Espacios de Lorentz

Asociación Amarun

Versión 0.0.1

Diego Chamorro

28 de mayo de 2018

Índice general

1 Espacios de Lorentz

Como ha sido expuesto en los dos libros anteriores[1] (el Volumen 1 y el Volumen 2), los espacios de Lebesgue miden el *tamaño* de las funciones y su importancia es indiscutible, pues forman parte de los "ladrillos de base" del análisis funcional, del análisis armónico, de las ecuaciones en derivadas parciales y de las probabilidades (entre otros). Sin embargo, a pesar del rol preponderante de estos espacios en estas ramas de las matemáticas, en ciertas ocasiones importantes se puede evidenciar claramente que la forma en que los espacios de Lebesgue miden el tamaño de las funciones no es suficiente ni satisfactoria. Es por lo tanto necesario considerar otra manera mucho más precisa de medir esta cantidad (es decir el tamaño de las funciones) y una forma de lograr este objetivo es estudiar los espacios de Lorentz $L^{p,q}$.

En este capítulo presentaremos esencialmente la definición de los espacios de Lorentz[2] y sus principales características mientras que en los capítulos siguientes presentaremos situaciones en donde no solo los espacios de Lorentz reemplazan con todo éxito a los espacios de Lebesgue, sino que su utilización es indispensable para resolver cierto tipo problemas importantes.

Por motivos pedagógicos presentamos en la primera sección de este capítulo los espacios de Lorentz $L^{p,\infty}$ con $0 < p \leq +\infty$, que son también llamados espacios *L^p-débiles* o *espacios de Marcinkiewicz*. Estos espacios $L^{p,\infty}$ son quizás los más populares de los espacios de Lorentz porque son sencillos de definir e intervienen muy directamente en numerosas aplicaciones y esto es otra justificación para presentarlos por separado: así se tendrá a la mano una serie de resultados listos para ser utilizados. En la Sección 1.2 definiremos los espacios de Lorentz $L^{p,q}$ generales, es decir con $0 < p, q \leq +\infty$, y veremos dos caracterizaciones posibles de estos espacios. A medida que vayamos presentando estas caracterizaciones distintas, iremos recorriendo algunas propiedades de estos espacios y de esta manera tendremos ya en esta etapa una buena idea de lo que es un espacio de Lorentz. En la Sección 1.3 estudiaremos bajo qué condiciones los espacios de Lorentz son espacios de Banach y veremos que la obtención de esta importante estructura topológica en los espacios de Lorentz no es tan directa como en el caso de los espacios de Lebesgue: esto nos llevará a considerar una tercera manera de caracterizar estos espacios de Lorentz. En la Sección 1.4 veremos cómo generalizar ciertas propiedades presentadas en el marco de los espacios de Lebesgue a los espacios de Lorentz. Esta sección es interesante pues muestra que muchos de los objetos presentados en el Volumen

[1] En todo lo que sigue, denotaremos por "Volumen 1" al libro *Espacios de Lebesgue y de Lorentz, Volumen 1: Teoría de la Medida y Teoría de la Integración*, Ediciones AMARUN (2017) y por "Volumen 2" al libro *Espacios de Lebesgue y de Lorentz, Volumen 2: Análisis Funcional y Complementos*, Ediciones AMARUN (2017).

[2] G. Lorentz (1910-2006), matemático ruso.

1 o en el Volumen 2 pueden ser tratados desde el punto de vista más general de los espacios de Lorentz. En la Sección 1.5, estudiaremos las relaciones de dualidad existentes en los espacios de Lorentz y veremos que, al igual que los espacios de Lebesgue, es útil poder considerar diferentes estructuras topológicas además de la topología inicial que provee estos espacios de una estructura de espacio de Banach. Finalmente, en la Sección 1.6 estudiaremos los espacios de Lorentz discretos, si bien la teoría general se aplica casi directamente al caso discreto (basta cambiar de medida), es conveniente explicar y recalcar algunas situaciones particulares que surgen al considerar medidas discretas.

Contrariamente a los espacios de Lebesgue, en los espacios de Lorentz no se dispone de una sola y única funcional que permita caracterizarlos y que sea *a la vez* sencilla de definir, fácil de usar y que condense cómodamente todas las propiedades más importantes de estos espacios de funciones. Esto implica que para estudiar rigurosamente estos espacios sea necesario utilizar diferentes puntos de vista por medio de diversas funcionales que serán definidas y presentadas a su debido tiempo.

En todo este capítulo, a excepción de la Sección 1.6 y salvo mención expresa de lo contrario, siempre consideraremos $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido con μ una medida positiva σ-finita y funciones definidas sobre X a valores en $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$. El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 1$ siempre estará dotado de su estructura de espacio medido natural $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx)$ y notaremos la medida de Lebesgue de un subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ por $|A|$.

1.1. Espacios $L^{p,\infty}$ o L^p-débiles

En esta sección empezamos presentando los espacios de Lorentz $L^{p,\infty}$ que son también llamados L^p-débiles o espacios de Marcinkiewicz[3]. Quizás la manera más natural de definir estos espacios consiste en introducir la *función de distribución*, cuyo estudio ocupará la primera sección a continuación y una vez que habremos expuesto las particularidades de este objeto, podremos con toda comodidad presentar una primera definición de estos espacios $L^{p,\infty}$ y veremos sus propiedades más inmediatas, en particular veremos en qué sentido estos espacios son una generalización de los espacios de Lebesgue L^p.

1.1.1. Función de distribución

La función de distribución explica cómo se comporta una función $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ a medida que recorremos el rango de sus valores. Más precisamente, vamos a medir el tamaño de los conjuntos $\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}$ de una función f a partir de una cierta altura dada que está determinada por el parámetro real $\alpha \geq 0$ como nos indica la definición siguiente.

Definición 1.1.1 (Función de Distribución) *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido, sea $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ una función medible definida sobre X a valores en $\mathbb{K}$ y sea*

[3] Józef Marcinkiewicz (1910-1940), matemático polaco.

$\alpha \in [0, +\infty[$ *un real. Definimos la* función de distribución $d_f : [0, +\infty[\longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ asociada a la función f *por medio de la expresión*

$$d_f(\alpha) = \int_X \mathbb{1}_{\{|f(x)|>\alpha\}}(x)d\mu(x) = \mu\left(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}\right). \qquad (1.1)$$

La primera observación que es necesario hacer tiene que ver con el conjunto $\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}$, que es un conjunto medible pues la función f es medible (ver la Proposición 3.2.4 del Volumen 1) y esto nos garantiza que tiene sentido estudiar la medida de este tipo de conjuntos. Una segunda observación es la siguiente:

Observación 1.1 La función de distribución, al estar definida por medio de una integral, nos da una información general sobre el tamaño de f pero no sobre su comportamiento en un punto dado (recuérdese, por ejemplo, que la medida de Lebesgue no carga los puntos). En particular, si $f = g$ en μ-casi todas partes, entonces por definición se tiene $d_f = d_g$.

Mostremos ahora un primer ejemplo de determinación de la función d_f. Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido y sea $f : X \longrightarrow [0, +\infty[$ una función medible:

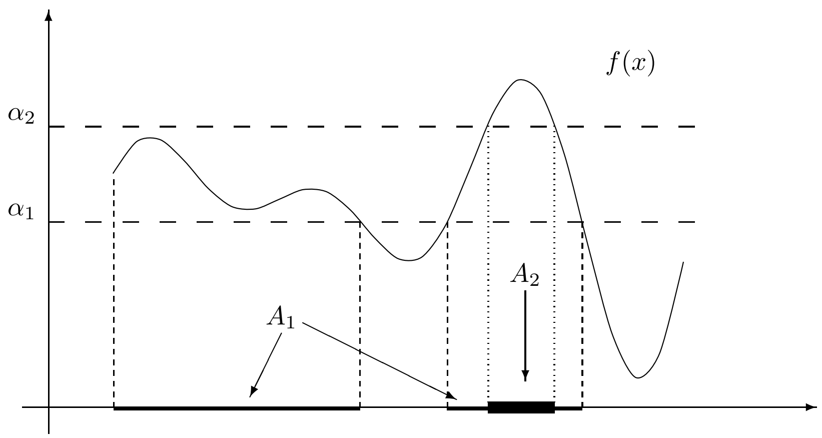

Figura 1.1: Función de distribución.

Como podemos ver en esta figura, si fijamos una altura α_1 dada, el conjunto $\{x \in X : |f(x)| > \alpha_1\}$ está determinado por el conjunto A_1 que contiene dos partes, mientras que para la altura α_2 se tiene $\{x \in X : |f(x)| > \alpha_2\} = A_2$, que se ha representado con una línea más gruesa. Si estudiamos cómo varía la medida de los conjuntos $\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}$ en función del parámetro α, lo que se obtiene es la función de distribución: de esta manera en este ejemplo se tiene $d_f(\alpha_1) = \mu(A_1)$ y $d_f(\alpha_2) = \mu(A_2)$.

Veamos un poco más en detalle la acción de la función de distribución d_f a través de un segundo ejemplo. Sobre el espacio medido $(\mathbb{R}, \mathcal{B}or(\mathbb{R}), dx)$ consideremos la función $f(x) = \sum_{k=1}^{5} c_k \mathbb{1}_{A_k}(x)$ representada en la Figura 1.2, en donde los números c_k son reales positivos y A_k son intervalos acotados de la recta real.

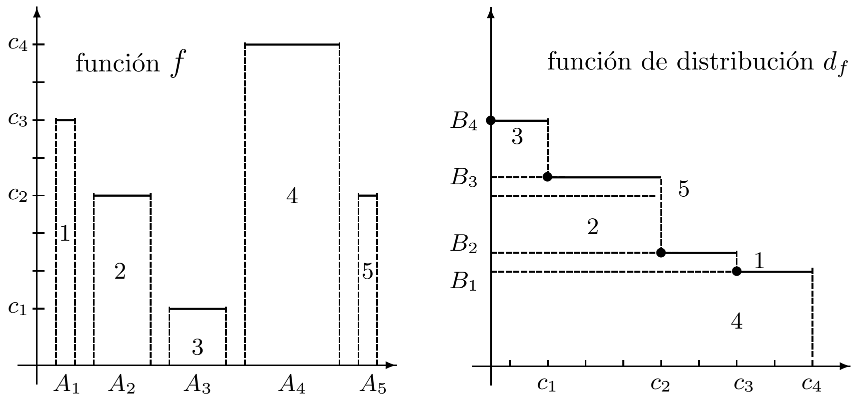

Figura 1.2: Función de distribución de una función simple.

Lo primero que podemos observar es que los posibles valores del parámetro α varían entre 0 y c_4, que es la altura máxima de la función, y por lo tanto se tiene $|\{x \in \mathbb{R} : |f(x)| > c_4\}| = 0$. Luego, notamos que el valor de la cantidad $|\{x \in \mathbb{R} : |f(x)| > \alpha\}|$ es constante en los intervalos del tipo $c_i < \alpha < c_{i+1}$, con $i = 1, \ldots, 3$. Estas dos observaciones y una aplicación directa de la fórmula (1.1) nos permite representar, en la parte de la derecha de la figura anterior, la función de distribución d_f en función de los valores de α y en donde los valores B_j en las ordenadas están dados por la expresión $B_j = \sum_{k=1}^{j} |A_k|$.

Podemos entonces ver que si consideramos el tamaño (en el sentido de *área* bajo la curva) de estas funciones, tenemos una identidad entre f y d_f. Es decir que, si partimos de una función f, el paso a la función de distribución *preserva* su tamaño y esto se puede ver claramente con este ejemplo muy particular en donde la función de distribución d_f ha reordenado y reorientado (pero sin modificarlos) los rectángulos $1, 2, 3, 4, 5$ que componen la función f de manera que el "área bajo la curva" de las funciones f y d_f es exactamente la misma. Demostraremos este hecho de forma más precisa y lo generalizaremos con la Proposición 1.1.2.

Es importante observar que si $(X, \mathscr{A}, \mu)$ es un espacio medido general y si $f \geq 0$ es una función medible, entonces la función de distribución d_f puede tomar valores en el intervalo $[0, +\infty]$, pero el hecho de que d_f pueda valer $+\infty$ puede causar problemas: en efecto, si consideramos por ejemplo $X = \mathbb{R}$ dotado de su estructura natural y si estudiamos la función $f(x) = \tan^2(x)$, tenemos $d_f(\alpha) = +\infty$ para todo $\alpha > 0$, lo que no proporciona ninguna información utilizable. Asimismo, si $f(x) = \sin^2(x)$, vemos que $d_f(\alpha) = +\infty$ si $0 < \alpha < 1$ y

$d_f(\alpha) = 0$ si $\alpha \geq 0$.

Esta observación nos lleva a considerar funciones medibles tales que su función de distribución d_f es finita en al menos un punto, lo cual supondremos implícitamente de ahora en adelante.

Detallemos ahora algunas características de esta función de distribución.

Proposición 1.1.1 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido y sean f y g dos funciones medibles definidas sobre X a valores en $\mathbb{K}$. Entonces, para todo $\alpha, \beta \geq 0$ tenemos los siguientes puntos:*

1) *se tiene $d_f = d_{|f|}$, además d_f es decreciente y continua por la derecha sobre $[0, +\infty[$,*
2) *si se tiene $|g(x)| \leq |f(x)|$ en μ-casi todas partes entonces $d_g(\alpha) \leq d_f(\alpha)$, para todo $\alpha \geq 0$,*
3) *para toda constante $\lambda \in \mathbb{K}^*$, se tiene $d_{\lambda f}(\alpha) = d_f(\alpha/|\lambda|)$, para todo $\alpha \geq 0$,*
4) *se tiene la desigualdad $d_{f+g}(\alpha + \beta) \leq d_f(\alpha) + d_g(\beta)$,*
5) *se tiene la desigualdad $d_{fg}(\alpha\beta) \leq d_f(\alpha) + d_g(\beta)$,*
6) *si se tiene el límite $|f(x)| \leq \liminf\limits_{n\to+\infty} |f_n(x)|$ en μ-casi todas partes entonces tenemos el límite*
$$d_f(\alpha) \leq \liminf_{n\to+\infty} d_{f_n}(\alpha).$$

Prueba.

1) La identidad $d_f = d_{|f|}$ se deduce directamente de la expresión (1.1) que define la función de distribución pues para construir esta función de distribución es necesario considerar el valor absoluto de la función f.

   Veamos ahora que la función de distribución es decreciente: si $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2$ son dos reales arbitrarios, notamos que siempre se tiene la inclusión de conjuntos $\{x \in X : |f(x)| > \alpha_2\} \subset \{x \in X : |f(x)| > \alpha_1\}$, de manera que al considerar la medida de estos conjuntos podemos escribir

   $$d_f(\alpha_2) = \mu\left(\{x \in X : |f(x)| > \alpha_2\}\right) \leq \mu\left(\{x \in X : |f(x)| > \alpha_1\}\right) = d_f(\alpha_1),$$

   de donde se obtiene que la función de distribución es decreciente. Para mostrar que la función d_f es continua por la derecha fijamos el conjunto $E_\alpha = \{x \in X : |f(x)| > \alpha\}$ y un real $\alpha_0 > 0$. Por las líneas anteriores vemos que los conjuntos E_α son crecientes si α decrece y por lo tanto podemos escribir

   $$E_{\alpha_0} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_{\alpha_0+1/n},$$

   de modo que por la propiedad de continuidad de las medidas[4] obtenemos

   $$d_f(\alpha_0 + 1/n) = \mu(E_{\alpha_0+1/n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mu(E_{\alpha_0}) = d_f(\alpha_0),$$

[4] Ver el Teorema 2.2.3 del Volumen 1.

lo que muestra que la función d_f es continua por la derecha.

