Lección n°6: Desigualdades de Sobolev Mejoradas

UCE, verano 2013

1. Desigualdades de Sobolev Mejoradas

Recordemos que las desigualdades de Sobolev clásicas tienen la siguiente forma: si $1 < p < +\infty$ es un real tal que $1 < ps < n$ y si $r = \frac{np}{n-ps}$ entonces:

$$\|f\|_{L^r} \leq C\|f\|_{\dot{W}^{s,p}}$$

Vamos a ver que es posible *mejorar* las estimaciones de Sobolev clásicas cuando se introduce un espacio de Besov en la parte derecha de estas desigualdades.

Estudiemos un caso particular, si $1 \leq p < n$ y si $r = \frac{np}{n-p}$, se tiene

$$\|f\|_{L^r} \leq C\|\nabla f\|_{L^p}$$

Esta desigualdad puede mejorarse *sensiblemente* al considerar un espacio de Besov de la siguiente manera:

$$\|f\|_{L^r} \leq c\|\nabla f\|_{L^p}^{\theta}\|f\|_{\dot{B}_{\infty}^{-\beta,\infty}}^{1-\theta}$$

Observamos que cuando el parámetro r está relacionado con el índice p y con la dimensión n por medio de la ecuación $r = \frac{np}{n-p}$, se tiene $L^r \subset \dot{B}_{\infty}^{-\beta,\infty}$ de manera que, al nivel de las normas, se dispone de las desigualdades $\|f\|_{\dot{B}_{\infty}^{-\beta,\infty}} \leq C\|f\|_{L^r}$ y esto nos permite escribir

$$\|\nabla f\|_{L^p}^{\theta}\|f\|_{\dot{B}_{\infty}^{-\beta,\infty}}^{1-\theta} = \|\nabla f\|_{L^p}\left(\frac{\|f\|_{\dot{B}_{\infty}^{-\beta,\infty}}}{\|\nabla f\|_{L^p}}\right)^{1-\theta} \leq \|\nabla f\|_{L^p}\left(\frac{C\|f\|_{L^r}}{\|\nabla f\|_{L^p}}\right)^{1-\theta} \leq c'\|\nabla f\|_{L^p}.$$

Esto muestra en qué sentido se mejoran las desigualdades de Sobolev clásicas puesto que se tiene

$$\|f\|_{L^r} \leq c\|\nabla f\|_{L^p}^{\theta}\|f\|_{\dot{B}_{\infty}^{-\beta,\infty}}^{1-\theta} \leq C\|\nabla f\|_{L^p}$$

Sin embargo este tipo de desigualdades, no sólo son *más precisas*, sino que también son *más estables*:

- Al igual que las desigualdades de Sobolev clásicas, las desigualdades de Sobolev *mejoradas* son invariantes por *traslación*: sea $f_\tau(x) = f(x+\tau)$ con $\tau \in \mathbb{R}^n$, entonces se tiene que $\|f_\tau\|_{L^r} = \|f\|_{L^r}$, $\|\nabla f_\tau\|_{L^p} = \|\nabla f\|_{L^p}$ y $\|f_\tau\|_{\dot{B}_{\infty}^{-\beta,\infty}} = \|f\|_{\dot{B}_{\infty}^{-\beta,\infty}}$
- De mismo modo, estos dos tipos de desigualdades son invariantes por *dilatación*: si $f_a(x) = f(ax)$ para todo $a > 0$, entonces se tiene $\|f_a\|_{L^r} = a^{-n/r}\|f\|_{L^r}$, $\|\nabla f_a\|_{L^p} = a^{1-n/p}\|\nabla f\|_{L^p}$ y $\|f_a\|_{\dot{B}_{\infty}^{-\beta,\infty}} = a^{-\beta}\|f\|_{\dot{B}_{\infty}^{-\beta,\infty}}$; de manera que tal como están definidas las relaciones entre los índices se obtiene la estabilidad de estas desigualdades.
- La situación es diferente cuando se considera la *modulación*: si definimos $f_\omega(x) = e^{i\omega\cdot x}\varphi(x)$, en donde $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y $\widehat{\varphi}$ es a soporte compacto; entonces se tiene:
  $\|f_\omega\|_{L^r} = \|f\|_{L^r}$, $\|\nabla f_\omega\|_{L^p} \simeq |\omega|\|\varphi\|_{L^p}$ si $|\omega| \longrightarrow +\infty$ y $\|f_\omega\|_{\dot{B}_{\infty}^{-\beta,\infty}} \simeq |\omega|^{-\beta}\|f\|_{\dot{B}_{\infty}^{-\beta,\infty}}$ si $|\omega| \longrightarrow +\infty$

  Vemos entonces que las desigualdades de Sobolev mejoradas son más estables pues son invariantes por modulación, mientras que las desigualdades de Sobolev clásicas no son invariantes por modulación.
- Para terminar, vamos a ver que las desigualdades de Sobolev mejoradas son *más generales* en el sentido que los índices de los espacios funcionales pueden tomar más valores: por ejemplo no están necesariamente relacionados con la dimensión.

