**Definiciones de los espacios funcionales: un resumen** UCE, verano 2013

# 1. Espacios de Lebesgue

**Definición 1** *Tenemos las caracterizaciones siguientes de los espacios de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^n)$:*

- *Definición usual: para $1 \leq p < +\infty$*

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx\right)^{1/p} \quad \text{y para } p = +\infty \quad \|f\|_{L^\infty} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} ess\, |f(x)|$$

- *Definición por medio de las líneas de nivel: para $1 \leq p < +\infty$*

$$\|f\|_{L^p} = \left(p\int_0^{+\infty} \alpha^{p-1} d_f(\alpha) d\alpha\right)^{1/p}$$

*con $d_f(\alpha) = |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \alpha\}|$.*

- *Definición por medio del análisis de Littlewood-Paley: únicamente válido para $1 < p < +\infty$*

$$\|f\|_{L^p} \simeq \left\| \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\Delta_j(f)(x)|^2\right)^{1/2} \right\|_{L^p}$$

*Los espacios $L^1$ y $L^\infty$ no pueden ser caracterizados por medio del análisis de Littlewood-Paley.*

# 2. Espacios de Sobolev

**Definición 2** *Tenemos las caracterizaciones siguientes de los espacios de Lebesgue $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$:*

- *Definición usual: para $1 \leq p \leq +\infty$ y $s = k \in \mathbb{N}$*

$$\|f\|_{W^{k,p}} = \sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha f\|_{L^p} = \|f\|_{L^p} + \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha f\|_{L^p}$$

- *Definición por medio las potencias fraccionales del Laplaciano: para $1 < p < +\infty$ y $s \in \mathbb{R}$*

$$\|f\|_{W^{s,p}} = \|f\|_{L^p} + \|(-\Delta)^{s/2} f\|_{L^p}$$

- *Definición por medio del análisis de Littlewood-Paley: únicamente válido para $1 < p < +\infty$, con $s \in \mathbb{R}$*

$$\|f\|_{W^{s,p}} \simeq \|f\|_{L^p} + \left\| \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} 2^{2js} |\Delta_j(f)(x)|^2\right)^{1/2} \right\|_{L^p}$$

## 3. Espacios de Besov

**Definición 3** *Tenemos las caracterizaciones siguientes de los espacios de Besov $B^{s,p}_q(\mathbb{R}^n)$:*

- *Definición por diferencias iteradas: para $1 \leq p, q \leq +\infty$, con $s > 0$ un real, y con $k \in \mathbb{N}$ tal que $k-1 \leq s < k$.*

$$\|f\|_{B^{s,p}_q} = \|f\|_{L^p} + \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\|\Delta^k_y f\|^q_{L^p}}{|y|^{n+sq}} dy\right)^{1/q},$$

  *con las modificaciones usuales si $q = +\infty$:*

$$\|f\|_{B^{s,p}_\infty} = \|f\|_{L^p} + \sup_{y \neq 0} \frac{\|\Delta^k_y f\|_{L^p}}{|y|^s}.$$

- *Definición térmica: para $1 \leq p, q \leq +\infty$, con $s > 0$ un real y $k \in \mathbb{N}$ t.q. $0 < s/2 < k$*

$$\|f\|_{B^{s,p}_q} = \|f\|_{L^p} + \left(\int_0^{+\infty} t^{(k-s/2)q} \left\|\frac{\partial^k H_t f}{\partial t^k}\right\|^q_{L^p} \frac{dt}{t}\right)^{1/q}$$

  *Si $s > 0$, los espacios de Besov de regularidad negativa se definen por:*

$$\|f\|_{B^{-s,p}_q} = \|H_1(f)\|_{L^p} + \left(\int_0^{+\infty} t^{sq/2} \|H_t f\|^q_{L^p} \frac{dt}{t}\right)^{1/q}$$

- *Definición por medio del análisis de Littlewood-Paley: para $1 \leq p, q \leq +\infty$, con $s \in \mathbb{R}$*

$$\|f\|_{B^{s,p}_q} \simeq \|f\|_{L^p} + \left(\sum_{j \in \mathbb{N}} 2^{jsq} \|\Delta_j(f)\|^q_{L^p}\right)^{1/q}$$

## 4. Espacios de Triebel-Lizorkin

**Definición 4** *Los espacios de Triebel-Lizorkin $F^{s,p}_q(\mathbb{R}^n)$ con $1 < p < +\infty$ y $s \in \mathbb{R}$ están definidos por*

$$\|f\|_{F^{s,p}_q} = \|f\|_{L^p} + \left\|\left(\sum_{j \in \mathbb{N}} 2^{jsq} |\Delta_j(f)(x)|^q\right)^{1/q}\right\|_{L^p}$$

## 5. Identificaciones de espacios

- Lebesgue: $L^p \simeq F^{0,p}_2$ para $1 < p < +\infty$
- Sobolev: $W^{s,p} \simeq F^{s,p}_2$ para $1 < p < +\infty$ y $s \in \mathbb{R}$
- Hölder-Zygmund: $\mathscr{C}^s \simeq B^{s,\infty}_\infty$, $s > 0$
- Besov y Triebel-Lizorkin: $B^{s,p}_p \simeq F^{s,p}_p$ si $1 < p < +\infty$.

Estas identificaciones se mantienen al considerar las versiones homogéneas de estos espacios: es decir cuando no se considera la norma $L^p$ en las definiciones anteriores y se trabaja únicamente con el segundo término.