2) Si $|g(x)| \leq |f(x)|$ en μ-casi todas partes, tenemos la inclusión de conjuntos para todo $\alpha \geq 0$

$$\{x \in X : |g(x)| > \alpha\} \subset \{x \in X : |f(x)| > \alpha\},$$

es decir, al considerar la medida de estos conjuntos obtenemos

$$\mu(\{x \in X : |g(x)| > \alpha\}) \leq \mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}),$$

de modo que $d_g(\alpha) \leq d_f(\alpha)$.

3) Aquí utilizamos directamente la definición de la función de distribución dada en la expresión (1.1)

$$\begin{aligned} d_{\lambda f}(\alpha) &= \mu\left(\{x \in X : |\lambda\, f(x)| > \alpha\}\right) = \mu\left(\{x \in X : |\lambda|\, |f(x)| > \alpha\}\right) \\ &= \mu\left(\{x \in X : |f(x)| > \alpha/|\lambda|\}\right) = d_f(\alpha/|\lambda|). \end{aligned}$$

4) Este punto se verifica considerando la siguiente inclusión de conjuntos:

$$\begin{aligned} \{x \in X : |f(x) + g(x)| > \alpha + \beta\} \quad \subset \quad & \{x \in X : |f(x)| > \alpha\} \\ & \cup \{x \in X : |g(x)| > \beta\}. \end{aligned}$$

De manera que, calculando la medida de estos conjuntos, se obtiene

$$\begin{aligned} \mu(\{x \in X : |f(x) + g(x)| > \alpha + \beta\}) \quad \leq \quad & \mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}) \\ & + \mu(\{x \in X : |g(x)| > \beta\}), \end{aligned}$$

es decir $d_{f+g}(\alpha + \beta) \leq d_f(\alpha) + d_g(\beta)$.

5) Este hecho se verifica de forma similar; en efecto, puesto que disponemos de la inclusión de conjuntos

$$\{x \in X : |fg(x)| > \alpha\beta\} \subset \{x \in X : |f(x)| > \alpha\} \cup \{x \in X : |g(x)| > \beta\},$$

se tiene sin dificultad que $d_{fg}(\alpha\beta) \leq d_f(\alpha) + d_g(\beta)$.

6) Para demostrar este último punto consideramos el conjunto $E_n = \{x \in X : |f_n(x)| > \alpha\}$. Puesto que se tiene

$$|f(x)| \leq \liminf_{n \to +\infty} |f_n(x)| = \sup_{m \in \mathbb{N}} \inf_{n > m} |f_n(x)|,$$

vemos que, para todo $x \in X$ tal que $|f(x)| > \alpha$ existe un entero m tal que para todo entero $n > m$ se tenga $|f_n(x)| > \alpha$. Es decir

$$E_\alpha \subset \bigcup_{m=1}^{+\infty} \bigcap_{n=m}^{+\infty} E_n,$$

y por, lo tanto, para todo $m > 1$ se tiene que

$$\mu\left(\bigcap_{n=m}^{+\infty} E_n\right) \leq \inf_{n>m} \mu(E_n) \leq \sup_{m \in \mathbb{N}} \inf_{n>m} \mu(E_n) = \liminf_{n \to +\infty} \mu(E_n).$$

Por la monotonía[5] de la medida μ y dado que $\left(\bigcap_{n=m}^{+\infty} E_n\right)_{m\geq 1}$ es una sucesión decreciente de conjuntos, obtenemos

$$\begin{aligned} d_f(\alpha) &= \mu(E_\alpha) \leq \mu\left(\bigcup_{m=1}^{+\infty}\bigcap_{n=m}^{+\infty} E_n\right) = \lim_{m\to+\infty} \mu\left(\bigcap_{n=m}^{+\infty} > E_n\right)\\ &\leq \liminf_{n\to+\infty} d_{f_n}(\alpha). \end{aligned}$$

Lo que termina la demostración de esta proposición. ■

Las propiedades expuestas en esta proposición son muy importantes pues determinarán, como vamos a ver dentro de poco, muchas de las características de los espacios de Lorentz y nos referiremos muy a menudo a ellas.

Podemos ahora enunciar el resultado a continuación que nos indica cómo reconstruir la funcional $\|\cdot\|_{L^p}$, y por lo tanto cómo caracterizar los espacios de Lebesgue L^p, a partir de las líneas de nivel determinadas por la función de distribución.

Proposición 1.1.2 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido, sea $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ una función medible y sea $0 < p < +\infty$ un parámetro real. Se tiene entonces la identidad*

$$\|f\|_{L^p} = p^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{+\infty} \alpha^{p-1} d_f(\alpha) d\alpha\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.2}$$

Prueba. Utilizando la expresión (1.1) que define la función de distribución escribimos

$$p\int_0^{+\infty} \alpha^{p-1} d_f(\alpha)d\alpha = p\int_0^{+\infty} \alpha^{p-1}\left(\int_X \mathbb{1}_{\{|f|>\alpha\}}(x)d\mu(x)\right)d\alpha,$$

y si aplicamos el teorema de Fubini en la última integral obtenemos

$$p\int_X\int_0^{+\infty} \alpha^{p-1}\mathbb{1}_{\{|f|>\alpha\}}(x)d\alpha\, d\mu(x) = p\int_X\int_0^{|f(x)|} \alpha^{p-1}d\alpha\, d\mu(x),$$

es decir, al integrar en la variable α se tiene $\displaystyle\int_X |f(x)|^p d\mu(x) = \|f\|_{L^p}^p$. ■

Este resultado nos proporciona una *nueva* forma de calcular la funcional $\|\cdot\|_{L^p}$ y disponemos, por el momento, de *dos* maneras distintas de calcular la cantidad $\|\cdot\|_{L^p}$ cuando $0 < p < +\infty$:

- usando directamente la definición $\|f\|_{L^p} = \left(\displaystyle\int_X |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}$,
- usando la identidad (1.2).

[5]Es decir si $A \subset B$, entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$.

Cada una de estas opciones tiene su utilidad, y siempre conviene disponer de la mayor cantidad de herramientas para describir un espacio funcional.

Volvamos ahora a la identidad (1.2). El caso $p = 1$ es muy interesante pues se escribe de la siguiente manera

$$\|f\|_{L^1} = \int_X |f(x)| d\mu(x) = \int_0^{+\infty} d_f(\alpha) d\alpha, \tag{1.3}$$

y cuando el conjunto X es el intervalo $[0, +\infty[$, esta identidad es la comprobación de que el "área debajo de la curva" es la *misma* para las funciones $|f|$ y su función de distribución d_f. Más generalmente, este hecho permite determinar el tamaño de una función, no solo integrando directamente sobre un espacio cualquiera X dotado de su estructura particular, sino que también es posible *transponer* esta información sobre el intervalo $[0, +\infty[$ dotado de su estructura natural: gracias a esta transformación y a la identidad (1.3), si estamos interesados en problemas de medibilidad "basta" estudiar lo que sucede sobre el conjunto $[0, +\infty[$ pues la función de distribución captura la información necesaria para tratar con éxito estas problemáticas.

A partir de esta observación tenemos el concepto a continuación que será de utilidad en lo que sigue.

Definición 1.1.2 (Funciones equidistribuidas) *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido, sean $f, g : X \longrightarrow \mathbb{K}$ dos funciones medibles. Diremos que f y g son* equidistribuidas *si se tiene la identidad $d_f(\alpha) = d_g(\alpha)$, para todo $\alpha \geq 0$.*

Recordemos que por la definición de la función de distribución, se tiene esta identidad en μ-casi todas partes. Además, para dos funciones f y g equidistribuidas se tiene por la fórmula (1.2) la identidad $\|f\|_{L^p} = \|g\|_{L^p}$ para todo $0 < p < +\infty$.

Notemos aquí que dos funciones equidistribuidas pueden ser muy diferentes: si consideramos el espacio $X = [0, +\infty[$, con su estructura natural, y las funciones $f = \mathbb{1}_{[0,1]}$ y $g = \mathbb{1}_{[3,4]}$, se tiene sin ningún problema que $d_f = d_g = \mathbb{1}_{[0,1[}$.

1.1.2. Definición de los espacios $L^{p,\infty}$

Una vez que disponemos de estas propiedades de las función de distribución, podemos presentar una primera definición de los espacios de Lorentz $L^{p,\infty}$ y veremos aquí algunos ejemplos de funciones que pertenecen a estos espacios.

Definición 1.1.3 (Espacios de Lorentz $L^{p,\infty}$) *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido.*

1) Sea $0 < p < +\infty$ un número real, definimos el espacio de Lorentz $L^{p,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ como el conjunto de funciones medibles $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ tales que la cantidad siguiente es finita

$$\|f\|_{L^{p,\infty}} = \sup_{\alpha > 0} \left\{ \alpha \, d_f^{\frac{1}{p}}(\alpha) \right\}. \tag{1.4}$$

2) El espacio $L^{\infty,\infty}(X,\mathscr{A},\mu,\mathbb{K})$ es por definición el espacio $L^\infty(X,\mathscr{A},\mu,\mathbb{K})$.

Como las propiedades más elementales del espacio $L^{\infty,\infty} = L^\infty$ han sido ya estudiadas en los volúmenes anteriores, nos concentramos aquí en los espacios $L^{p,\infty}$ con $0 < p < +\infty$.

Recordemos aquí que las dobles barras $\|\cdot\|$ sirven por lo general para designar una *norma* y en la definición anterior, hacemos un abuso de notación pues la cantidad $\|\cdot\|_{L^{p,\infty}}$ no es necesariamente una norma como tendremos la oportunidad de verlo más adelante.

Antes de pasar al estudio de las diferentes características de estos espacios enunciamos una propiedad que se deduce inmediatamente de la fórmula (1.4) y que es de gran importancia: para todo $\alpha > 0$ se tiene siempre la mayoración

$$\|f\|_{L^{p,\infty}} \geq \alpha\, d_f^{\frac{1}{p}}(\alpha), \tag{1.5}$$

lo cual puede reescribirse de varias manera distintas como por ejemplo

$$\|f\|_{L^{p,\infty}}\alpha^{-1} \geq d_f^{\frac{1}{p}}(\alpha) \quad \text{o, de forma equivalente } \|f\|^p_{L^{p,\infty}}\alpha^{-p} \geq d_f(\alpha).$$

Conviene tener en mente estas expresiones pues son muy útiles en la práctica.

Podemos ver ahora que por definición de la función de distribución (ver también la Observación 1.1), si se tiene $f = g$ en μ-casi todas partes, entonces $d_f = d_g$ y de esta manera los espacios $L^{p,\infty}$ que acabamos de definir deben ser considerados como espacios de *clases de funciones*, de la misma manera que se lo ha hecho para los espacios de Lebesgue L^p (ver el Volumen 1). Dicho de otra manera, dos funciones que pertenecen al espacio de Lorentz $L^{p,\infty}$ serán consideradas iguales, si son iguales en μ-casi todas partes.

Una vez que hemos aclarado estos puntos, demos unos ejemplos de funciones que pertenecen a los espacios de Lorentz $L^{p,\infty}$ con $0 < p < +\infty$.

(i) Sobre el espacio medido $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx)$ consideremos la función indicatriz $f = \mathbb{1}_A$, en donde $A \subset \mathbb{R}^n$ es un subconjunto de medida finita. El lector verificará que si $0 \leq \alpha < 1$, entonces se tiene $d_f(\alpha) = |\{x \in \mathbb{R}^n : |\mathbb{1}_A(x)| > \alpha\}| = |A|$, mientras que si $\alpha \geq 1$, se tiene en cambio que $d_f(\alpha) = 0$. A partir de estas observaciones, si calculamos la cantidad $\|f\|_{L^{p,\infty}} = \sup\limits_{\alpha>0}\left\{\alpha\, d_f^{\frac{1}{p}}(\alpha)\right\}$ con $0 < p < +\infty$, obtenemos $\|f\|_{L^{p,\infty}} = |A|^{\frac{1}{p}}$, de donde se tiene que $f = \mathbb{1}_A \in L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{R})$. El lector notará que para las funciones indicatrices de conjuntos acotados las cantidades $\|\cdot\|_{L^{p,\infty}}$ y $\|\cdot\|_{L^p}$ nos proporcionan la misma información, es decir
$$\|\mathbb{1}_A\|_{L^{p,\infty}} = \|\mathbb{1}_A\|_{L^p} = |A|^{\frac{1}{p}},$$
sin embargo en el ejemplo siguiente mostraremos las diferencias entre estos espacios de funciones.

(ii) Veamos un caso más particular de funciones que pertenecen a los espacios de Lorentz $L^{p,\infty}$ con $0 < p < +\infty$: sobre el espacio $X = \mathbb{R}^n$ dotado de su estructura natural consideremos la función $f : x \longmapsto |x|^{-\frac{n}{p}}$. Si calculamos la cantidad $\|f\|_{L^{p,\infty}}$, utilizando las propiedades de la medida de Lebesgue tenemos:

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^{p,\infty}} &= \sup_{\alpha>0}\left\{\alpha\, d_f^{\frac{1}{p}}(\alpha)\right\} = \sup_{\alpha>0}\left\{\alpha\times\left|\{x\in\mathbb{R}^n : |x|^{-\frac{n}{p}} > \alpha\}\right|^{\frac{1}{p}}\right\}\\
&= \sup_{\alpha>0}\left\{\alpha\times\left|\{x\in\mathbb{R}^n : |x| < \alpha^{-\frac{p}{n}}\}\right|^{\frac{1}{p}}\right\}\\
&= \sup_{\alpha>0}\left\{\alpha\times\left|B(0,\alpha^{-\frac{p}{n}})\right|^{\frac{1}{p}}\right\} \qquad (1.6)\\
&= \sup_{\alpha>0}\left\{\alpha\times\left(\alpha^{-p}\left|B(0,1)\right|\right)^{\frac{1}{p}}\right\} = \sup_{\alpha>0}\left\{\alpha\times\alpha^{-1}\left|B(0,1)\right|^{\frac{1}{p}}\right\}\\
&= \left|B(0,1)\right|^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty,
\end{aligned}$$

y hemos verificado[6] que se tiene $\|f\|_{L^{p,\infty}} = |B(0,1)|^{\frac{1}{p}} < +\infty$ de manera que la función $f(x) = |x|^{-\frac{n}{p}}$ pertenece como anunciado al espacio de Lorentz $L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{R})$.

Este último ejemplo sirve para mostrar que si $p \neq q$, entonces los espacios de Lorentz $L^{p,\infty}$ y $L^{q,\infty}$ son distintos. En efecto, sobre $\mathbb{R}^n$ si consideramos $f = |x|^{-\frac{n}{p}}$, entonces por los cálculos anteriores tenemos $f \in L^{p,\infty}$ pero esta función no pertenece al espacio de Lorentz $L^{q,\infty}$. Sin embargo, el punto más relevante de este ejemplo está dado en la observación siguiente.

Observación 1.2 Para todo $0 < p < +\infty$, tenemos que las funciones del tipo $f(x) = |x|^{-\frac{n}{p}}$ pertenecen al espacio $L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{R})$ y estas funciones son ejemplos típicos de elementos de los espacios de Lorentz $L^{p,\infty}$ que *nunca* pertenecen a los espacios de Lebesgue L^p.

1.1.3. Primeras propiedades de los espacios $L^{p,\infty}$

Vamos a presentar aquí seis propiedades elementales de estos espacios: unas propiedades estructurales (veremos que son espacios vectoriales cuasi-normados), unas propiedades de posicionamiento (compararemos los espacios de Lorentz con los espacios de Lebesgue), introduciremos una desigualdad de interpolación, generalizaremos las desigualdades de Hölder y veremos una caracterización equivalente de estos espacios de Lorentz. Finalmente definiremos el producto de convolución sobre estos espacios.