Los resultados

Teorema 1 *Sean p, r dos reales tales que $1 \leq p < r < +\infty$ y sea s un índice real tal que $s > 0$.*

1) Sea f una función tal que $f \in \dot{W}^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ y $f \in \dot{B}_\infty^{-\beta,\infty}(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\|f\|_{L^r} \leq c\|f\|_{\dot{W}^{s,p}}^{\theta}\|f\|_{\dot{B}_\infty^{-\beta,\infty}}^{1-\theta} \tag{1}$$

con $1 < p < r < +\infty$, $\theta = p/r$, $\beta = \frac{\theta s}{1-\theta}$.

2) Si f es una función tal que $\nabla f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $f \in \dot{B}_\infty^{-\beta,\infty}(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\|f\|_{L^r} \leq c\|\nabla f\|_{L^1}^{\theta}\|f\|_{\dot{B}_\infty^{-\beta,\infty}}^{1-\theta} \tag{2}$$

con $1 < r < +\infty$, $\theta = 1/r$ y $\beta = \theta/(1-\theta)$.

Demostración.

1) Empezamos la demostración recordando que el operador $(-\Delta)^{s/2}$ realiza un isomorphismo entre los espacios $\dot{B}_\infty^{-\beta,\infty}(\mathbb{R}^n)$ y $\dot{B}_\infty^{-\beta-s,\infty}(\mathbb{R}^n)$. Podemos entonces reescribir la desigualdad (1) de la siguiente manera:

$$\|(-\Delta)^{\frac{-s}{2}}f\|_{L^r} \leq C\|f\|_{L^p}^{\theta}\|f\|_{\dot{B}_\infty^{-\beta-s,\infty}}^{1-\theta} \tag{3}$$

en donde $1 < p < r < +\infty$, $\theta = p/r$, $\beta = \frac{\theta s}{1-\theta}$.

Vamos ahora a usar la siguiente definición de las potencias fraccionarias de un operador:

$$(-\Delta)^{\frac{-s}{2}}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{s}{2})}\int_0^{+\infty} t^{\frac{s}{2}-1}H_t f(x)dt.$$

Podemos entonces introducir un parámetro $T > 0$ que será fijado posteriormente y escribir:

$$(-\Delta)^{\frac{-s}{2}}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{s}{2})}\left(\int_0^{T} t^{\frac{s}{2}-1}H_t f(x)dt + \int_T^{+\infty} t^{\frac{s}{2}-1}H_t f(x)dt\right). \tag{4}$$

Para el estudio de estas integrales necesitaremos las siguientes estimaciones

- $|H_t f(x)| \leq \mathcal{M}_B f(x)$

  en donde $\mathcal{M}_B f$ es la función maximal de f definida por la expresión $\mathcal{M}_B f(x) = \sup\limits_{x\in B}\frac{1}{|B|}\int_B |f(y)|dy$ y verifica $\|\mathcal{M}_B f\|_{L^p} \leq C\|f\|_{L^p}$ para todo $1 < p < +\infty$.

- $|H_t f(x)| \leq Ct^{\frac{-\beta-s}{2}}\|f\|_{\dot{B}_\infty^{-\beta-s,\infty}}$ (por definición de los espacios de Besov)

Utilizando estas estimaciones en (4) se obtiene la siguiente desigualdad puntual:

$$|(-\Delta)^{\frac{-s}{2}}f(x)| \leq \frac{c_1}{\Gamma(\frac{s}{2})}T^{\frac{s}{2}}\mathcal{M}_B f(x) + \frac{c_2}{\Gamma(\frac{s}{2})}T^{\frac{-\beta}{2}}\|f\|_{\dot{B}_\infty^{-\beta-s,\infty}}.$$

