando este lema, podemos volver a la expresión (14) de manera que se tiene la desigualdad

$$\|\theta(\cdot,t)\|_{L^p} \leq \|\theta_0\|_{L^p}$$

y de esta forma se obtiene el principio del máximo para las soluciones del problema aproximado.

Para terminar la prueba del teorema debemos verificar el lema anterior.

Prueba del lema. Solo demostraremos la positividad del primer término, la positividad del segundo término será demostrada posteriormente.

$\Longrightarrow$ Dado que $e^{\varepsilon s\Delta}$ es un semi-grupo de contracción, se tiene $\|e^{\varepsilon s\Delta}\theta\|_{L^p} \leq \|\theta\|_{L^p}$ para todo $s \geq 0$ y todo $\theta \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Entonces, se tiene que la cantidad $F(s) = \|e^{\varepsilon s\Delta}\theta\|_{L^p}$ es decreciente en s: su derivada es negativa.

Basta entonces tomar la derivada con respecto a s de $F(s)$ y de evaluar esta cantidad en $s = 0$ para obtener el resultado deseado. ■

Observación 5 *Con el principio del máximo vemos que la norma L^p de las soluciones del problema aproximado son acotadas por la norma L^p del dato inicial. Lo que es* ***esencial*** *en esta estimación es que se tiene una desigualdad* a priori *es decir que no depende del parámetro ε. Esto nos permitirá pasar al límite.*

2.6. Paso al límite

Recordemos el problema:

1) Tenemos un problema inicial
2) Hacemos una regularización introduciendo un parámetro $\varepsilon > 0$
3) Las soluciones de este problema regularizado son regulares y verifican un principio del máximo.

Tenemos entonces, para L^p, $p \geq 2$, una familia de funciones regulares $(\theta^{(\varepsilon)})_{\varepsilon>0} \in L^\infty([0,T]; L^p(\mathbb{R}^n))$ que son soluciones del problema aproximado y que verifican la estimación **uniforme**:

$$\|\theta^{(\varepsilon)}(\cdot,t)\|_{L^p} \leq \|\theta_0\|_{L^p}$$

$\Longrightarrow$ Supongamos que $v \in L^\infty$.

$\Longrightarrow$ Como el espacio $L^\infty([0,T]; L^p(\mathbb{R}^n))$ es un espacio dual, es decir:

$$L^\infty([0,T]; L^p(\mathbb{R}^n)) = \left(L^1([0,T]; L^q(\mathbb{R}^n))\right)'$$

con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, podemos extraer de la familia $\theta^{(\varepsilon)}$ una subsucesión $(\theta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ que converge débilmente-$*$ hacia una función θ en el espacio $L^\infty([0,T]; L^p(\mathbb{R}^n))$, lo que implica la convergencia en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$.

$\Longrightarrow$ Esta convergencia débil no es suficiente para mostrar la convergencia de $(v_\varepsilon\, \theta_k)$ hacia $v\,\theta$.

Para acabar, necesitaremos la proposición siguiente:

Proposición 2 *Si f es una función positiva, y si $2 < p < +\infty$ se tiene la mayoración:*

$$\|f\|^p_{\dot{B}^{1/p,p}_p} \leq C\|f^{p/2}\|^2_{\dot{W}^{1/2,2}}$$

Prueba. Si $0 < \epsilon \leq 1$, entonces para todo $a, b > 0$ se tiene $|a^\epsilon - b^\epsilon| \leq |a-b|^\epsilon$. Aplicando este hecho con $\epsilon = 2/p$, $a = f(x)^{p/2}$ y $b = f(y)^{p/2}$, podemos escribir $|f(x) - f(y)| \leq |f(x)^{p/2} - f(y)^{p/2}|^{2/p}$ lo que implica

$$\|f\|^p_{\dot{B}^{1/p,p}_p} \simeq \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+1}} dxdy \leq C \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)^{p/2} - f(y)^{p/2}|^2}{|x-y|^{n+1}} dxdy \simeq \|f^{p/2}\|^2_{\dot{B}^{1/2,2}_2}.$$

Dado que $\dot{B}^{1/2,2}_2 = \dot{W}^{1/2,2}$, se obtiene el resultado deseado. ■

Una vez que disponemos de este resultado, unas pocas observaciones nos permitirán demostrar la positividad del segundo término del Lema 5 y obtener la regularidad necesaria para pasar al límite.

- Vamos a demostrar ahora que se tiene la siguiente desigualdad

$$\|\theta^{p/2}\|^2_{\dot{W}^{1/2,2}} \leq C' \int_{\mathbb{R}^n} |\theta(x)|^{p-2}\theta(x)(-\Delta)^{1/2}\theta(x)dx$$

  que cual implica inmediatamente el resultado buscado de positividad.