A) Propiedades estructurales

En esta sección empezamos un primer estudio de las diferentes estructuras topológicas existentes sobre los espacios de Lorentz $L^{p,\infty}$. Indiquemos que con

[6]Recordar que la medida de la bola unidad $\left|B(0,1)\right|$ ha sido calculada en la Sección 3.4.4 del Volumen 1.

la Definición 1.1.3 únicamente podremos dar un estudio *general* (útil pedagógicamente, pero lastimosamente superficial) de las propiedades de estos espacios y será necesario esperar a la Sección 1.3 en donde se introducirán otros conceptos para poder estudiar más en detalle estos espacios.

El resultado a continuación presenta un primer indicio sobre qué tipo de estructura se dispone en los espacios de Lorentz $L^{p,\infty}$.

Proposición 1.1.3 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido y sea $0 < p < +\infty$ un parámetro real.*

1) Los espacios de Lorentz $L^{p,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ son subespacios vectoriales del conjunto de funciones medibles.

2) Además se tiene la implicación $\|f\|_{L^{p,\infty}} = 0 \Longrightarrow f = 0$ en μ-casi todas partes

Prueba.

1) Para mostrar que el espacio de Lorentz $L^{p,\infty}$ es un subespacio vectorial de las funciones medibles debemos verificar los dos puntos siguientes:
   - si $\lambda \in \mathbb{K}^*$ y si $f \in L^{p,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$, entonces $\lambda f \in L^{p,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$,
   - si $f, g \in L^{p,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ entonces $f + g \in L^{p,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$.

   Fijemos para empezar una constante $\lambda \in \mathbb{K}^*$, por el punto 3) de la Proposición 1.1.1 y con un pequeño cambio de variable podemos escribir

$$\begin{aligned}\|\lambda f\|_{L^{p,\infty}} &= \sup_{\alpha>0}\left\{\alpha\, d_{\lambda f}^{\frac{1}{p}}(\alpha)\right\} = \sup_{\alpha>0}\left\{\alpha\, d_f^{\frac{1}{p}}(\alpha/|\lambda|)\right\}\\ &= \sup_{\beta>0}\left\{|\lambda|\beta\, d_f^{\frac{1}{p}}(\beta)\right\} = |\lambda|\,\|f\|_{L^{p,\infty}}, \qquad (1.7)\end{aligned}$$

   de donde se deduce que $\lambda f \in L^{p,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$.

   Sean ahora f y g dos funciones pertenecientes al espacio $L^{p,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$, veamos que la función suma verifica $f + g \in L^{p,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$. En efecto, por el punto 4) de la Proposición 1.1.1 se tiene la desigualdad $d_{f+g}(\alpha) \leq d_f(\alpha/2) + d_g(\alpha/2)$, de manera que tenemos

$$d_{f+g}^{\frac{1}{p}}(\alpha) \leq \Big(d_f(\alpha/2) + d_g(\alpha/2)\Big)^{\frac{1}{p}},$$

   entonces, si $0 < p < 1$, se tiene

$$d_{f+g}^{\frac{1}{p}}(\alpha) \leq 2^{\frac{1}{p}-1}\Big(d_f^{\frac{1}{p}}(\alpha/2) + d_g^{\frac{1}{p}}(\alpha/2)\Big),$$

   mientras que si $1 \leq p < +\infty$, se obtiene la desigualdad[7]

$$d_{f+g}^{\frac{1}{p}}(\alpha) \leq d_f^{\frac{1}{p}}(\alpha/2) + d_g^{\frac{1}{p}}(\alpha/2),$$

[7] Recordar que si $a, b > 0$ entonces $(a+b)^\sigma \leq a^\sigma + b^\sigma$ si $0 < \sigma < 1$ y $(a+b)^\sigma \leq 2^{\sigma-1}(a^\sigma + b^\sigma)$ si $1 < \sigma < +\infty$. Ver el Lema 4.2.1 del Volumen 1 para una demostración de estas desigualdades.

y entonces podemos escribir, en función de los valores de p e introduciendo el factor $\alpha/2$, las desigualdades siguientes

$$\begin{aligned} \alpha\, d_{f+g}^{\frac{1}{p}}(\alpha) &\leq 2^{\frac{1}{p}} \left((\alpha/2)\, d_f^{\frac{1}{p}}(\alpha/2) + (\alpha/2)\, d_g^{\frac{1}{p}}(\alpha/2) \right), \quad \text{si } 0 < p < 1, \\ \alpha\, d_{f+g}^{\frac{1}{p}}(\alpha) &\leq 2 \left((\alpha/2)\, d_f^{\frac{1}{p}}(\alpha/2) + (\alpha/2)\, d_g^{\frac{1}{p}}(\alpha/2) \right), \quad \text{si } 1 \leq p < +\infty. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Al tomar el supremo sobre el conjunto $\alpha > 0$ tenemos entonces

$$\begin{aligned} \sup_{\alpha>0} \left\{ \alpha\, d_{f+g}^{\frac{1}{p}}(\alpha) \right\} \quad &\leq \quad \text{máx}(2^{\frac{1}{p}}, 2) \left(\sup_{\alpha>0} \left\{ (\alpha/2)\, d_f^{\frac{1}{p}}(\alpha/2) \right\} \right. \\ & \qquad \left. + \sup_{\alpha>0} \left\{ (\alpha/2)\, d_g^{\frac{1}{p}}(\alpha/2) \right\} \right), \end{aligned}$$

lo cual nos permite finalmente escribir

$$\|f+g\|_{L^{p,\infty}} \leq \text{máx}(2^{\frac{1}{p}}, 2) \left(\|f\|_{L^{p,\infty}} + \|g\|_{L^{p,\infty}} \right), \tag{1.9}$$

lo que muestra que $f + g \in L^{p,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$.

Con estos dos puntos hemos verificado que el espacio $L^{p,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ es un subespacio vectorial del conjunto de funciones medibles.

2) Si se tiene $\|f\|_{L^{p,\infty}} = 0$, entonces por definición $\sup\limits_{\alpha>0} \left\{ \alpha\, d_f^{\frac{1}{p}}(\alpha) \right\} = 0$, lo que implica que $d_f(\alpha > 0) = 0$ para todo $\alpha > 0$, es decir que el conjunto $\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}$ es de μ-medida nula para todo $\alpha > 0$, de donde se deduce sin problema que la función f es nula en μ-casi todas partes. ■

Esta estructura de espacio vectorial es muy importante pues nos garantiza que los espacios de Lorentz $L^{p,\infty}$ son estables al realizar las operaciones de base como la suma de funciones y la multiplicación por un escalar. Sin embargo, desde un punto de vista de la estructura topológica, esta información deja mucho que desear: a la luz de los resultados presentados en el Volumen 1 y en el Volumen 2, desearíamos obtener una estructura de espacio de Banach reflexivo para estos espacios, que era la estructura que disponía de mayor cantidad de propiedades. Indiquemos desde ya que esto no será posible para todos los valores de $0 < p < +\infty$, como tendremos la oportunidad de verlo un poco más adelante (recordamos que en los espacios de Lebesgue se tiene esta estructura de espacio de Banach reflexivo únicamente cuando $1 < p < +\infty$).

Observación 1.3 Las propiedades (1.7) y (1.9) que acabamos de demostrar sobre la funcional $\|\cdot\|_{L^{p,\infty}}$ hacen de esta cantidad un operador cuasi-lineal[8], pero *no* se dispone de la desigualdad triangular.

En efecto, tenemos el contraejemplo siguiente: consideramos sobre el conjunto $X =]0,1[$ las funciones $f(x) = x^{-\frac{1}{p}} \mathbb{1}_{]0,1[}(x)$ y $g(x) = (1-x)^{-\frac{1}{p}} \mathbb{1}_{]0,1[}(x)$ con

[8]Ver la Definición 1.1.4 del Volumen 2.

$0 < p < +\infty$. Siguiendo los cálculos realizados en la expresión (1.6) obtenemos directamente

$$\|f\|_{L^{p,\infty}} = \|g\|_{L^{p,\infty}} = 1.$$

Tenemos ahora $\|f+g\|_{L^{p,\infty}} = \sup\limits_{\alpha>0}\left\{\alpha \times \big|\{x \in]0,1[: |f(x)+g(x)| > \alpha\}\big|^{\frac{1}{p}}\right\}$ por definición, y vemos sin mayor problema que el valor maximal posible de la cantidad $\big|\{x \in]0,1[: |f(x)+g(x)| > \alpha\}\big|$ es igual a 1 (que corresponde a todo el conjunto $X =]0,1[$), y se tiene esta situación cuando $0 \leq \alpha \leq 2^{1+\frac{1}{p}}$, siendo este último valor el mínimo sobre $]0,1[$ de la función $f+g$. Para este valor particular de $\alpha = 2^{1+\frac{1}{p}}$ podemos entonces escribir

$$\alpha \times \big|\{x \in]0,1[: |f(x)+g(x)| > \alpha\}\big|^{\frac{1}{p}} = 2^{1+\frac{1}{p}},$$

y usamos ahora la desigualdad (1.5) para obtener la mayoración

$$\|f+g\|_{L^{p,\infty}} \geq 2^{1+\frac{1}{p}},$$

de esta manera podemos ver que *no se cumple* la desigualdad triangular pues se tiene, para todo $0 < p < +\infty$ la mayoración

$$\|f+g\|_{L^{p,\infty}} \geq 2^{1+\frac{1}{p}} > 2 = \|f\|_{L^{p,\infty}} + \|g\|_{L^{p,\infty}}.$$

Insistamos en el hecho de que la cantidad $\|\cdot\|_{L^{p,\infty}}$ no sea una norma, no significa que los espacios de Lorentz $L^{p,\infty}$ no sean espacios de Banach: veremos en la Sección 1.3 otras funcionales equivalentes que *si* son normas para ciertos valores del parámetro p.

¿Pero por qué utilizar la Definición 1.1.3 y la funcional $\|\cdot\|_{L^{p,\infty}}$ para estudiar los espacios de Lorentz $L^{p,\infty}$, si existen funcionales que contienen mayores propiedades estructurales? La razón principal de presentar estos espacios utilizando la función de distribución radica en el hecho de que esta función de distribución es muy fácil y cómoda de utilizar (es la funcional que requiere el menor número de manipulaciones sobre las funciones consideradas) y podremos evidenciar muy claramente esta propiedad en los capítulos siguientes.

Dado entonces que la funcional $\|\cdot\|_{L^{p,\infty}}$ es suficiente para caracterizar y definir los espacios de Lorentz, es entonces necesario detallar algunas de sus propiedades y para ello necesitamos introducir la siguiente noción.

Definición 1.1.4 (cuasi-norma) *Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial topológico. Diremos que una aplicación $\|\cdot\|_E : E \longrightarrow [0,+\infty[$ es una* cuasi-norma[9] *si verifica los siguientes puntos*

1) para todo $x \in E$: $\|x\|_E = 0 \iff x = 0$,

2) para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ y todo $x \in E$: $\|\lambda x\|_E = |\lambda|\|x\|_E$,

[9] Conviene insistir en la diferencia existente entre una *semi*-norma, en donde no se tiene la propiedad de separación $\|x\|_E = 0 \iff x = 0$, y una *cuasi*-norma, en donde no se tiene la desigualdad triangular.

3) existe una constante $C \geq 1$ tal que para todo $x, y \in E$:

$$\|x + y\|_E \leq C(\|x\|_E + \|y\|_E).$$

Al espacio $(E, \|\cdot\|_E)$ se denominará espacio cuasi-normado*.*

Tal como lo hemos indicado al final de la Definición 1.1.3, hay un abuso de notación en la definición anterior: la aplicación $\|\cdot\|_E$ no es una *norma* pues no verifica la desigualdad triangular. Sin embargo, por tradición se mantiene esta notación en este caso y veremos un poco más adelante cuándo, y sobre todo cómo, es posible definir una verdadera norma sobre los espacios de Lorentz.

La topología de un espacio cuasi-normado $(E, \|\cdot\|_E)$ se determina de manera natural considerando las cuasi-bolas abiertas $B(x, r) = \{y \in E : \|x - y\|_E < r\}$. Un estudio general de los espacios cuasi-normados exigiría demasiado espacio que no disponemos aquí, de manera que solo expondremos algunas propiedades elementales y para empezar fijamos algunas notaciones en total analogía con el marco de los espacios normados.

Definición 1.1.5 *Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial cuasi-normado y sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de E. Diremos que la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$* converge en el sentido de la cuasi-norma $\|\cdot\|_E$ *hacia un punto $x \in E$ si*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})[\forall n \geq N \Longrightarrow \|x_n - x\|_E < \varepsilon],$$

lo que notaremos

$$\lim_{n \to +\infty} \|x_n - x\|_E = 0.$$

Diremos además que una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy *en el sentido de la cuasi-norma $\|\cdot\|_E$ si*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n, m \geq N) \quad [\|x_n - x_m\|_E < \varepsilon].$$

Una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada *en el espacio cuasi-normado $(E, \|\cdot\|_E)$ si*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\|_E < +\infty.$$

Finalmente, diremos que el espacio vectorial cuasi-normado $(E, \|\cdot\|_E)$ es completo *si toda sucesión de Cauchy es convergente y hablaremos entonces de espacio de* cuasi-Banach*.*

Proposición 1.1.4 *Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial cuasi-normado. Entonces toda sucesión convergente es de Cauchy y toda sucesión de Cauchy es acotada. Además si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy que admite una subsucesión $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ convergente hacia un punto $x \in E$, entonces $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge hacia x.*

Prueba. Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de converge hacia un punto $x \in E$. Tenemos entonces

$$\|x_n - x_m\|_E \leq C(\|x_n - x\|_E + \|x - x_m\|_E),$$

lo que implica que toda sucesión convergente es de Cauchy. Verifiquemos ahora que toda sucesión de Cauchy es acotada: existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m \geq N$ se tiene $\|x_n - x_m\|_E \leq 1$ y entonces para todo $m \geq N$ tenemos la mayoración $\|x_m\|_E \leq C(1 + \|x_N\|_E)$, lo que nos permite escribir

$$\|x_j\|_E \underset{j\in\mathbb{N}}{\leq} \text{máx}(\|x_0\|_E, \ldots, \|x_{N-1}\|_E, C(1 + \|x_N\|_E)),$$

de donde se deduce que la sucesión de Cauchy es acotada. Finalmente, si $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión que es convergente hacia un punto $x \in E$, entonces

$$\|x_n - x\|_E \leq C(\|x_n - x_{\varphi(n)}\|_E + \|x_{\varphi(n)} - x\|_E),$$

pero como la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy y como la subsucesión $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge hacia x, se obtiene entonces la convergencia de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hacia el punto x. ■

Dejamos de lado por un momento a los espacios cuasi-normados pues necesitamos establecer un resultado que hace intervenir la convergencia en μ-medida[10]. Recordemos que sobre un espacio medido $(X, \mathscr{A}, \mu)$, una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones μ-medibles a valores en $\mathbb{K}$, es de Cauchy con respecto a la convergencia en μ-medida si para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m \geq N$ se tiene $\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| > \varepsilon\}) < \varepsilon$.

El resultado que necesitamos es el siguiente

Proposición 1.1.5 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones μ-medibles a valores en $\mathbb{K}$ que son de Cauchy con respecto a la convergencia en μ-medida. Entonces existe una subsucesión de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge en μ-casi todas partes hacia una función medible que notaremos f.*

Prueba. Partimos de una sucesión de Cauchy en μ-medida $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y para todo $j \geq 1$ consideramos una sucesión de enteros n_j tal que se tenga

$$\mu(\{x \in X : |f_{n_j}(x) - f_{n_{j+1}}(x)| > 2^{-j}\}) < 2^{-j},$$

y tal que esta sucesión sea creciente, es decir $n_1 < n_2 < \cdots < n_j < n_{j+1} < \cdots$. Si consideramos el conjunto $A_j = \{x \in X : |f_{n_j}(x) - f_{n_{j+1}}(x)| > 2^{-j}\}$, tenemos entonces

$$\mu\left(\bigcup_{j=m}^{+\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=m}^{+\infty} \mu(A_j) \leq \sum_{j=m}^{+\infty} 2^{-j} = 2^{1-m},$$

para todo m= $1, 2, 3, \ldots$, de donde se obtiene $\mu\left(\bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j\right) \leq 1$, y tenemos entonces

$$\mu\left(\bigcap_{m=1}^{+\infty}\bigcup_{j=m}^{+\infty} A_j\right) = 0.$$

[10] Ver la Definición 3.3.4 del Volumen 1.