Fijamos ahora el parámetro $T = \left(\frac{\|f\|_{\dot{B}_\infty^{-\beta-s,\infty}}}{\mathcal{M}_B f(x)}\right)^{\frac{2}{\beta+s}}$ y se obtiene la expresión

$$|(-\Delta)^{\frac{-s}{2}}f(x)| \leq \frac{c_1}{\Gamma(\frac{s}{2})}\mathcal{M}_B f(x)^{1-\frac{s}{\beta+s}}\|f\|_{\dot{B}_\infty^{-\beta-s,\infty}}^{\frac{s}{\beta+s_1}} + \frac{c_2}{\Gamma(\frac{s}{2})}\mathcal{M}_B f(x)^{1-\frac{s}{\beta+s}}\|f\|_{\dot{B}_\infty^{-\beta-s,\infty}}^{\frac{s}{\beta+s}}.$$

Dado que $\frac{s}{\beta+s}=1-\theta$ y que $\theta=p/r$ escribimos $|(-\Delta)^{\frac{-s}{2}}f(x)|\leq\frac{c}{\Gamma(\frac{s}{2})}\mathcal{M}_B f(x)^{\theta}\|f\|_{\dot{B}_{\infty}^{-\beta-s,\infty}}^{1-\theta}$. Para terminar solo hay que elevar a la potencia r esta cantidad e integrar con respecto a la variable x para obtener

$$\|(-\Delta)^{\frac{-s}{2}}f\|_{L^r}\leq c\|\mathcal{M}_B f\|_{L^p}^{\theta}\|f\|_{\dot{B}_{\infty}^{-\beta-s,\infty}}^{1-\theta}.$$

Usamos ahora el hecho que la función maximal es acotada de L^p en L^p y de esta forma se deduce la desigualdad (3), lo que termina la demostración del primer punto.

2) Para el caso cuando $\nabla f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $f\in\dot{B}_{\infty}^{-\beta,\infty}(\mathbb{R}^n)$ necesitaremos el siguiente lema.

Lema 1 *Para toda función $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1\leq p\leq+\infty)$ tal que $\nabla f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ y para $t\geq 0$ se tiene*

$$\|f-H_t(f)\|_{L^p}\leq C\sqrt{t}\|\nabla f\|_{L^p}\tag{5}$$

en donde C es una constante que depende solamente de la dimensión n.

Prueba. Como $H_t(f)=f*h_t$ y como h_t es una gaussiana podemos escribir

$$f(x)-H_t(f)(x)=f(x)-\int_{\mathbb{R}^n}f(x-y)h_t(y)dy=\int_{\mathbb{R}^n}\Big(f(x)-f(x-y)\Big)h_t(y)dy.$$

Pero como $\|f(\cdot)-f(\cdot-y)\|_{L^p}\leq|y|\;\|\nabla f\|_{L^p}$ se obtiene

$$\|f-H_t(f)\|_{L^p}\leq\|\nabla f\|_{L^p}\int_{\mathbb{R}^n}|y|h_t(y)dy=\|\nabla f\|_{L^p}\int_{\mathbb{R}^n}|y|\frac{e^{-|y|^2/2t}}{(2\pi t)^{n/2}}dy$$

$$\leq\|\nabla f\|_{L^p}\,t^{1/2}\int_{\mathbb{R}^n}|y|e^{-|y|^2}2\pi^{-n/2}dy\leq C_n\,t^{1/2}\|\nabla f\|_{L^p}$$

y el lema está demostrado. ■

Pasemos ahora a la demostración de la desigualdad (2). Por homogeneidad de estas estimaciones, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\|f\|_{\dot{B}_{\infty}^{-\beta,\infty}}\leq 1$. Podemos también suponer que se tiene $\|f\|_{L^r}<+\infty$. Se trata entonces de demostrar

$$\int_{\mathbb{R}^n}|f|^r dx\leq C\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla f|^p dx.\tag{6}$$

con la información $\|f\|_{\dot{B}_{\infty}^{-\beta,\infty}}\leq 1$. Para ello, utilizamos la siguiente caracterización[1] de los espacios de Lebesgue

$$\frac{1}{5^r}\|f\|_{L^r}^r=\int_0^{+\infty}|\{|f|>5\alpha\}|\,d(\alpha^r).\tag{7}$$

en donde hemos notado $|A|$ la medida del conjunto A. En lo que queda de la demostración vamos a estimar el conjunto $\{|f|>5\alpha\}$. Si fijamos $t_\alpha=\alpha^{2(\theta-1)/\theta}$ con la definición que hemos dado de los espacios de Besov tenemos que $\|H_{t_\alpha}(f)\|_{L^\infty}\leq\alpha$.