- Podemos escribir entonces, usando el hecho que el operador $(-\Delta)^{1/4}$ es auto-adjunto:

$$\|\theta^{p/2}\|^2_{\dot{W}^{1/2,2}} = \int_{\mathbb{R}^n} |(-\Delta)^{1/4}\theta^{p/2}(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} \theta^{p/2}(x)(-\Delta)^{1/2}\theta^{p/2}(x)dx,$$

- Consideramos ahora el semi-grupo $(e^{-\tau(-\Delta)^{1/2}})_{\tau\geq 0}$. La acción de este semi-grupo sobre una función θ se tiene por convolución: $e^{-\tau(-\Delta)^{1/2}}\theta = \theta * p_\tau$ en donde p_τ es una función normalizada en norma L^1. Como se tiene $p \geq 2$, podemos usar la desigualdad de Jensen para obtener la mayoración

$$e^{-\tau(-\Delta)^{1/2}}\theta \leq \left(e^{-\tau(-\Delta)^{1/2}}\theta^{p/2}\right)^{2/p}$$

- Integrando esta desigualdad se obtiene

$$\|e^{-\tau(-\Delta)^{1/2}}\theta\|^p_{L^p} \leq \|e^{-\tau(-\Delta)^{1/2}}\theta^{p/2}\|^2_{L^2}.$$

- Para terminar, se toma la derivada con respecto a τ y se evalúa en $\tau = 0$:

$$-p\int_{\mathbb{R}^n} |\theta(x)|^{p-2}\theta(x)(-\Delta)^{1/2}\theta(x)dx \leq -2\int_{\mathbb{R}^n} \theta^{p/2}(x)(-\Delta)^{1/2}\theta^{p/2}(x)dx$$

  Es decir

$$\|\theta^{p/2}\|^2_{\dot{W}^{1/2,2}} = \int_{\mathbb{R}^n} \theta^{p/2}(x)(-\Delta)^{1/2}\theta^{p/2}(x)dx \leq p\int_{\mathbb{R}^n} |\theta(x)|^{p-2}\theta(x)(-\Delta)^{1/2}\theta(x)dx$$

- La demostración del caso general, cuando θ puede ser negativa, es un poco más delicada, pero sigue esencialmente las mismas etapas.

Con este resultado, vemos que las soluciones del problema aproximado verifican además

$$\|\theta\|^p_{\dot{B}^{1/p,p}_p} \leq \|\theta^{p/2}\|^2_{\dot{W}^{1/2,2}} \leq C\int_{\mathbb{R}^n} |\theta(x)|^{p-2}\theta(x)(-\Delta)^{1/2}\theta(x)dx$$

$\Longrightarrow$ Esta regularidad adicional permite asegurar que se tiene la convergencia de $(v_\varepsilon\, \theta_k)$ hacia $v\, \theta$.

$\Longrightarrow$ Se obtiene entonces una solución débil del problema inicial pasando al límite $\varepsilon \longrightarrow 0$.

2.7. Existencia de soluciones con un dato inicial L^∞

Toda la maquinaria desarrollada hasta aquí permite obtener la existencia de soluciones a partir de un dato inicial $\theta_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Para ello procedemos de la siguiente manera:

$\Longrightarrow$ Sea $\theta_0^R = \theta_0 \mathbb{1}_{B(0,R)}$ con $R > 0$, de esta manera, como $\theta_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, se tiene que $\theta_0^R \in L^p(\mathbb{R}^n)$ para todo $2 \leq p \leq +\infty$.

$\Longrightarrow$ Entonces existe una única solución θ^R del problema

$$\begin{cases} \partial_t \theta^R + \nabla \cdot (v\theta^R) + (-\Delta)^{1/2}\theta^R = 0 \\ \\ \theta^R(x,0) = \theta_0^R(x) \\ \\ div(v) = 0 \quad \text{ y } v \in L^\infty([0,T]; bmo(\mathbb{R}^n)). \end{cases}$$

además se tiene que $\theta^R \in L^\infty([0,T]; L^p(\mathbb{R}^n))$.

$\Longrightarrow$ Por el principio del máximo y por definición de θ_0^R tenemos

$$\|\theta^R(\cdot,t)\|_{L^p} \leq \|\theta_0^R\|_{L^p} \leq v_n \|\theta_0\|_{L^\infty} R^{n/p}$$

$\Longrightarrow$ Haciendo el límite $p \longrightarrow +\infty$ y luego haciendo $R \longrightarrow +\infty$ se obtiene $\|\theta(\cdot,t)\|_{L^\infty} \leq C\|\theta_0\|_{L^\infty}$.

$\Longrightarrow$ A partir de un dato inicial $\theta_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ existe una solución $\theta \in L^\infty([0,T]; L^\infty(\mathbb{R}^n))$.