De esta manera, para $x \notin \bigcup_{j=m}^{+\infty} A_j$ y para todo i, k suficientemente grandes tales que $i \geq k \geq j_0 \geq m$, se tiene

$$|f_{n_i}(x) - f_{n_k}(x)| \leq \sum_{l=k}^{i-1} |f_{n_l}(x) - f_{n_{l+1}}(x)| \leq \sum_{l=k}^{i-1} 2^{-l} \leq 2^{1-k} \leq 2^{1-j_0},$$

esto implica que la sucesión puntual $(f_{n_i}(x))_{i\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathbb{K}$ para todo $x \notin \bigcup_{j=m}^{+\infty} A_j$, y por lo tanto es una sucesión que converge para tales puntos x. Podemos entonces definir una función por medio de la expresión

$$f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{j\to+\infty} f_{n_j}(x) & \text{si } x \notin \bigcap\limits_{m=1}^{+\infty} \bigcup\limits_{j=m}^{+\infty} A_j, \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Obtenemos entonces que la sucesión de funciones f_{n_j} tiende en μ-casi todas partes hacia la función f que es medible por el criterio de medibilidad de la Proposición 3.2.3 del Volumen 1. ■

Con estos preliminares, tenemos ahora el resultado más importante de esta subsección que nos proporciona un poco más de información sobre la estructura de los espacios $L^{p,\infty}$.

Teorema 1.1.1 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido, sea $0 < p < +\infty$ un parámetro real y consideremos los espacios de Lorentz $L^{p,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ dados en la Definición 1.1.3. La funcional $\|\cdot\|_{L^{p,\infty}}$ dada en la expresión (1.4) es una cuasi-norma sobre estos espacios y además los espacios $(L^{p,\infty}, \|\cdot\|_{L^{p,\infty}})$ son espacios cuasi-normados completos.*

Demostración. El hecho de que para todo $0 < p < +\infty$ la funcional $\|\cdot\|_{L^{p,\infty}}$ define una cuasi-norma sobre el espacio $L^{p,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ se deduce directamente de la Proposición 1.1.3 y de las fórmulas (1.7) y (1.9). De manera que lo único que debemos verificar es que el espacio $(L^{p,\infty}, \|\cdot\|_{L^{p,\infty}})$ es completo, en el sentido de que toda sucesión de Cauchy es convergente (con respecto a la cuasi-norma $\|\cdot\|_{L^{p,\infty}}$). Sea pues $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy de funciones que pertenecen al espacio $L^{p,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$, entonces se tiene

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N_k \in \mathbb{N})(\forall n, m > N_k) : \|f_n - f_m\|_{L^{p,\infty}} < \varepsilon^{1+\frac{1}{p}}.$$

Utilizando la mayoración (1.5), tenemos para todo $\alpha > 0$

$$\alpha \times \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| > \alpha\})^{\frac{1}{p}} \leq \|f_n - f_m\|_{L^{p,\infty}} < \varepsilon^{1+\frac{1}{p}},$$

de manera que si tomamos $\alpha = \varepsilon$ podemos escribir

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| > \varepsilon\}) < \varepsilon, \tag{1.10}$$

es decir que la sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en medida y podemos aplicar la Proposición 1.1.5 para obtener que existe una subsucesión $(f_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$

que converge hacia una función medible f. Fijemos entonces un $k_0 \geq 1$ y consideremos la cantidad

$$|f_{n_{k_0}} - f| = \lim_{j\to+\infty} |f_{n_{k_0}} - f_{n_j}|,$$

aplicamos la propiedad 6) de la Proposición 1.1.1 para obtener

$$d_{|f_{n_{k_0}}-f|}(\alpha) \leq \liminf_{j\to+\infty} d_{|f_{n_{k_0}}-f_{n_j}|}(\alpha),$$

y a partir de esta desigualdad reconstruimos la funcional $\|\cdot\|_{L^{p,\infty}}$ para obtener

$$\|f_{n_{k_0}} - f\|_{L^{p,\infty}} \leq \liminf_{j\to+\infty} \|f_{n_{k_0}} - f_{n_j}\|_{L^{p,\infty}}.$$

Hacemos ahora tender $k_0 \to +\infty$ y usamos el hecho de que la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en el espacio $L^{p,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ de manera que la parte derecha de la estimación anterior tiende hacia cero. Obtenemos de esta manera una subsucesión $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge hacia una función $f \in L^{p,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$. Como este espacio de Lorentz es cuasi-normado, basta ahora aplicar la Proposición 1.1.4 para obtener que toda la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge hacia el mismo límite: los espacios de Lorentz $L^{p,\infty}$ con $0 < p < +\infty$ son entonces espacios cuasi-normados completos. ■

En el estado actual de nuestra exposición, este es el resultado estructural más general que se puede obtener. Como hemos anunciado en varias ocasiones, veremos más tarde para qué valores de p es posible dotar a los espacios de Lorentz de estructuras más robustas como las de espacios métricos y de espacios normados.

Antes de terminar esta sección, conviene observar que en la demostración del teorema anterior hemos obtenido el resultado siguiente.

Corolario 1.1.1 *Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente que pertenece al espacio de Lorentz $L^{p,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ con $0 < p < +\infty$, entonces la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en μ-medida. Dicho de otra manera, la convergencia en $L^{p,\infty}$ implica la convergencia en μ-medida.*

Prueba. Si $f_n \longrightarrow f$ en $L^{p,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$, tenemos que para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces

$$\|f_n - f\|_{L^{p,\infty}} = \sup_{\alpha>0} \left\{\alpha \times \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \alpha\})^{\frac{1}{p}}\right\} < \varepsilon^{1+\frac{1}{p}}.$$

De la misma manera que en la expresión (1.10) anterior, basta fijar $\alpha = \varepsilon$ para obtener $\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) < \varepsilon$, de donde se deduce la convergencia en μ-medida. ■

Con estos resultados tenemos un primer vistazo de las propiedades de los espacios de Lorentz $L^{p,\infty}$ y ahora es necesario comparar estos espacios de funciones con los espacios de Lebesgue L^p.

B) Comparación entre espacios de Lebesgue L^p y de Lorentz $L^{p,\infty}$

Adelantándonos un poco a la Sección 1.2.3, en donde estudiaremos en detalle las relaciones entre los espacios de Lorentz generales, podemos ver desde ya que los espacios de Lorentz $L^{p,\infty}$ son una generalización de los espacios de Lebesgue L^p como lo muestra el resultado a continuación.

Proposición 1.1.6 (Inclusión Lebesgue-Lorentz) *Sea $0 < p < +\infty$ y sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido. Entonces tenemos la inclusión:*

$$L^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K}) \subsetneq L^{p,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K}).$$

Nótese además que esta inclusión es estricta. Más precisamente se tiene la estimación siguiente para toda función $f \in L^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$:

$$\|f\|_{L^{p,\infty}} \leq \|f\|_{L^p}. \tag{1.11}$$

Prueba. Vamos primero a establecer la desigualdad (1.11) para posteriormente verificar que la inclusión es estricta. Sea pues $\alpha > 0$ un número real, entonces escribimos

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^p}^p &= \int_X |f(x)|^p d\mu(x) = \int_{\{|f|>\alpha\}} |f(x)|^p d\mu(x) + \int_{\{|f|\leq\alpha\}} |f(x)|^p d\mu(x) \\ &\geq \int_{\{|f|>\alpha\}} |f(x)|^p d\mu(x). \end{aligned}$$

Dado que estamos integrando sobre el conjunto $\{x \in X : |f| > \alpha\}$ tenemos

$$\int_{\{|f|>\alpha\}} |f(x)|^p d\mu(x) \geq \alpha^p \int_{\{|f|>\alpha\}} d\mu(x) = \alpha^p d_f(\alpha).$$

Es decir que para todo $\alpha > 0$ se tiene la estimación uniforme $\|f\|_{L^p} \geq \alpha d_f^{\frac{1}{p}}(\alpha)$, y podemos escribir $\|f\|_{L^p} \geq \sup\limits_{\alpha>0} \left\{\alpha\ d_f^{\frac{1}{p}}(\alpha)\right\} = \|f\|_{L^{p,\infty}}$.

Para mostrar que la inclusión es estricta, basta exhibir una función que pertenece al espacio de Lorentz $L^{p,\infty}$ pero que no pertenece al espacio de Lebesgue L^p con $0 < p < +\infty$. Por simplicidad, consideramos el espacio medido $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx)$, sabemos entonces por la Observación 1.2 que las funciones de tipo $f(x) = |x|^{-\frac{n}{p}}$ pertenecen a los espacios de Lorentz $L^{p,\infty}$ para todo $0 < p < +\infty$ pero que nunca pertenecen a los espacios de Lebesgue L^p. ■

Esta proposición nos muestra, tal como lo habíamos anunciado, que los espacios de Lorentz $L^{p,\infty}$ son efectivamente una generalización de los espacios de Lebesgue en el sentido que contienen muchísimas más funciones que los espacios L^p. Pero el lector debe estar muy consciente que no se busca la generalización por el gusto de lo abstracto, sino porque existe una *necesidad* importante relacionada con los espacios de Lorentz $L^{p,\infty}$ que los espacios de Lebesgue no pueden resolver. Estos temas serán tratados con mayor detalle en los capítulos siguientes.

En la demostración de la Proposición 1.1.6 hemos redemostrado la desigualdad de Tchebychev[11], que es una herramienta fundamental cuando se trabaja en los espacios de Lorentz y que conviene tenerla siempre en mente:

Proposición 1.1.7 (Desigualdad de Tchebychev) *Sea $0 < p < +\infty$ y sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido. Si $f \in L^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$, entonces para todo $\alpha > 0$ tenemos la desigualdad*

$$d_f(\alpha) = \mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}) \leq \alpha^{-p} \|f\|_{L^p}^p.$$

Tenemos pues a partir de estos resultados y de la mayoración (1.5), la cadena de estimaciones siguiente

$$\alpha \, d_f^{\frac{1}{p}}(\alpha) \leq \|f\|_{L^{p,\infty}} \leq \|f\|_{L^p},$$

lo que muestra que si bien la desigualdad de Tchebychev es de gran utilidad, no es una estimación muy precisa.

Si los espacios de Lorentz $L^{p,\infty}$ contienen los espacios de Lebesgue L^p, y si se tiene la desigualdad (1.11), es de esperarse que la cantidad $\|\cdot\|_{L^{p,\infty}}$ que sirve para caracterizarlos posea ciertas propiedades interesantes, a pesar de ser únicamente una cuasi-norma. En este sentido tenemos el siguiente resultado

Proposición 1.1.8 *Sea $0 < p < +\infty$ un parámetro real. Sean $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión y f una función que pertenecen al espacio de Lebesgue $L^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$. Si la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge hacia la función f en L^p, entonces también se tiene esta convergencia en $L^{p,\infty}$. Dicho de otra manera, la convergencia en L^p implica la convergencia en $L^{p,\infty}$.*

Prueba. Fijemos $0 < p < +\infty$, la estimación (1.11) nos permite escribir

$$\|f - f_n\|_{L^{p,\infty}} \leq \|f - f_n\|_{L^p},$$

de donde se deduce inmediatamente que si la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge hacia f en el espacio L^p, también se tiene la convergencia en el espacio $L^{p,\infty}$. ■

Presentamos ahora otro resultado que es válido cuando se dispone de un poco más de estructura en el espacio sobre el cual están definidas las funciones:

Proposición 1.1.9 (Traslación y Dilatación) *Sea $0 < p < +\infty$ y consideremos los espacios de Lorentz $L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{K})$. Para todo $\tau \in \mathbb{R}^n$ y todo $\lambda > 0$ tenemos*

$$\|f_\tau\|_{L^{p,\infty}} = \|f\|_{L^{p,\infty}} \quad \text{y} \quad \|\delta_\lambda[f]\|_{L^{p,\infty}} = \lambda^{-\frac{n}{p}} \|f\|_{L^{p,\infty}}.$$

Prueba. Recordemos que para todo $\tau \in \mathbb{R}^n$ la *traslación* f_τ de una función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ está definida por $f_\tau(x) = f(x + \tau)$. Utilizando la definición de la

[11] Ver también la Proposición 4.3.1 del Volumen 1.

función de distribución dada en la fórmula (1.1) y utilizando la unimodularidad[12] de $\mathbb{R}^n$ tenemos directamente la identidad

$$d_{f_\tau}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{\{|f(x+\tau)|>\alpha\}}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{\{|f(x)|>\alpha\}}(x)dx = d_f(\alpha), \qquad (1.12)$$

de donde se deduce la primera identidad.

Recordemos ahora que la dilatación $\delta_\lambda[f]$ de una función está dada por la expresión $\delta_\lambda[f](x) = f(\lambda x) = f(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$. De esta manera tenemos, gracias a un cambio de variable:

$$\begin{aligned} d_{\delta_\lambda[f]}(\alpha) &= \int_{\{|\delta_\lambda[f]|>\alpha\}} dx = \int_{\{|f(\lambda x)|>\alpha\}} dx \\ &= \lambda^{-n} \int_{\{|f(x)|>\alpha\}} dx = \lambda^{-n} d_f(\alpha), \end{aligned} \qquad (1.13)$$

de donde se deduce la segunda identidad al reconstruir la funcional $\|\cdot\|_{L^{p,\infty}}$ dada en (1.4). ■

Observación 1.4 Es importante notar que cuando se dispone de una estructura de dilatación, las funcionales que determinan los espacios de Lebesgue L^p y de Lorentz $L^{p,\infty}$ tienen el mismo comportamiento, es decir

$$\|\delta_\lambda[f]\|_{L^p} = \lambda^{-\frac{n}{p}}\|f\|_{L^p} \qquad \text{y} \qquad \|\delta_\lambda[f]\|_{L^{p,\infty}} = \lambda^{-\frac{n}{p}}\|f\|_{L^{p,\infty}}$$

Volvamos ahora a las problemáticas de inclusión entre los espacios de Lorentz y de Lebesgue. Sabemos que en el caso general si $p \neq q$ entonces no existe ninguna relación de inclusión entre los espacios de Lebesgue L^p y L^q (ver la Sección 4.2.1 del Volumen 1). Esta situación se mantiene con los espacios de Lorentz $L^{p,\infty}$ y $L^{q,\infty}$: es decir, en el caso general, si $p \neq q$ no existe tampoco ninguna relación de inclusión entre estos dos espacios.

Sin embargo, cuando tenemos una información adicional, sabemos por el Teorema 4.2.5 del Volumen 1, que cuando la medida del conjunto X es *finita*, existe la relación de inclusión estricta

$$L^q(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K}) \subsetneq L^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K}),$$

entre los espacios de Lebesgue cuando $1 \leq p < q \leq +\infty$. En el caso de los espacios de Lorentz $L^{p,\infty}$ definidos sobre espacios X de medida finita tenemos un resultado de inclusión totalmente similar al de los espacios de Lebesgue y este resultado será una consecuencia de la siguiente proposición.

Proposición 1.1.10 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido tal que $\mu(X) < +\infty$. Sean p y q dos números reales tales que $0 < p < q < +\infty$ y sea f una función de $L^{q,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$. Tenemos entonces la estimación:*

$$\int_X |f(x)|^p d\mu(x) \leq C(p,q)\, \mu(X)^{1-\frac{p}{q}} \|f\|^p_{L^{q,\infty}}, \qquad (1.14)$$

en donde $C(p,q) = \frac{q}{q-p}$.