Para el resto de cálculos introducimos la siguiente función $\Theta_\alpha(t)$:

$$\Theta_\alpha(-t)=-\Theta_\alpha(t)\qquad\text{y}\qquad\Theta_\alpha(t)=\begin{cases}0 & \text{si } 0\leq t<\alpha\\ t-\alpha & \text{si } \alpha\leq t\leq M\alpha\\ (M-1)\alpha & \text{si } t>M\alpha\end{cases}\tag{8}$$

Aquí M es un parmámetro que por el momento fijamos tal que $M>10$. Con esta función, podemos construir $f_\alpha=\Theta_\alpha(f)$ tal que

[1]utilizar el teorema de Fubini.

Lema 2 *El conjunto* $\{|f| > 5\alpha\}$ *está contenido en el conjunto* $\{|f_\alpha| > 4\alpha\}$ *y se tiene la estimación*

$$|\{|f| > 5\alpha\}| \leq |\{|f_\alpha| > 4\alpha\}|\,.$$

En particular sobre el conjunto $\{|f| \leq M\alpha\}$ *se dispone de la desigualdad* $|f - f_\alpha| \leq \alpha$.

Lema 3 *Para* $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ *se tiene la identidad*

$$\nabla f_\alpha = (\nabla f)\mathbb{1}_{\{\alpha \leq |f| \leq M\alpha\}} \quad \textit{casi en todas partes.}$$

Regresemos ahora a la fórmula (7), con el lema 2 obtenemos la mayoración

$$\int_0^{+\infty} |\{|f| > 5\alpha\}|\, d(\alpha^r) \leq \int_0^{+\infty} |\{|f_\alpha| > 4\alpha\}|\, d(\alpha^r) = I. \tag{9}$$

Definimos ahora $E(\alpha) = \{|f_\alpha| > 4\alpha\}$, $F(\alpha) = \{|f_\alpha - H_{t_\alpha}(f_\alpha)| > \alpha\}$ y $G(\alpha) = \{|H_{t_\alpha}(f_\alpha - f)| > 2\alpha\}$. Por la propiedad de linealidad del semi-grupo H_t escribimos

$$f_\alpha = f_\alpha - H_{t_\alpha}(f_\alpha) + H_{t_\alpha}(f_\alpha - f) + H_{t_\alpha}(f).$$

Dado que $\|H_{t_\alpha}(f)\|_{L^\infty} \leq \alpha$, se tiene $E(\alpha) \subset F(\alpha) \cup G(\alpha)$ y podemos dar la siguiente estimación de la parte derecha de (9) por medio de las dos integrales:

$$I \leq \underbrace{\int_0^{+\infty} |F(\alpha)| d(\alpha^r)}_{I_1} + \underbrace{\int_0^{+\infty} |G(\alpha)| d(\alpha^r)}_{I_2}. \tag{10}$$

• Para la primera integral I_1, la desigualdad de Tchebychev nos proporciona

$$|F(\alpha)| \leq \alpha^{-p} \int_{\mathbb{R}^n} |f_\alpha - H_{t_\alpha}(f_\alpha)|^p dx.$$

Es en éste punto que usamos la desigualdad (5) para obtener $|F(\alpha)| \leq C\, \alpha^{-p}\, t_\alpha^{p/2} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f_\alpha|^p dx$.

Recordemos que por la definición de t_α dada anteriormente se tiene $t_\alpha^{p/2} = \alpha^{p-r}$. Además, por el lema 3 se dispone de la identidad $\nabla f_\alpha = (\nabla f)\mathbb{1}_{\{\alpha \leq |f| \leq M\alpha\}}$ de manera que podemos escribir

$$|F(\alpha)| \leq C\, \alpha^{-r} \int_{\{\alpha \leq |f| \leq M\alpha\}} |\nabla f|^p dx.$$

Integrando ahora con respecto a $d(\alpha^r)$ obtenemos

$$\int_0^{+\infty} |F(\alpha)| d(\alpha^r) \leq C \int_0^{+\infty} \alpha^{-r} \left(\int_{\{\alpha \leq |f| \leq M\alpha\}} |\nabla f|^p dx \right) d(\alpha^r) = C\, r \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^p \left(\int_{\frac{|f|}{M}}^{|f|} \frac{d\alpha}{\alpha} \right) dx$$

Así tenemos el siguiente resultado para esta primera integral

$$I_1 \leq C\, r \log(M) \|\nabla f\|_{L^p}^p. \tag{11}$$

• Para la segunda integral I_2 dado en (10) escribimos

$$|f - f_\alpha| = |f - f_\alpha| \mathbb{1}_{\{|f| \leq M\alpha\}} + |f - f_\alpha| \mathbb{1}_{\{|f| > M\alpha\}}$$

Por la definición de f_α (cf. Lema 2), se tiene $|f - f_\alpha| \leq \alpha + |f| \mathbb{1}_{\{|f| > M\alpha\}}$ y aplicando H_t a ambos lados de la desigualdad anterior obtenemos

$$H_{t_\alpha}(|f - f_\alpha|) \leq \alpha + H_{t_\alpha}(|f| \mathbb{1}_{\{|f| > M\alpha\}}).$$

Lo que implica la inclusión de conjuntos $G(\alpha) \subset \big\{H_{t_\alpha}(|f|\mathbb{1}_{\{|f|>M\alpha\}}) > \alpha\big\}$. Finalemente, si se considera la medida de estos conjuntos se tiene

$$|G(\alpha)| \leq \left|\big\{H_{t_\alpha}(|f|\mathbb{1}_{\{|f|>M\alpha\}}) > \alpha\big\}\right|.$$

Integrando esta expresión con respecto a $d(\alpha^r)$, tenemos

$$I_2 = \int_0^{+\infty} |G(\alpha)|d(\alpha^r) \leq \int_0^{+\infty} \left|\{H_{t_\alpha}(|f|\mathbb{1}_{\{|f|>M\alpha\}}) > \alpha\}\right| d(\alpha^r).$$

Aplicando una vez más la desigualdad de Tchebychev y el teorema de Fubini escribimos

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \int_0^{+\infty} \alpha^{-1}\Big(\int_{\mathbb{R}^n} H_{t_\alpha}\left(|f|\mathbb{1}_{\{|f|>M\alpha\}}\right) dx\Big) d(\alpha^r) \\ &\leq r\int_{\mathbb{R}^n} |f|\Big(\int_0^{\infty} \mathbb{1}_{\{|f|>M\alpha\}}\alpha^{r-2}d\alpha\Big)dx = \frac{r}{r-1}\int_{\mathbb{R}^n}|f|\frac{|f|^{r-1}}{M^{r-1}}dx = \frac{r}{r-1}\,\frac{1}{M^{r-1}}\|f\|_{L^r}^r \end{aligned} \tag{12}$$

Juntando las estimaciones (11) et (12) se obtiene

$$\frac{1}{5^r}\|f\|_{L^r}^r \leq Cr\;\log(M)\|\nabla f\|_{L^p}^p + \frac{r}{r-1}\frac{1}{M^{r-1}}\|f\|_{L^r}^r.$$

Si la constante M es suficientemente grande, se obtiene

$$\left(\frac{1}{5^r} - \frac{r}{r-1}\frac{1}{M^{r-1}}\right)\|f\|_{L^r}^r \leq Cq\;\log(M)\|\nabla f\|_{L^p}^p$$

y de esta manera se obtiene la desigualdad (6) y consecuentemente el punto 2).

Con esto terminamos la demostración del Teorema 1.

■

2. Una versión logarítmica

Vamos a estudiar ahora una pequeña variante de las desigualdades anteriores. En efecto, recientes estudios muestran que el hecho de considerar desigualdades de Sobolev *logarítmicas* permiten comprender mejor ciertos aspectos del transporte de medidas.

Estas desigualdades tienen la siguiente forma:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \ln\big[|f(x)|\big]dx \leq \frac{n}{p}\ln\left[\mathscr{L}_{p,n}\|\nabla f\|_{L^p}\right] \qquad (1 \leq p \leq n) \tag{13}$$

en donde $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función que verifica $\|f\|_{L^p} = 1$ tal que $f \in \dot{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ y $\mathscr{L}_{p,n}$ es una constante universal que depende únicamente del índice p y de la dimensión n.

Esta desigualdad ha sido ampliamente estudiada por medio de técnicas muy distintas. Los resultados más importantes de estos trabajos tienen que ver con la *optimalidad* de este tipo de mayoración; es decir en la obtención de las funciones que realizan la igualdad en la expresión anterior y en el cálculo explícito de las constantes optimales $\mathscr{L}_{p,n}$.

En esta lección nos concentraremos únicamente en estudiar mejoras a esta desigualdad logarítmica, sin interesarnos en las constantes optimales.

Teorema 2 *Sea $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $\|f\|_{L^p}=1$.*

1) Si $1<p<+\infty$ y si $f\in \dot{W}^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ y $f\in \dot{B}^{-\beta,\infty}_{\infty}(\mathbb{R}^n)$. Entonces se tiene la siguiente desigualdad

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \ln\big[|f(x)|\big]dx \le \frac{r}{r-p}\ln\Big[c\|f\|^{\theta}_{\dot{W}^{s,p}}\|f\|^{1-\theta}_{\dot{B}^{-\beta,\infty}_{\infty}}\Big] \tag{14}$$

en dónde $s>0$, $\theta=p/r$, $\beta=\frac{\theta s}{1-\theta}$ y $c=c(n,p,r,s)$ es una constante universal.