[12]Ver la Proposición 4.1.14 del Volumen 2.

Prueba. Para empezar la demostración utilizamos la Proposición 1.1.2 que proporciona una caracterización de la norma de los espacios $L^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ basándose en la función de distribución. Podemos entonces escribir

$$\int_X |f(x)|^p d\mu(x) = p \int_0^{+\infty} \alpha^{p-1} \mu(X \cap \{x \in X : |f| > \alpha\}) d\alpha.$$

Observemos ahora que tenemos las dos mayoraciones siguientes

$$\mu(X \cap \{x \in X : |f| > \alpha\}) \leq \mu(X), \quad \text{y} \quad \mu(X \cap \{x \in X : |f| > \alpha\}) \leq \alpha^{-q} \|f\|^q_{L^{q,\infty}},$$

la primera estimación es finita pues por hipótesis se tiene $\mu(X) < +\infty$ mientras que la segunda se deduce de la definición de la cantidad $\|f\|_{L^{q,\infty}}$ que por hipótesis también es finita y se tiene entonces

$$\int_X |f(x)|^p d\mu(x) \leq p \int_0^{+\infty} \alpha^{p-1} \text{mín}\left(\mu(X), \alpha^{-q} \|f\|^q_{L^{q,\infty}}\right) d\alpha.$$

En este punto utilizamos la linealidad de la integral para escribir

$$\begin{aligned} \int_X |f(x)|^p d\mu(x) \quad &\leq \quad p \int_0^{T} \alpha^{p-1} \text{mín}\left(\mu(X), \alpha^{-q} \|f\|^q_{L^{q,\infty}}\right) d\alpha \qquad (1.15) \\ &\quad + p \int_T^{+\infty} \alpha^{p-1} \text{mín}\left(\mu(X), \alpha^{-q} \|f\|^q_{L^{q,\infty}}\right) d\alpha, \end{aligned}$$

en donde el parámetro T está fijado por $T = \mu(X)^{-\frac{1}{q}} \|f\|_{L^{q,\infty}}$. Vemos ahora que si $\alpha \in]0, T[$, entonces $\text{mín}\left(\mu(X), \alpha^{-q} \|f\|^q_{L^{q,\infty}}\right) = \mu(X)$, e inversamente, si $\alpha \in]T, +\infty[$ se tiene que $\text{mín}\left(\mu(X), \alpha^{-q} \|f\|^q_{L^{q,\infty}}\right) = \alpha^{-q} \|f\|^q_{L^{q,\infty}}$. Así, regresando a la expresión (1.15) escribimos:

$$\int_X |f(x)|^p d\mu(x) \leq p \int_0^T \alpha^{p-1} \mu(X) d\alpha + p \int_T^{+\infty} \alpha^{p-1-q} \|f\|^q_{L^{q,\infty}} d\alpha.$$

Es decir, calculando estas integrales obtenemos

$$\int_X |f(x)|^p d\mu(x) \leq T^p \mu(X) + \frac{p}{q-p} T^{p-q} \|f\|^q_{L^{q,\infty}},$$

luego, con el valor de T definido anteriormente podemos escribir

$$\int_X |f(x)|^p d\mu(x) \leq \left(1 + \frac{p}{q-p}\right) \mu(X)^{1-\frac{p}{q}} \|f\|^q_{L^{q,\infty}},$$

lo cual nos permite concluir. ■

Hay que notar que si $p \geq q$ entonces la estimación (1.14) es falsa. En efecto, el caso $p = q$ es directo por la Proposición 1.1.6: sabemos que los espacios de Lorentz son estríctamente más grandes que los espacios de Lebesgue. Para estudiar el caso $p > q$ basta fijar por ejemplo $X =]0, 1[$, $f(x) = 1/x$, $p = 2$ y $q = 1$. En efecto, se tiene que $\|f\|_{L^2} = +\infty$ mientras que, repitiendo los cálculos realizados en la expresión (1.6), vemos que $\|f\|_{L^{1,\infty}} < +\infty$, de donde se obtiene que la estimación (1.14) falla cuando $p > q$.

Corolario 1.1.2 (Inclusiones - Medida finita) *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido de μ-medida finita, es decir $\mu(X) < +\infty$. Si $0 < p < q < +\infty$, tenemos las inclusiones de espacios siguientes*

$$L^q(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K}) \subsetneq L^{q,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K}) \subsetneq L^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K}) \subsetneq L^{p,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K}).$$

Prueba. Las inclusiones de los extremos de la expresión anterior (es decir $L^q \subsetneq L^{q,\infty}$ y $L^p \subsetneq L^{p,\infty}$) se deducen directamente de la Proposición 1.1.6, de manera que solo debemos preocuparnos por estudiar la inclusión central $L^{q,\infty} \subsetneq L^p$. Pero si $\mu(X) < +\infty$ y si $0 < p < q < +\infty$, entonces partir de la estimación (1.14) obtenemos sin problema la desigualdad

$$\|f\|_{L^p} \leq C(p, q, X)\|f\|_{L^{q,\infty}},$$

y por lo tanto, si f es una función que pertenece al espacio de Lorentz $L^{q,\infty}$ entonces también pertenece al espacio de Lebesgue L^p. ■

El lector observará que esto representa un *doble* refinamiento de las inclusiones dadas en el Teorema 4.2.5 del Volumen 1.

- En el caso de los espacios de Lebesgue definidos sobre un conjunto de medida finita, solo teníamos la inclusión $L^q \subsetneq L^p$, y esta información se enriquece con el resultado anterior pues entre estos dos espacios, es posible insertar el espacio de Lorentz $L^{q,\infty}$ tal como está indicado en el corolario anterior.

- En el Teorema 4.2.5 del Volumen 1, se consideraba únicamente el rango de valores $1 \leq p < q < +\infty$, y los casos cuando $0 < p < q < 1$ no estaban considerados, pues en la demostración de ése teorema se utilizaban las desigualdades de Hölder que imponían la condición $1 \leq p < q < +\infty$. El Corolario 1.1.2, basado en una demostración diferente que utiliza la Proposición 1.1.10, permite ampliar el rango de valores.

Más allá de la conclusión obtenida, es necesario indicar que las líneas expuestas en la prueba de la Proposición 1.1.10 son un ejemplo típico de los cálculos que se realizan cuando se trabaja con espacios de Lorentz y tendremos varias oportunidades para mostrar como razonamientos similares permiten obtener resultados muy poderosos.

C) Una desigualdad de Interpolación

Vamos ahora a mostrar cómo los espacios de Lorentz $L^{p,\infty}$ permiten mejorar algunos resultados conocidos. En efecto, recordemos que si $(X, \mathscr{A}, \mu)$ es un espacio medido y si $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ es una función medible tal que $f \in L^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K}) \cap L^q(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$, con $1 \leq p < q \leq +\infty$, entonces disponemos de la desigualdad de interpolación siguiente

$$\|f\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}^{\theta}\|f\|_{L^q}^{1-\theta}, \tag{1.16}$$

en donde $\theta \in]0, 1[$ es un parámetro y donde se tiene $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}$ (ver la demostración en el Teorema 4.2.7 del Volumen 1). Esta desigualdad nos indica que si una función f pertenece a los espacios L^p y L^q, entonces pertenece a todos los espacios L^r con $p < r < q$.

Puesto que se tiene la estimación $\|f\|_{L^{p,\infty}} \leq \|f\|_{L^p}$ dada en la fórmula (1.11), vamos a ver en el resultado a continuación cómo obtener un resultado similar y veremos que es posible ser mucho más precisos utilizando los espacios de Lorentz.

Teorema 1.1.2 (Interpolación) *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido, sean $0 < p < q \leq +\infty$ dos parámetros reales y sea f una función medible tal que $f \in L^{p,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K}) \cap L^{q,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$, entonces $f \in L^r(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ para todo $p < r < q$ y además se tiene la desigualdad de interpolación siguiente*

$$\|f\|_{L^r} \leq C(p,q,r)\|f\|_{L^{p,\infty}}^{\theta}\|f\|_{L^{q,\infty}}^{1-\theta},$$

donde $\theta = \frac{p}{r}\frac{q-r}{q-p}$ si $q < +\infty$ y donde $\theta = p/r$ si $q = +\infty$.

Demostración. Sea $0 < q < +\infty$. Como se tiene que $f \in L^{p,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K}) \cap L^{q,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$, tenemos por definición de las funcionales $\|\cdot\|_{L^{p,\infty}}$ y $\|\cdot\|_{L^{q,\infty}}$, las mayoraciones siguientes

$$d_f(\alpha) \leq \frac{\|f\|_{L^{p,\infty}}^p}{\alpha^p} \qquad \text{y} \qquad d_f(\alpha) \leq \frac{\|f\|_{L^{q,\infty}}^q}{\alpha^q},$$

es decir que podemos escribir $d_f(\alpha) \leq \text{mín}\left(\frac{\|f\|_{L^{p,\infty}}^p}{\alpha^p}, \frac{\|f\|_{L^{q,\infty}}^q}{\alpha^q}\right)$. Consideremos ahora la norma $\|\cdot\|_{L^r}$ y utilicemos la caracterización por medio de líneas de nivel dada en la expresión (1.2). Con la estimación anterior sobre la función de distribución d_f y por la linealidad de la integral obtenemos

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^r}^r &= r\int_0^{+\infty}\alpha^{r-1}d_f(\alpha)d\alpha \leq r\int_0^{+\infty}\alpha^{r-1}\,\text{mín}\left(\frac{\|f\|_{L^{p,\infty}}^p}{\alpha^p}, \frac{\|f\|_{L^{q,\infty}}^q}{\alpha^q}\right)d\alpha\\ &\leq r\int_0^{T}\alpha^{r-1-p}\|f\|_{L^{p,\infty}}^p d\alpha + r\int_T^{+\infty}\alpha^{r-1-q}\|f\|_{L^{q,\infty}}^q d\alpha,\end{aligned}$$

en donde hemos fijado $T = \left(\frac{\|f\|_{L^{q,\infty}}^q}{\|f\|_{L^{p,\infty}}^p}\right)^{\frac{1}{q-p}} < +\infty$. Evaluando el valor de estas integrales se tiene

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^r}^r &\leq \frac{r}{r-p}\|f\|_{L^{p,\infty}}^p T^{r-p} + \frac{r}{q-r}\|f\|_{L^{q,\infty}}^q T^{r-q}\\ &\leq \left(\frac{r}{r-p} + \frac{r}{q-r}\right)(\|f\|_{L^{p,\infty}}^p)^{\frac{q-r}{q-p}}(\|f\|_{L^{q,\infty}}^q)^{\frac{r-p}{q-p}},\end{aligned}$$

y extrayendo la raíz r-ésima de esta desigualdad anterior obtenemos

$$\|f\|_{L^r} \leq \left(\frac{r}{r-p} + \frac{r}{q-r}\right)^{\frac{1}{r}}\|f\|_{L^{p,\infty}}^{\frac{p}{r}\frac{q-r}{q-p}}\|f\|_{L^{q,\infty}}^{\frac{p}{r}\frac{r-p}{q-p}},$$

lo que corresponde con la mayoración buscada cuando $q < +\infty$.

Pasemos ahora al caso cuando $q = +\infty$, en esta situación se tiene por definición $L^{\infty,\infty} = L^{\infty}$ y observamos en particular que se tiene $d_f(\alpha) = 0$ si $\alpha > \|f\|_{L^\infty}$. Con esta observación podemos escribir

$$\|f\|_{L^r}^r = r\int_0^{+\infty} \alpha^{r-1} d_f(\alpha)d\alpha = r\int_0^{\|f\|_{L^\infty}} \alpha^{r-1} d_f(\alpha)d\alpha,$$

pero como se tiene la estimación $d_f(\alpha) \leq \alpha^{-p}\|f\|_{L^{p,\infty}}^p$, entonces

$$\|f\|_{L^r}^r \leq r\int_0^{\|f\|_{L^\infty}} \alpha^{r-1}\alpha^{-p}\|f\|_{L^{p,\infty}}^p d\alpha,$$

y evaluando esta integral obtenemos $\|f\|_{L^r}^r \leq \frac{r}{r-p}\|f\|_{L^{p,\infty}}^p\|f\|_{L^\infty}^{r-p}$, basta ahora extraer la raíz r-ésima de esta estimación para obtener el resultado buscado.■

Conviene poner en perspectiva este resultado utilizando la desigualdad (1.11) y de esta manera tenemos las mayoraciones:

$$\|f\|_{L^{r,\infty}} \leq \|f\|_{L^r} \leq C\|f\|_{L^{p,\infty}}^{\theta}\|f\|_{L^{q,\infty}}^{1-\theta} \leq C\|f\|_{L^p}^{\theta}\|f\|_{L^q}^{1-\theta}.$$

Esta cadena de desigualdades nos indica que si una función f pertenece a los espacios $L^{p,\infty}$ y $L^{q,\infty}$, entonces no solo esta función pertenece a todos los espacios $L^{r,\infty}$ con $p < r < q$ (lo que sería una simple adaptación a los espacios de Lorentz del resultado dado en (1.16)), sino que se tiene un resultado mucho más preciso pues se obtiene que la función f pertenece a todos los espacios de Lebesgue L^r con $p < r < q$. Observemos también que, al igual que en el Corolario 1.1.2, el resultado anterior además de ser más preciso, permite estudiar los casos cuando $0 < p < q < 1$, que no eran estudiados con la desigualdad (1.16) cuya demostración estaba basada en la desigualdad de Hölder.

Este resultado es muy importante pues nos permite obtener informaciones en términos de espacios de Lebesgue a partir de informaciones generales dadas en términos de espacios de Lorentz: de esta manera si estamos interesados en controlar una función en norma L^r, es suficiente controlarla en norma $L^{p,\infty}$ y $L^{q,\infty}$ con $0 < p < r < q \leq +\infty$, lo cual en ciertas ocasiones es mucho más facil de obtener.

D) Desigualdades de Hölder

Vamos ahora a generalizar a los espacios de Lorentz las desigualdades de Hölder, que estudian el tamaño del producto de funciones.

Teorema 1.1.3 (Desigualdades de Hölder) *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido. Sean $p, p_1, ..., p_n$ números reales positivos pertenecientes al intervalo $]0, +\infty[$ tales que*

$$\frac{1}{p} = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{p_j}.$$

Sean $(f_j)_{1\leq j\leq n}$ funciones medibles definidas sobre X a valores en $\mathbb{K}$ pertenecientes a los espacios $L^{p_j,\infty}(X,\mathscr{A},\mu,\mathbb{K})$. Entonces tenemos la mayoración

$$\left\|\prod_{j=1}^{n} f_j\right\|_{L^{p,\infty}} \leq C(p,p_1,\ldots,p_n)\prod_{j=1}^{n}\|f_j\|_{L^{p_j,\infty}}$$

en donde $C(p,p_1,\ldots,p_n)=p^{-\frac{1}{p}}\prod_{j=1}^{n}p_j^{\frac{1}{p_j}}$.

Demostración. Estudiemos la función de distribución del producto $\prod_{j=1}^{n} f_j$ y para ello vamos a aplicar el punto 5) de la Proposición 1.1.1, página 7, utilizando la identidad $\alpha=\frac{\alpha}{\sigma_1}\times\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\times\frac{\sigma_2}{\sigma_3}\times\cdots\times\frac{\sigma_{n-2}}{\sigma_{n-1}}\times\sigma_{n-1}$, donde $\sigma_i>0$ $(1\leq i\leq n-1)$. De esta manera podemos escribir

$$\begin{aligned} d_{\prod_{j=1}^{n} f_j}(\alpha) &\leq d_{f_1}\left(\frac{\alpha}{\sigma_1}\right)+d_{f_2}\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)+d_{f_3}\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_3}\right)+\\ &\quad +\cdots+d_{f_{n-1}}\left(\frac{\sigma_{n-2}}{\sigma_{n-1}}\right)+d_{f_n}\left(\sigma_{n-1}\right). \end{aligned}$$

Dado que cada función f_j pertenece al espacio de Lorentz $L^{p_j,\infty}$ correspondiente, podemos aplicar la mayoración (1.5) a cada uno de los términos anteriores para obtener

$$\begin{aligned} d_{\prod_{j=1}^{n} f_j}(\alpha) &\leq \|f_1\|_{L^{p_1,\infty}}^{p_1}\left(\frac{\sigma_1}{\alpha}\right)^{p_1}+\|f_2\|_{L^{p_2,\infty}}^{p_2}\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)^{p_2}+\|f_3\|_{L^{p_3,\infty}}^{p_3}\left(\frac{\sigma_3}{\sigma_2}\right)^{p_3}+\\ &\quad +\cdots+\|f_{n-1}\|_{L^{p_{n-1},\infty}}^{p_{n-1}}\left(\frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_{n-2}}\right)^{p_{n-1}}+\|f_n\|_{L^{p_n,\infty}}^{p_n}\left(\frac{1}{\sigma_{n-1}}\right)^{p_n}. \end{aligned}$$

Definimos ahora $x_1=\|f_1\|_{L^{p_1,\infty}}\left(\frac{\sigma_1}{\alpha}\right)$, $x_2=\|f_2\|_{L^{p_2,\infty}}\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)$, $x_3=\|f_3\|_{L^{p_3,\infty}}\left(\frac{\sigma_3}{\sigma_2}\right)$, $\ldots$, $x_{n-1}=\|f_{n-1}\|_{L^{p_{n-1},\infty}}\left(\frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_{n-2}}\right)$, $x_n=\|f_n\|_{L^{p_n,\infty}}\left(\frac{1}{\sigma_{n-1}}\right)$, y nos interesamos en minimizar el problema

$$x_1^{p_1}+x_2^{p_2}+x_3^{p_3}+\cdots+x_{n-1}^{p_{n-1}}+x_n^{p_n},$$

con la condición $x_1\times x_2\times x_3\times\cdots\times x_{n-1}\times x_n=\frac{1}{\alpha}\prod_{j=1}^{n}\|f_j\|_{L^{p_j,\infty}}$ (si necesario proceder por recurrencia con 2 funciones, luego 3, etc, y utilizar el método de multiplicadores de Lagrange), de esta manera obtenemos la mayoración

$$d_{\prod_{j=1}^{n} f_j}(\alpha)\leq\left(p^{-1}\prod_{j=1}^{n}p_j^{\frac{p}{p_j}}\right)\alpha^{-p}\prod_{j=1}^{n}\|f_j\|_{L^{p_j,\infty}}^{p},$$

extrayendo la raíz p-ésima de esta desigualdad, se tiene

$$\alpha\times d_{\prod_{j=1}^{n} f_j}^{\frac{1}{p}}(\alpha)\leq p^{-\frac{1}{p}}\prod_{j=1}^{n}p_j^{\frac{1}{p_j}}\prod_{j=1}^{n}\|f_j\|_{L^{p_j,\infty}},$$

a partir de esta estimación uniforme con respecto a la variable α y por definición de la funcional $\|\cdot\|_{L^{p,\infty}}$ tenemos finalmente la mayoración

$$\left\|\prod_{j=1}^{n} f_j\right\|_{L^{p,\infty}}\leq p^{-\frac{1}{p}}\prod_{j=1}^{n}p_j^{\frac{1}{p_j}}\prod_{j=1}^{n}\|f_j\|_{L^{p_j,\infty}}$$

lo que termina la demostración del teorema. ■

Conviene enunciar por separado el caso particular más utilizado de estas desigualdades de Hölder.

Corolario 1.1.3 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido y sean $1 \leq p_1, p_2 \leq +\infty$ números reales conjugados entre sí, es decir $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1$. Sean f, g funciones medibles que pertenecen a los espacios de Lorentz $L^{p_1,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ y $L^{p_2,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$, respectivamente. Entonces tenemos*

$$\|fg\|_{L^{1,\infty}} \leq C(p_1, p_2)\|f\|_{L^{p_1,\infty}}\|g\|_{L^{p_2,\infty}}$$

Veremos más adelante, en el Teorema 1.4.1, maneras más directas y generales de obtener este tipo de resultado.

E) Una caracterización de los espacios de Lorentz $L^{p,\infty}$

Presentamos en esta sección una segunda manera de caracterizar los espacios de Lorentz $L^{p,\infty}$ que está relacionada con el Teorema 1.1.2, página 25, en el siguiente sentido: vimos que si una función f pertenece a los espacios de Lorentz $L^{p,\infty}$ y $L^{q,\infty}$, entonces podemos deducir que la función f pertenece al espacio de Lebesgue L^r con $p < r < q$. Vamos a ver ahora que una función $f \in L^{p,\infty}$ si y solo si se la puede descomponer como una suma de funciones que pertenecen a espacios de Lebesgue adecuados.

Teorema 1.1.4 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido. Sea $0 < p < +\infty$ un parámetro real y sea $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ una función medible. Entonces $f \in L^{p,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ si y solo si*

$$(\forall A > 0)\ (\exists f_0, f_1 : X \longrightarrow \mathbb{K}) \textit{ tales que } \quad f(x) = f_0(x) + f_1(x),$$

en donde $\|f_0\|_{L^{p_0}} \leq C_0 A^{\theta-1}$ y $\|f_1\|_{L^{p_1}} \leq C_0 A^{\theta}$ con $A > 0$ y en donde los parámetros $0 < p_0 < p < p_1 < +\infty$ están relacionados por la expresión $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_0} + \frac{1-\theta}{p_1}$, con $0 < \theta < 1$. Además se tiene la caracterización siguiente

$$\|f\|_{L^{p,\infty}} = \inf\left\{C > 0 : \ f = f_0 + f_1 \textit{ con } \|f_0\|_{L^{p_0}} \leq CA^{\theta-1},\ \|f_1\|_{L^{p_1}} \leq CA^{\theta}\right\}.$$

Demostración. Empecemos considerando una función $f \in L^{p,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ y verifiquemos que efectivamente se puede descomponer de la manera indicada por el teorema. Definimos pues las funciones f_0 y f_1 de la manera siguiente

$$f_0 = f\mathbb{1}_{\{x\in X:|f(x)|>B\}} \quad \text{y} \quad f_1 = f\mathbb{1}_{\{x\in X:|f(x)|\leq B\}},$$

para un cierto $B > 0$. Vemos directamente por esta definición de las funciones f_0 y f_1 que se tiene la identidad $f(x) = f_0(x) + f_1(x)$, de manera que debemos mostrar que $f_0 \in L^{p_0}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ y que $f_1 \in L^{p_1}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{R})$. Para ello procedemos como sigue:

- Para f_0, por definición de esta función tenemos

$$\int_X |f_0(x)|^{p_0} d\mu(x) = \int_{\{|f(x)|>B\}} |f(x)|^{p_0} d\mu(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} \int_{\{2^j B<|f(x)|<2^{j+1}B\}} |f(x)|^{p_0} d\mu(x)\ ,$$

pero como sobre el conjunto $\{2^jB < |f(x)| < 2^{j+1}B\}$ se tiene la mayoración $|f(x)| < 2^{j+1}B$, entonces podemos escribir

$$\begin{aligned}\int_X |f_0(x)|^{p_0} d\mu(x) &\leq \sum_{j=0}^{+\infty}(2^{j+1}B)^{p_0} \int\limits_{\{2^jB<|f(x)|<2^{j+1}B\}} d\mu(x)\\ &\leq \sum_{j=0}^{+\infty}(2^{j+1}B)^{p_0}\mu(\{2^jB < |f(x)| < 2^{j+1}B\}).\end{aligned}$$

Utilizando la definición de la función de distribución d_f, se tiene para todo $\alpha > 0$ la desigualdad $d_f(\alpha) \leq \alpha^{-p}\|f\|^p_{L^{p,\infty}}$ y obtenemos

$$\begin{aligned}\int_X |f_0(x)|^{p_0} d\mu(x) &\leq \sum_{j=0}^{+\infty}(2^{j+1}B)^{p_0} d_f(2^jB) \leq \sum_{j=0}^{+\infty}(2^{j+1}B)^{p_0}(2^jB)^{-p}\|f\|^p_{L^{p,\infty}}\\ &\leq 2^{p_0}B^{p_0-p}\|f\|^p_{L^{p,\infty}}\sum_{j=0}^{+\infty}2^{j(p_0-p)},\end{aligned}$$

y la suma anterior converge pues $p_0 < p$ y por lo tanto obtenemos que $f_0 \in L^{p_0}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ puesto que se tiene la mayoración

$$\|f_0\|^{p_0}_{L^{p_0}} = CB^{p_0-p}\|f\|^p_{L^{p,\infty}} < +\infty.$$

- Para la función f_1 escribimos, utilizando esencialmente los mismos argumentos explicitados anteriormente:

$$\int_X |f_1(x)|^{p_1} d\mu(x) = \int\limits_{\{|f(x)|\leq B\}} |f(x)|^{p_1} d\mu(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} \int\limits_{\{2^{-(j+1)}B<|f(x)|\leq 2^{-j}B\}} |f(x)|^{p_1} d\mu(x)$$

$$\leq \sum_{j=0}^{+\infty}(2^{-j}B)^{p_1} \int\limits_{\{2^{-(j+1)}B<|f(x)|\leq 2^{-j}B\}} d\mu(x) \leq \sum_{j=0}^{+\infty}(2^{-j}B)^{p_1} d_f(2^{-(j+1)}B)$$

$$\leq \sum_{j=0}^{+\infty}(2^{-j}B)^{p_1}(2^{-(j+1)}B)^{-p}\|f\|^p_{L^{p,\infty}} \leq 2^pB^{p_1-p}\|f\|^p_{L^{p,\infty}}\sum_{j=0}^{+\infty}2^{-j(p_1-p)},$$

y esta suma anterior converge pues $p < p_1$ y por lo tanto obtenemos

$$\|f_1\|^{p_1}_{L^{p_1}} \leq CB^{p_1-p}\|f\|^p_{L^{p,\infty}} < +\infty.$$

Reescribimos ahora estas estimaciones sobre las cantidades $\|f_0\|_{L^{p_0}}$, $\|f_1\|_{L^{p_1}}$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\|f_0\|_{L^{p_0}} &\leq CB^{1-\frac{p}{p_0}}\|f\|^{\frac{p}{p_0}}_{L^{p,\infty}} \qquad (1.17)\\ &\leq C\|f\|_{L^{p,\infty}}\left(\frac{B}{\|f\|_{L^{p,\infty}}}\right)^{1-\frac{p}{p_0}}\\ \|f_1\|_{L^{p_1}} &\leq CB^{1-\frac{p}{p_1}}\|f\|^{\frac{p}{p_1}}_{L^{p,\infty}} \qquad (1.18)\\ &\leq C\|f\|_{L^{p,\infty}}\left(\frac{B}{\|f\|_{L^{p,\infty}}}\right)^{1-\frac{p}{p_1}},\end{aligned}$$

y basta entonces escribir $C_0 = C\|f\|_{L^{p,\infty}}$ y $A = \left(\frac{B}{\|f\|_{L^{p,\infty}}}\right)^{p(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1})}$, donde $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_0} + \frac{1-\theta}{p_1}$ y donde $B > 0$ es arbitrario, para obtener que para todo $A > 0$ existen dos funciones f_0, f_1 tales que $f(x) = f_0(x) + f_1(x)$ y que verifican

$$\|f_0\|_{L^{p_0}} \leq C_0 A^{\theta-1} \qquad \text{y} \qquad \|f_1\|_{L^{p_1}} \leq C_0 A^{\theta}.$$

Para verificar la implicación recíproca, partimos del hecho de que la función f se descompone como una suma $f = f_0 + f_1$ en donde las funciones f_0, f_1 verifican las condiciones expuestas en el teorema y vamos a verificar que se tiene $f \in L^{p,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$. El punto de partida está dado por las mayoraciones

$$\begin{array}{rcl} \mu\big(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}\big) & = & \mu\big(\{x \in X : |f_0(x) + f_1(x)| > \alpha\}\big) \\ & \leq & \mu\big(\{x \in X : |f_0(x)| + |f_1(x)| > \alpha\}\big) \\ \leq \mu\big(\{x \in X : |f_0(x)| > \alpha/2\}\big) & + & \mu\big(\{x \in X : |f_1(x)| > \alpha/2\}\big). \end{array} \tag{1.19}$$

Utilizando la desigualdad de Tchebychev (Proposición 1.1.7) obtenemos la estimación general

$$\mu\big(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}\big) \leq \alpha^{-r}\|f\|_{L^r}^r \quad (0 < r < +\infty),$$

y entonces, gracias a esta mayoración, vamos a reconstruir las cantidades $\|f_0\|_{L^{p_0}}$ y $\|f_1\|_{L^{p_1}}$ en la parte derecha de la desigualdad (1.19) para obtener

$$\mu\big(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}\big) \leq C\frac{\|f_0\|_{L^{p_0}}^{p_0}}{\alpha^{p_0}} + C\frac{\|f_1\|_{L^{p_1}}^{p_1}}{\alpha^{p_1}},$$

ahora, usando las hipótesis sobre las funciones f_0 y f_1 podemos escribir

$$\begin{array}{rcl} \mu\big(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}\big) & \leq & \dfrac{C_0^{p_0} A^{(\theta-1)p_0}}{\alpha^{p_0}} + \dfrac{C_0^{p_1} A^{\theta p_1}}{\alpha^{p_1}} \\ & \leq & \left(\dfrac{C_0}{\alpha}\right)^p \left(A^{(\theta-1)p_0}\left(\dfrac{C_0}{\alpha}\right)^{p_0-p} + A^{\theta p_1}\left(\dfrac{C_0}{\alpha}\right)^{p_1-p}\right), \end{array}$$

en este punto, basta determinar A tal que la cantidad entre corchete anterior siempre sea igual a 2 y obtenemos $\mu\big(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}\big) \leq 2\alpha^{-p}C_0^p$, y a partir de esta estimación, utilizando la definición de los espacios de Lorentz $L^{p,\infty}$ tenemos finalmente que $f \in L^{p,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$. ■

Corolario 1.1.4 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido. Sea $0 < p < +\infty$ un parámetro real y sea $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ una función medible que pertenece al espacio de Lorentz $L^{p,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$, entonces existen dos funciones $f_0, f_1 : X \longrightarrow \mathbb{K}$ tales que $f = f_0 + f_1$, en donde $f_0 \in L^{p_0}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ y $f_1 \in L^{\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$, en donde $0 < p_0 < p < +\infty$.*

Prueba. De la misma manera que en el resultado anterior consideramos las funciones f_0 y f_1 definidas por $f_0 = f\mathbb{1}_{\{x\in X:|f(x)|>B\}}$ y $f_1 = f\mathbb{1}_{\{x\in X:|f(x)|\leq B\}}$, para un cierto $B > 0$. Por los mismos argumentos tenemos $f_0 \in L^{p_0}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ y solo debemos concentrarnos en la función f_1. Escribimos entonces

$$\sup_{x\in X} ess|f_1(x)| = \sup_{x\in\{|f(x)|\leq B\}} ess\ |f(x)| \leq B,$$

de donde se obtiene directamente que $f_1 \in L^\infty(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$. ■

Los resultados que acabamos de demostrar se enmarcan en una teoría mucho más general, llamada la *interpolación de espacios de Banach*, que será tratada con un poco más en detalle en los capítulos siguientes. Una aplicación directa de estos resultados se puede evidenciar en la sección siguiente.