2) Si $p=s=1$ y si $\nabla f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $f\in \dot{B}^{-\beta,\infty}_{\infty}(\mathbb{R}^n)$ se tiene

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \ln\big[|f(x)|\big]dx \le \frac{r}{r-1}\ln\Big[c\|\nabla f\|^{\theta}_{L^1}\|f\|^{1-\theta}_{\dot{B}^{-\beta,\infty}_{\infty}}\Big] \tag{15}$$

en dónde $\theta=1/r$, $\beta=\frac{\theta}{1-\theta}$ y $c=c(n,p,r)$ es una constante universal.

Para comenzar el estudio de este tipo de desigualdades, es conveniente observar que este resultado se construye en dos etapas distintas. En efecto, la primera etapa consiste en demostrar la desigualdad

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \ln\big[|f(x)|\big]dx \le \frac{r}{r-p}\ln\left[\|f\|_{L^r}\right], \tag{16}$$

Una vez que se tienen estas desigualdades, es suficiente aplicar las desigualdades de Sobolev mejoradas:

$$\|f\|_{L^r}\le c\|f\|^{\theta}_{\dot{W}^{s,p}}\|f\|^{1-\theta}_{\dot{B}^{-\beta,\infty}_{\infty}} \qquad \text{y} \qquad \|f\|_{L^r}\le c\|\nabla f\|^{\theta}_{L^1}\|f\|^{1-\theta}_{\dot{B}^{-\beta,\infty}_{\infty}} \tag{17}$$

y de esta manera, inyectando (17) en (16), podemos ver que se obtiene inmediatamente las desigualdades (14) y (15) y es por esta razón que denominamos estas estimaciones como las *desigualdades logarítmicas de Gagliardo-Nirenberg mejoradas*.

Por el crecimiento de la función logaritmo, las desigualdades de Gagliardo-Nirenberg proporcionan un resultado más preciso que las desigualdades de Sobolev clásicas puesto que podemos escribir

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \ln\big[|f(x)|\big]dx \le \frac{n}{p}\ln\Big[c\|\nabla f\|^{\theta}_{L^p}\|f\|^{1-\theta}_{\dot{B}^{-\beta,\infty}_{\infty}}\Big] \le \frac{n}{p}\ln\left[c'\|\nabla f\|_{L^p}\right].$$

De esta manera vemos que, cuando no se está preocupado por el estudio de las constantes optimales, es posible deducir las desigualdades de Sobolev logarítmicas clásicas a partir del Teorema 2.

Una aplicación de las desigualdades de Hölder y de Jensen

Demostramos ahora la desigualdad (16) por medio de cálculos totalmente elementales.

Teorema 3 *Sean p y r dos índices reales tales que $1\le p<r<+\infty$. Si $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ es una función tal que $\|f\|_{L^p}=1$ y tal que $\|f\|_{L^r}<+\infty$ entonces se tiene la estimación*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \ln\big[|f(x)|\big]dx \le \frac{r}{r-p}\ln\big[\|f\|_{L^r}\big].$$

Demostración. Con las hipótesis del teorema podemos empezar con una desigualdad de interpolación entre espacios de Lebesgue dada por la fórmula $\|f\|_{L^q}\le\|f\|^{\alpha}_{L^p}\|f\|^{1-\alpha}_{L^r}$, en donde p,q,r y $\alpha\in]0,1[$ están relacionados por la expresión

$$\frac{1}{q}=\frac{\alpha}{p}+\frac{1-\alpha}{r}. \tag{18}$$

Una vez que disponemos de esta estimación, podemos aplicar la función logaritmo a ambos lados para obtener

$$\ln\big[\|f\|_{L^q}\big]\le\alpha\ln\big[\|f\|_{L^p}\big]+(1-\alpha)\ln\big[\|f\|_{L^r}\big].$$

Utilizando la hipótesis $\|f\|_{L^p} = 1$, se tiene

$$(\alpha - 1)\ln\left[\|f\|_{L^r}\right] \leq -\ln\left[\|f\|_{L^q}\right]. \tag{19}$$

Notamos que la función $-\ln$ es una función convexa y vamos a aplicar la desigualdad de Jensen a la parte derecha de la fórmula anterior. Para ello escribimos

$$-\ln\left[\|f\|_{L^q}\right] = -\frac{1}{q}\ln\left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{q-p}|f(x)|^p dx\right].$$

Observamos ahora que la medida $\mu(dx) = |f(x)|^p dx$ es una medida de probabilidad puesto que se tiene $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \mu(dx) = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx = 1$. Reescribimos entonces la fórmula anterior de la siguiente manera

$$-\ln\left[\|f\|_{L^q}\right] = -\frac{1}{q}\ln\left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{q-p}\mu(dx)\right],$$

para aplicar directamente la desigualdad de Jensen:

$$-\ln\left[\|f\|_{L^q}\right] \leq -\frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^n} \ln\left[|f(x)|^{q-p}\right]\mu(dx) = -\frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^n} \ln\left[|f(x)|^{q-p}\right]|f(x)|^p dx.$$

Una vez que se tiene esta desigualdad, podemos volver a la fórmula (19) y escribir

$$(\alpha - 1)\ln\left[\|f\|_{L^r}\right] \leq -\frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \ln\left[|f(x)|^{q-p}\right]dx,$$

es decir

$$\frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \ln\left[|f(x)|^{q-p}\right]dx \leq (1-\alpha)\ln\left[\|f\|_{L^r}\right].$$

Finalmente, utilizando las propiedades del logaritmo y la relación (18) entre los índices p, q, r y α obtenemos la desigualdad buscada:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \ln\left[|f(x)|\right]dx \leq \frac{r}{r-p}\ln\left[\|f\|_{L^r}\right].$$

■

3. Espacios de Lorentz y Desigualdades de Sobolev Mejoradas

Para terminar esta lección, vamos a estudiar variantes de las desigualdades de Sobolev Mejoradas en las cuales intervienen espacios de Lorentz.

Sabemos que cuando $1 < r < p$, entonces se tiene la inclusión de espacios $L^{p,r} \subset L^p$, es decir que, al nivel de las normas, se tiene

$$\|f\|_{L^p} \leq c\|f\|_{L^{p,r}}$$

Esta mayoración nos da una idea de cómo sería posible mejorar las desigualdades de Sobolev estudiadas anteriormente usando este tipo de espacios. En este sentido tenemos el resultado siguiente:

Teorema 4 *Sean $\alpha, \beta > 0$, $q_0, q_1 \in [1 + \infty]$ con $q_0 \neq q_1$. Sean $\theta = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \in]0,1[$, $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$ y sea $r \in [1, +\infty]$. Si $f \in \dot{B}^{\alpha,q_0}_r \cap \dot{B}^{-\beta,q_1}_r(\mathbb{R}^n)$ entonces $f \in L^{p,r}(\mathbb{R}^n)$ y se tiene la desigualdad:*

$$\|f\|_{L^{p,r}} \leq C_0\|f\|^{1-\theta}_{\dot{B}^{\alpha,q_0}_r}\|f\|^{\theta}_{\dot{B}^{-\beta,q_1}_r}. \tag{20}$$

Para demostrar este resultado, vamos a utilizar la descomposición de Littlewood-Paley y herramientas de la *teoría de la interpolación*.

Definición 1 *Si A_0 y A_1 son dos espacios de Banach continuamente incluidos en un espacio vectorial topológico V, si $0 < \theta < 1$ y $1 \leq r \leq +\infty$, entonces el espacio de interpolación real $[A_0, A_1]_{\theta,r}$ puede ser definido de la siguiente manera: $f \in [A_0, A_1]_{\theta,r}$ si y solo si $f \in V$ y f puede escribirse en V como $f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} f_j$, con $f_j \in A_0 \cap A_1$ y $(2^{-j\theta}\|f_j\|_{A_0})_{j\in\mathbb{Z}} \in \ell^r$, $(2^{j(1-\theta)}\|f_j\|_{A_1})_{j\in\mathbb{Z}} \in \ell^r$. Este espacio puede ser normado por*

$$\|f\|_{[A_0,A_1]_{\theta,r}} = \inf_{f=\sum f_j} \big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-j\theta r}\|f_j\|^r_{A_0}\big)^{1/r} + \big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{j(1-\theta)r}\|f_j\|^r_{A_1}\big)^{1/r}$$

En lo que sigue no vamos a usar directamente esta caracterización, utilizaremos más bien el resultado siguiente:

Proposición 1 *Si una función f se descompone como $f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} f_j$ en el sentido de la definición de la interpolación real y si $\rho > 0$, con $\rho \neq 1$, entonces se tiene la siguiente desigualdad:*

$$\|f\|_{[A_0,A_1]_{\theta,r}} \leq C_{\rho,\theta,r}\big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \rho^{-j\theta r}\|f_j\|^r_{A_0}\big)^{(1-\theta)/r}\big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \rho^{j(1-\theta)r}\|f_j\|^r_{A_1}\big)^{\theta/r}. \tag{21}$$