F) Producto de convolución

El objetivo de esta sección es mostrar de qué manera es posible generalizar el producto de convolución a funciones que pertenecen a los espacios de Lorentz $L^{p,\infty}$. Esta extensión tiene consecuencias muy importantes pues como hemos visto en la Proposición 1.1.6, se tiene la inclusión $L^p \subset L^{p,\infty}$ y de esta forma podremos considerar el producto de convolución de muchas más funciones como tendremos la oportunidad de verlo en numerosas aplicaciones.

Por simplicidad, en esta sección consideraremos únicamente el producto de convolución sobre el grupo topológico $\mathbb{R}^n$ dotado de su estructura natural[13], pero en la Sección 1.4.3 estudiaremos en un marco más general (de grupos topológicos localmente compactos) el producto de convolución de dos funciones. Así mismo, tendremos la oportunidad de presentar versiones más generales del teorema principal de esta sección.

Recordemos ahora que si $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ son dos funciones medibles, entonces su producto de convolución se define por medio de la expresión

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy,$$

y tenemos la desigualdades de Young en los espacios de Lebesgue que nos indican bajo qué condiciones sobre las funciones f y g el producto de convolución $f * g$ está bien definido:

Proposición 1.1.11 (Desigualdades de Young) *Sean $1 \leq p, q, r \leq +\infty$ tres reales relacionados por la fórmula $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$. Sean $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ dos funciones medibles, si $f \in L^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{K})$ y si $g \in L^q(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{K})$, entonces el producto de convolución $f * g$ pertenece al espacio de Lebesgue $L^r(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{K})$ y además se tiene la desigualdad*

$$\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}.$$

El lector puede consultar una demostración de este resultado en el Teorema 4.2.2 del Volumen 2.

Como vemos con esta proposición, hay que tener cuidado con el producto de convolución pues no puede ser definido para *cualquier* tipo de función y hay que verificar las hipótesis de este resultado para poder dar un sentido a la expresión $f * g$.

[13] Ver los detalles en el Capítulo 4 del Volumen 2.

El teorema a continuación nos proporciona una generalización de las desigualdades anteriores en el marco de los espacios de Lorentz.

Teorema 1.1.5 (Convolución $L^p \times L^{q,\infty} \hookrightarrow L^{r,\infty}$) *Sean* $1 \leq p < +\infty$ *y* $1 < q, r < +\infty$ *tres reales relacionados por la fórmula*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}. \tag{1.20}$$

Sean $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ *dos funciones medibles, si* $f \in L^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{K})$ *y si* $g \in L^{q,\infty}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{K})$*, entonces el producto de convolución* $f * g$ *pertenece al espacio* $L^{r,\infty}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{K})$ *y además se tiene la desigualdad*

$$\|f * g\|_{L^{r,\infty}} \leq C(r,p,q)\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^{q,\infty}}. \tag{1.21}$$

Antes de pasar a la demostración de este resultado, es interesante observar que esta desigualdad hace intervenir *dos* tipos de espacios funcionales: un espacio de Lorentz en la parte de la izquierda de la desigualdad y una mezcla Lebesgue-Lorentz en la parte derecha. Tendremos la oportunidad de estudiar más adelante diversas variantes de las desigualdades de Young: ya sea donde todos los espacios presentes son espacios de Lorentz, ya sea otras versiones en donde intervienen de manera distinta espacios de Lebesgue y de Lorentz.

Demostración. Como $g \in L^{q,\infty}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{K})$, tenemos por el Teorema 1.1.4 anterior y su Corolario 1.1.4, que esta función g puede descomponerse como la suma de dos funciones g_0 y g_1 de tal manera que se tienen las desigualdades (1.17) y (1.18), es decir:

$$\|g_0\|_{L^{q_0}} \leq CB^{1-\frac{q}{q_0}}\|g\|_{L^{q,\infty}}^{\frac{q}{q_0}} \quad \text{y} \quad \|g_1\|_{L^{q_1}} \leq CB^{1-\frac{q}{q_1}}\|g\|_{L^{q,\infty}}^{\frac{q}{q_1}}, \tag{1.22}$$

para todo $B > 0$ y $0 < q_0 < q < q_1 \leq +\infty$.

Tenemos entonces por la linealidad de la convolución $f * g = f * g_0 + f * g_1$ y por las propiedades de la función de distribución tenemos la mayoración

$$d_{f*g}(\alpha) \leq d_{f*g_0}(\alpha/2) + d_{f*g_1}(\alpha/2). \tag{1.23}$$

Una vez que disponemos de esta descomposición, vamos a dividir la demostración en función de los valores del parámetro p que caracteriza los espacios de Lebesgue en la desigualdad (1.21).

- Caso $p > 1$. Deseamos estudiar la cantidad $d_{f*g_1}(\alpha/2)$ para un cierto $\alpha > 0$. Para ello nos concentramos en la cantidad $|f * g_1|$ y tenemos

  $$|f * g_1(x)| \leq \|f\|_{L^p}\|g_1\|_{L^{p'}},$$

  donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, además, como se tiene la relación (1.20), tenemos $1 < q < p'$ y a partir de los controles (1.22) podemos escribir

  $$|f * g_1(x)| \leq \|f\|_{L^p}\left(CB^{1-\frac{q}{p'}}\|g\|_{L^{q,\infty}}^{\frac{q}{p'}}\right).$$

Como el valor de la constante $B > 0$ es abritrario, lo fijamos por medio de la expresión

$$B = \left(\frac{\alpha}{2C}\|f\|_{L^p}^{-1}\|g\|_{L^{q,\infty}}^{-\frac{q}{p'}}\right)^{\frac{p'}{p'-q}}, \tag{1.24}$$

de manera que obtenemos el control $|f * g_1(x)| \leq \alpha/2$, y este control nos indica que se tiene $d_{f*g_1}(\alpha/2) = 0$.

Estudiamos ahora la cantidad $d_{f*g_0}(\alpha/2)$ y escribimos

$$\|f * g_0\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p}\|g_0\|_{L^1},$$

dado que $1 < q$, utilizando las propiedades de g_0 dadas en (1.22) podemos escribir

$$\|f * g_0\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p}\left(CB^{1-q}\|g\|_{L^{q,\infty}}^q\right),$$

y si reemplazamos el valor de B fijado en (1.24) obtenemos

$$\|f * g_0\|_{L^p} \leq C\alpha^{-p'\frac{q-1}{p'-q}}\|f\|_{L^p}^{q\left(\frac{p'-1}{p'-q}\right)}\|g\|_{L^{q,\infty}}^{q\left(\frac{p'-1}{p'-q}\right)},$$

de esta manera, por la desigualdad de Tchebychev obtenemos el control

$$\begin{array}{rcl} d_{f*g_0}(\alpha/2) & \leq & \alpha^{-p}\|f * g_0\|_{L^p}^p \\ & \leq & \alpha^{-p}\left(C\alpha^{-p'\frac{q-1}{p'-q}}\|f\|_{L^p}^{q\left(\frac{p'-1}{p'-q}\right)}\|g\|_{L^{q,\infty}}^{q\left(\frac{p'-1}{p'-q}\right)}\right)^p \\ & \leq & C\alpha^{-r}\|f\|_{L^p}^r\|g\|_{L^{q,\infty}}^r. \end{array}$$

Con estas informaciones volvemos a la desigualdad (1.23) y escribimos

$$d_{f*g}(\alpha) \leq d_{f*g_0}(\alpha/2) \leq C\alpha^{-r}\|f\|_{L^p}^r\|g\|_{L^{q,\infty}}^r,$$

de donde se deduce el siguiente control uniforme en α

$$\alpha^r d_{f*g}(\alpha) \leq C\|f\|_{L^p}^r\|g\|_{L^{q,\infty}}^r,$$

lo que permite obtener la mayoración $\|f*g\|_{L^{r,\infty}} \leq C(r,p,q)\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^{q,\infty}}$.

- Caso $p = 1$. Seguimos esencialmente las mismas ideas anteriores y estudiamos la expresión $d_{f*g}(\alpha) \leq d_{f*g_0}(\alpha/2) + d_{f*g_1}(\alpha/2)$. Para el término d_{f*g_1} estudiamos la cantidad $|f * g_1|$ y utilizando las propiedades de la función g_1 dadas en (1.22), con $q_1 = +\infty$, tenemos

$$|f * g_1(x)| \leq \|f\|_{L^1}\|g_1\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}CB.$$

Fijamos la cantidad B como $B = \alpha(2C\|f\|_{L^1})^{-1}$, de manera que se tiene $|f * g_1(x)| \leq \alpha/2$ y se deduce sin problema que $d_{f*g_1}(\alpha/2) = 0$. Estudiamos ahora el término $d_{f*g_0}(\alpha/2)$ y para ello escribimos con las propiedades dadas en (1.22)

$$\|f * g_0\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1}\|g_0\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1}\left(CB^{1-q}\|g\|_{L^{q,\infty}}^q\right),$$

y con el valor de B fijado anteriormente tenemos

$$\|f * g_0\|_{L^1} \leq \alpha^{1-q} C \|f\|_{L^1}^q \|g\|_{L^{q,\infty}}^q.$$

Con estos resultados, utilizando la desigualdad de Tchebychev podemos escribir

$$d_{f*g_0}(\alpha/2) \leq \frac{\alpha}{2} \|f * g_0\|_{L^1} \leq C\alpha^{-q} \|f\|_{L^1}^q \|g\|_{L^{q,\infty}}^q.$$

Con estas estimaciones sobre los términos d_{f*g_0} y d_{f*g_1}, podemos ahora escribir

$$\begin{aligned} d_{f*g}(\alpha) &\leq d_{f*g_0}(\alpha/2) + d_{f*g_1}(\alpha/2) \\ &\leq d_{f*g_0}(\alpha/2) \leq C\alpha^{-q} \|f\|_{L^1}^q \|g\|_{L^{q,\infty}}^q, \end{aligned}$$

de donde se obtiene el control uniforme $\alpha^q d_{f*g}(\alpha) \leq C\|f\|_{L^1}^q \|g\|_{L^{q,\infty}}^q$. Recordando que en el caso cuando $p = 1$ se tiene $r = q$ por la relación (1.20) y utilizando la propiedad (1.5) de la página 11 podemos finalmente escribir $\|g\|_{L^{r,\infty}} \leq C\|f\|_{L^1} \|g\|_{L^{q,\infty}}$ ■

En las condiciones sobre los índices p, q, r establecidas en el teorema anterior, hay casos límites que no han sido tratados y que vamos a estudiarlos a continuación.

- Caso cuando $r = q = \infty$. En esta situación, por la relación (1.20) tenemos $p = 1$, y dado que $L^{\infty,\infty} = L^\infty$, entonces la desigualdad (1.21) se escribe

$$\|f * g\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^\infty},$$

lo cual no es más que un caso particular de las desigualdades de Young usuales en los espacios de Lebesgue (ver la Proposición 1.1.11).

- Caso cuando $q = 1$. Por la relación (1.20) debemos tener $1 \leq p = r \leq +\infty$ y vamos a ver que *no se tiene la desigualdad*

$$\|f * g\|_{L^{r,\infty}} \leq \|f\|_{L^r} \|g\|_{L^{1,\infty}}.$$

En efecto, si consideramos sobre $\mathbb{R}$ (dotado de su estructura natural) las funciones $f(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$ y $g(x) = \frac{1}{x}$, tenemos por un lado que $\|f\|_{L^r} < +\infty$ para todo $1 \leq r \leq +\infty$ y que $\|g\|_{L^{1,\infty}} = 1$. Pero por otro lado, vemos que el producto de convolución $f * g$ no está bien definido, pues vale infinito en el intervalo $[0, 1]$.

- Caso cuando $r = +\infty$ y $1 < q < +\infty$. Por la condición (1.20) tenemos $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ pero *no se tiene la desigualdad*

$$\|f * g\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{q,\infty}}.$$

En efecto, sobre $\mathbb{R}$ consideremos las funciones $f(x) = \frac{1}{|x|^{\frac{1}{p}} \ln(x)} \mathbb{1}_{[0,1/2]}(x)$, y $g(x) = \frac{1}{|x|^{\frac{1}{q}}}$, tenemos entonces $\|f\|_{L^p} < +\infty$ y $\|g\|_{L^{q,\infty}} = 1$, pero el producto $f * g$ vale infinito en el intervalo $[0, 1/2]$ y no es por lo tanto una función acotada.

Como vemos con estos resultados anteriores, los espacios de Lorentz $L^{p,\infty}$ constituyen una verdadera generalización de los espacios de Lebesgue y su uso permite mejorar sensiblemente algunos de los resultados estudiados anteriormente en donde solo se utilizaban espacios de Lebesgue. Sin embargo, desde el punto de vista de su estructura, únicamente hemos presentado el hecho de que son espacios vectoriales cuasi-normados y es necesario estudiar si es posible obtener estructuras más fuertes: para ello será necesario dejar de lado la caracterización (1.4) que se basa en la función de distribución para considerar otro tipo de funcionales y esto será realizado en las secciones siguientes.

Las propiedades que hemos expuesto aquí serán retomadas en un marco mucho más general a continuación, pero dado que los espacios $L^{p,\infty}$ son particularmente importantes en las aplicaciones hemos preferido presentar separadamente estas propiedades y esperamos que esta redundancia sea útil pedagógicamente.

1.2. Espacios $L^{p,q}$

Después de haber realizado un primer estudio de los espacios $L^{p,\infty}$, presentamos ahora los espacios de Lorentz generales $L^{p,q}$ en donde los parámetros reales p, q verifican $0 < p, q \leq +\infty$ y veremos cómo estos dos índices nos permitirán medir de manera mucho más fina el tamaño de las funciones. Vamos a ver en las subsecciones a continuación, que es posible presentar los espacios de Lorentz $L^{p,q}$ de distintas maneras. Esto puede parecer engorroso al inicio, pero veremos que cada caracterización de estos espacios tiene su utilidad y su interés, ya sea para estudiar cuestiones estructurales de estos espacios, ya sea para poder utilizarlos en aplicaciones concretas.

En la Sección 1.2.1 daremos una primera definición que estará basada en la función de distribución d_f y veremos algunos ejemplos y propiedades muy elementales de estos espacios de funciones. Sin embargo, este punto de vista no es el más adecuado para estudiar minuciosamente y en detalle los espacios de Lorentz. Por esta razón presentaremos en la Sección 1.2.3 otra caracterización de estos espacios que se basa en la función de reordenamiento decreciente f^* y que nos permitirá presentar más propiedades de estos espacios: en particular veremos que es posible obtener una estructura de espacio normado para ciertos valores muy particulares de los parámetros p y q. A pesar de todo esto, la función de reordenamiento decreciente f^* tampoco será suficiente para cubrir todas las propiedades de los espacios de Lorentz, de manera que daremos un tercer punto de vista equivalente en la Sección 1.3 en donde, gracias a la función maximal f^{**}, concentraremos nuestro estudio en problemas de metrizabilidad y de normabilidad.

Uno de los objetivos de nuestra exposición es evidentemente determinar para qué valores de los parámetros $0 < p, q \leq +\infty$ los espacios de Lorentz $L^{p,q}$ son espacios de Banach, pero a medida que avanzaremos en nuestra exposición, iremos verificando algunas propiedades de estos espacios de funciones. Ciertas aplicaciones, las más elementales, de los espacios de Lorentz serán presentadas directamente en este capítulo y en los capítulos siguientes veremos más ejemplos en donde los espacios $L^{p,q}$ juegan un rol predominante.