Proposición 2 (Espacios de Lorentz como espacios de interpolación)

1) Para $1 < p < +\infty$, $1 \leq r \leq +\infty$ se tiene

$$L^{p,r} = [L^1, L^\infty]_{\theta,r} \qquad \text{con } \theta = 1 - \frac{1}{p}.$$

2) Si $p_0 \neq p_1$, tenemos

$$[L^{p_0}, L^{p_1}]_{\theta,r} = [L^{p_0,r_0}, L^{p_1,r_1}]_{\theta,r} = L^{p,r} \qquad \text{con } \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}.$$

3) En el caso $p_0 = p_1 = p$ se tiene

$$[L^{p,r_0}, L^{p,r_1}]_{\theta,r} = L^{p,r} \qquad \text{si } \frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{r_0} + \frac{\theta}{r_1}.$$

Demostración.

$\Longrightarrow$ Empecemos fijando p_0 y p_1 tales que $1 \leq q_0 < p_0 < p < p_1 < q_1 \leq +\infty$ y

$$\frac{2}{p} = \frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_1}$$

$\Longrightarrow$ Tenemos en particular $\frac{1}{p_i} = \frac{1-a_i}{q_0} + \frac{a_i}{q_1}$ con $0 < a_i < 1$ y $i = 0, 1$.

$\Longrightarrow$ Escribimos luego

$$\|\Delta_j f\|_{L^{p_i}} \leq \|\Delta_j f\|^{1-a_i}_{L^{q_0}}\|\Delta_j f\|^{a_i}_{L^{q_1}} = \big(2^{j\alpha}\|\Delta_j f\|_{L^{q_0}}\big)^{1-a_i}\left(2^{-j\beta}\|\Delta_j f\|_{L^{q_1}}\right)^{a_i} 2^{j\left[-\alpha(1-a_i)+\beta a_i\right]}.$$

$\Longrightarrow$ Dado que por hipótesis tenemos $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$ y $\theta = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ se tiene $-\alpha(1-a_0) + \beta a_0 = \alpha(1-a_1) - \beta a_1$.

$\Longrightarrow$ Si notamos $\rho = 2^{-2[\alpha(1-a_0)-\beta a_0]} > 0$ tenemos

$$\begin{aligned}
\rho^{-j/2}\|\Delta_j f\|_{L^{p_0}} &\leq \big(2^{j\alpha}\|\Delta_j f\|_{L^{q_0}}\big)^{1-a_0}\left(2^{-j\beta}\|\Delta_j f\|_{L^{q_1}}\right)^{a_0}\\
\rho^{j/2}\|\Delta_j f\|_{L^{p_1}} &\leq \big(2^{j\alpha}\|\Delta_j f\|_{L^{q_0}}\big)^{1-a_1}\left(2^{-j\beta}\|\Delta_j f\|_{L^{q_1}}\right)^{a_1}
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Vamos a reconstruir las normas de los espacios de Besov. Para ello aplicamos ahora la desigualdad de Hölder en cada una de estas dos desigualdades para obtener

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \rho^{-jr/2}\|\Delta_j f\|_{L^{p_0}}^r \leq \|f\|_{\dot{B}_r^{\alpha,q_0}}^{r(1-a_0)}\|f\|_{\dot{B}_r^{-\beta,q_1}}^{ra_0}$$

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \rho^{jr/2}\|\Delta_j f\|_{L^{p_1}}^r \leq \|f\|_{\dot{B}_r^{\alpha,q_0}}^{r(1-a_1)}\|f\|_{\dot{B}_r^{-\beta,q_1}}^{ra_1}$$

$\Longrightarrow$ Con estas estimaciones, aplicamos la Proposición 2. Se deduce entonces que si $f \in \dot{B}_r^{\alpha,q_0} \cap \dot{B}_r^{-\beta,q_1}(\mathbb{R}^n)$ entonces $f \in [L^{p_0}, L^{p_1}]_{\frac{1}{2},r} = L^{p,r}$.

$\Longrightarrow$ Además, usando la mayoración (21) se obtiene

$$\|f\|_{L^{p,r}} \leq C_{\rho,r}\|f\|_{\dot{B}_r^{\alpha,q_0}}^{1-\theta}\|f\|_{\dot{B}_r^{-\beta,q_1}}^{\theta}$$

■