1.2.1. Primera definición de los espacios de Lorentz $L^{p,q}$

Como anunciado, presentamos aquí una primera definición de los espacios de Lorentz generales utilizando la función de distribución d_f. Para motivar esta caracterización reescribimos de manera ligeramente diferente las fórmulas (1.2) y (1.4) que nos permitieron definir los espacios de Lebesgue L^p y los espacios de Lorentz $L^{p,\infty}$ con $0 < p < +\infty$:

$$\|f\|_{L^p} = p^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{+\infty} \left(\alpha\, d_f(\alpha)^{\frac{1}{p}} \right)^p \frac{d\alpha}{\alpha} \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{y} \quad \|f\|_{L^{p,\infty}} = \sup_{\alpha>0} \left\{ \alpha\, d_f(\alpha)^{\frac{1}{p}} \right\}.$$

Podemos observar que hay un cierto aire de familia entre estas dos cantidades, en efecto si notamos $F_p(\alpha, f) = \alpha\, d_f(\alpha)^{\frac{1}{p}}$ y $d\mu(\alpha) = \frac{d(\alpha)}{\alpha}$, entonces estas cantidades se escriben

$$\|f\|_{L^p} = p^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{+\infty} F_p(\alpha, f)^p d\mu(\alpha) \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{y} \quad \|f\|_{L^{p,\infty}} = \sup_{\alpha>0} \{F_p(\alpha, f)\}.$$

Dicho de otra manera, con las expresiones anteriores, estamos tomando las “normas” L^p y L^∞ de la cantidad $F_p(\alpha, f)$ con respecto a la medida $d\mu$.

¿Pero qué sucede si consideramos la norma L^q con $q \neq p$ o si $q \neq +\infty$? La respuesta a esta pregunta está dada en la definición a continuación.

Definición 1.2.1 (Espacios de Lorentz) *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido. Sean $0 < p \leq +\infty$ y $0 < q \leq +\infty$ dos índices reales. Definimos los espacios de Lorentz $L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ como el conjunto de funciones medibles $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ tales que las cantidades a continuación sean finitas:*

$$\|f\|_{L^{p,q}} = p^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^{+\infty} \left(\alpha\, d_f(\alpha)^{\frac{1}{p}} \right)^q \frac{d\alpha}{\alpha} \right)^{\frac{1}{q}}, \tag{1.25}$$

si $0 < p, q < +\infty$.

En el caso $0 < p < +\infty$ y $q = +\infty$ consideramos la cantidad

$$\|f\|_{L^{p,\infty}} = \sup_{\alpha>0} \left\{ \alpha d_f(\alpha)^{\frac{1}{p}} \right\}. \tag{1.26}$$

Cuando $p = q = +\infty$, definimos $L^{\infty,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K}) = L^\infty(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$.

Antes de exponer las propiedades que se deducen de esta definición, es necesario hacer algunas observaciones sobre estas expresiones y sobre los valores de los índices p, q.

El primer punto que es importante notar está relacionado con la fórmula (1.26) que corresponde al caso cuando $q \to +\infty$ en la expresión (1.25) y de esta manera vemos que los espacios de Lorentz $L^{p,q}$ que acabamos de definir constituyen una *familia* de espacios funcionales que contiene naturalmente, es decir como un caso límite, a los espacios $L^{p,\infty}$ estudiados en la sección anterior (Ver también el Teorema 4.2.8 del Volumen 1 o la Proposición 1.2.12, página 75, un poco más adelante en este libro).

Segundo, y como anunciado anteriormente, tenemos el hecho siguiente: si fijamos $q = p$ en la expresión (1.25), lo que obtenemos son los espacios de Lebesgue usuales: en efecto siguiendo la Definición 1.2.1 tenemos, para todo $0 < p < +\infty$, la identidad

$$\|f\|_{L^{p,p}} = p^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{+\infty} \alpha^{p-1} d_f(\alpha) d\alpha\right)^{\frac{1}{p}},$$

y hemos demostrado en la Proposición 1.1.2 página 9 que esta expresión es igual a la funcional $\|f\|_{L^p}$. De esta manera podemos escribir

$$\|f\|_{L^{p,p}} = \|f\|_{L^p}, \tag{1.27}$$

y hemos verificado el resultado siguiente

Proposición 1.2.1 *Sea* $(X, \mathscr{A}, \mu)$ *un espacio medido. Para todo* $0 < p < +\infty$ *tenemos la identificación de espacios*

$$L^{p,p}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K}) = L^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K}).$$

De esta forma obtenemos en este caso muy particular muchos ejemplos conocidos de funciones que pertenecen a estos espacios. Sabemos además que si $1 \leq p < +\infty$, la cantidad $\|\cdot\|_{L^p}$ es una norma y los espacios de Lebesgue L^p asociados son espacios de Banach. Dado que se tiene la identidad (1.27), los espacios de Lorentz $L^{p,p}$ también serán espacios de Banach cuando $1 \leq p < +\infty$: veremos posteriormente cómo extender esta estructura topológica al resto de espacios de Lorentz generales.

Indiquemos ahora que el caso $p = +\infty$ y $0 < q < +\infty$ no está considerado en la definición anterior, pero esto no es un problema como tendremos la oportunidad de verlo un poco más adelante con la Observación 1.8.

Notamos también que el caso $p = q = +\infty$ corresponde simplemente al espacio de Lebesgue L^∞, que al haber sido estudiado en detalle en el Volumen 1 y Volumen 2, no será tratado aquí.

Finalmente, podemos ver que tanto los espacios $L^{p,q}$ como los espacios $L^{p,\infty}$ están caracterizados por medio de expresiones que hacen intervenir las funciones de distribución, y entonces es de esperarse que muchas de las propiedades de los espacios $L^{p,\infty}$ que se han expuesto en las páginas anteriores sean comunes con los espacios de Lorentz generales $L^{p,q}$. Por ejemplo, todos estos espacios deben ser considerados como espacios de *clases de funciones*: dos funciones f, g que pertenecen a estos espacios serán consideradas iguales si son iguales en μ-casi todas partes[14].

[14]Ver la Observación 1.1, página 5, para este punto particular.

Una vez que hemos aclarado estos puntos, dividimos nuestro primer estudio de estos espacios en diversas subsecciones: primero expondremos algunos ejemplos fundamentales de funciones que pertenecen a los espacios de Lorentz y luego veremos de qué tipo de estructura topológica general se dispone sobre estos espacios, pero lastimosamente, la caracterización dada de los espacios $L^{p,q}$ que se basa sobre la función de distribución d_f no es de gran utilidad para estudiar en detalle este aspecto. Generalizaremos después una desigualdad de interpolación que será retomada en el capítulo siguiente y terminaremos con unas propiedades interesantes de estos espacios cuando el espacio de base es $\mathbb{R}^n$.

A) Primeros ejemplos

Presentamos ahora dos ejemplos de funciones que pertenecen a estos espacios. Como el espacio $L^{p,\infty}$ ya ha sido estudiado en la sección anterior, nos concentramos aquí en los espacios $L^{p,q}$ con $0 < p, q < +\infty$.

(i) El primer ejemplo de funciones que pertenecen a estos espacios es muy *simple*: sobre un espacio medido $(X, \mathscr{A}, \mu)$, consideremos $f(x) = \mathbb{1}_A(x)$ en donde A es conjunto medible tal que $\mu(A) < +\infty$ y vamos a ver que esta función pertenece a los espacios de Lorentz $L^{p,q}$. En efecto, sabemos por las propiedades de la función de distribución que si $0 \leq \alpha < 1$, entonces $d_f(\alpha) = \mu(A)$, pero si $\alpha \geq 1$ entonces $d_f(\alpha) = 0$ y esta observación nos permite considerar la integral (1.25) únicamente sobre el intervalo $[0, 1]$ y podemos escribir

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^{p,q}} &= p^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 \left(\alpha\, \mu(A)^{\frac{1}{p}} \right)^q \frac{d\alpha}{\alpha} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= p^{\frac{1}{q}} \mu(A)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \alpha^{q-1} d\alpha \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\frac{p}{q} \right)^{\frac{1}{q}} \mu(A)^{\frac{1}{p}}. \qquad (1.28) \end{aligned}$$

De esta manera obtenemos que, para todo $0 < p, q < +\infty$, las funciones indicatrices de conjuntos de μ-medida finita pertenecen a los espacios de Lorentz $L^{p,q}$ y se tiene

$$\|\mathbb{1}_A\|_{L^{p,q}} = \left(\frac{p}{q} \right)^{\frac{1}{q}} \mu(A)^{\frac{1}{p}}.$$

Notar que en este ejemplo el índice q juega un rol de renormalización, pues si hacemos variar la medida del conjunto A, esta modificación se modula únicamente con respecto al primer parámetro p.

(ii) Sobre el espacio medido $\mathbb{R}^n$, consideramos la función siguiente

$$f(x) = \begin{cases} |x|^{\frac{-n}{a}} & \text{si } |x| \leq 1, \\ & \\ |x|^{\frac{-n}{b}} & \text{si } |x| > 1. \end{cases} \qquad (1.29)$$

en donde $a, b > 0$ son parámetros que fijaremos después. Siguiendo los cálculos realizados en la expresión (1.6) de la página 12, tenemos el siguiente comportamiento para la función de distribución d_f:

$$d_f(\alpha) = \begin{cases} \alpha^{-a} v_n & \text{si } \alpha \geq 1, \\ \\ \alpha^{-b} v_n & \text{si } \alpha < 1, \end{cases}$$

en donde v_n designa el volumen de la bola unidad. De esta manera, tenemos para todo $0 < p, q < +\infty$:

$$\begin{aligned} \|f\|^q_{L^{p,q}} &= p\int_0^1 \alpha^{q-1}\, d_f(\alpha)^{\frac{q}{p}} d\alpha + p\int_1^{+\infty} \alpha^{q-1}\, d_f(\alpha)^{\frac{q}{p}} d\alpha \\ &= p\int_0^1 \alpha^{q-1}\, (\alpha^{-a} v_n)^{\frac{q}{p}} d\alpha + p\int_1^{+\infty} \alpha^{q-1}\, (\alpha^{-b} v_n)^{\frac{q}{p}} d\alpha \\ &= p\, v_n^{\frac{q}{p}} \int_0^1 \alpha^{q(1-a/p)-1} d\alpha + p\, v_n^{\frac{q}{p}} \int_1^{+\infty} \alpha^{q(1-b/p)-1} d\alpha, \end{aligned}$$

y por lo tanto vemos que si $1-a/p > 0$ y si $1-b/p < 0$, entonces tenemos $f \in L^{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{R})$, más precisamente obtenemos

$$\|f\|_{L^{p,q}} = \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{q}} v_n^{\frac{1}{p}} \left(\frac{p}{p-a} + \frac{p}{b-p}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Este tipo de funciones permite, calibrando correctamente los parámetros a, b, construir funciones que pertenecen a un espacio de Lorentz L^{p_0,q_0}, pero que no pertenecen al espacio L^{p_1,q_1} en donde $p_0 \neq p_1$ y en donde $0 < q_0, q_1 < +\infty$ son cualquiera.

Indiquemos que estos mismos ejemplos[15] han sido utilizados para diferenciar los espacios de Lebesgue. En particular el lector notará que en estos ejemplos el segundo parámetro $0 < q < +\infty$ no interviene para discriminar la pertenencia a los espacios de Lorentz: dicho de otra manera, si los índices a, b están calibrados de tal manera que $f \in L^{p,q}$ con $0 < p, q < +\infty$, entonces también se tiene $f \in L^{p,\sigma}$ con $0 < \sigma < +\infty$. Este aspecto es interesante pues si las funciones (1.29) permiten distinguir los espacios de Lebesgue L^p, éstas últimas no son suficientes para diferenciar los espacios de Lorentz L^{p,q_0} y L^{p,q_1}.

¿Qué significa esto? Tanto los ejemplos de funciones indicatrices de conjuntos de medida finita estudiados en (1.28) como las funciones dadas en (1.29) muestran que, cuando el primer parámetro p está fijo, entonces para todo $0 < q < +\infty$, todos los espacios $L^{p,q}$ miden el tamaño de las funciones de manera (relativamente) similar y esto ejemplifica el rol *dominante* del primer parámetro p (que define el marco general) con respecto al segundo parámetro q que permite afinar la información.

[15]Ver la Sección 4.2.1 del Volumen 1.

Veremos más adelante, en el Teorema 1.2.9 y con la Observación 1.10, ejemplos de funciones que sí permiten distinguir los espacios de Lorentz L^{p,q_0} y L^{p,q_1}, es decir donde el parámetro de base p está fijo mientras que el segundo índice varía.

B) Propiedades estructurales generales

Nos concentramos ahora en el resultado a continuación que es la generalización de la Proposición 1.1.3 a los espacios $L^{p,q}$.

Proposición 1.2.2 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido, sean $0 < p < +\infty$ y $0 < q \leq +\infty$ dos parámetros reales.*

1) Los espacios de Lorentz $L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ son subespacios vectoriales del conjunto de funciones medibles.

2) Además se tiene la implicación $\|f\|_{L^{p,q}} = 0 \Longrightarrow f = 0$ en μ-casi todas partes.

Prueba. El caso $0 < p < +\infty$ y $q = +\infty$ ya ha sido tratado en la Proposición 1.1.3, de manera que nos concentramos en el caso cuando $0 < q < +\infty$.

1) Sea $\lambda \in \mathbb{K}^*$, por el punto 3) de la Proposición 1.1.1 página 7 tenemos la identidad $d_{\lambda f}(\alpha) = d_f(\alpha/|\lambda|)$ y con un cambio de variable podemos escribir

$$\begin{aligned}
\|\lambda f\|_{L^{p,q}} &= p^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^{+\infty} \left(\alpha\, d_{\lambda f}(\alpha)^{\frac{1}{p}} \right)^q \frac{d\alpha}{\alpha} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= p^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^{+\infty} \left(\alpha\, d_f(\alpha/|\lambda|)^{\frac{1}{p}} \right)^q \frac{d\alpha}{\alpha} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= |\lambda|\, p^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^{+\infty} \left(\alpha\, d_f(\alpha)^{\frac{1}{p}} \right)^q \frac{d\alpha}{\alpha} \right)^{\frac{1}{q}} = |\lambda|\, \|f\|_{L^{p,q}}, \quad (1.30)
\end{aligned}$$

de donde se deduce que $\lambda f \in L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$.

Si $f, g \in L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$, verifiquemos que $f + g \in L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$. Para ello utilizamos los cálculos realizados en la Proposición 1.1.3, página 13, en donde se obtienen las desigualdades (1.8), que reescribimos de la siguiente manera

$$\alpha\, d_{f+g}^{\frac{1}{p}}(\alpha) \leq \text{máx}(2^{\frac{1}{p}}, 2) \left((\alpha/2)\, d_f^{\frac{1}{p}}(\alpha/2) + (\alpha/2)\, d_g^{\frac{1}{p}}(\alpha/2) \right).$$

A partir de esta mayoración reconstruimos la cantidad $\|\cdot\|_{L^{p,q}}$ y tenemos

$$\|f+g\|_{L^{p,q}} = p^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^{+\infty} \left(\alpha\, d_{f+g}(\alpha)^{\frac{1}{p}} \right)^q \frac{d\alpha}{\alpha} \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \text{máx}(2^{\frac{1}{p}}, 2)\, p^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^{+\infty} \left((\alpha/2)\, d_f^{\frac{1}{p}}(\alpha/2) + (\alpha/2)\, d_g^{\frac{1}{p}}(\alpha/2) \right)^q \frac{d\alpha}{\alpha} \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \quad \text{máx}(2^{\frac{1}{p}},2)\,\text{máx}(2^{1-\frac{1}{q}},2^{\frac{1}{q}-1})\; p^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^{+\infty}\left((\alpha/2)\; d_f^{\frac{1}{p}}(\alpha/2)\right)^q \frac{d\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+ \quad \text{máx}(2^{\frac{1}{p}},2)\,\text{máx}(2^{1-\frac{1}{q}},2^{\frac{1}{q}-1})\; p^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^{+\infty}\left((\alpha/2)\; d_g^{\frac{1}{p}}(\alpha/2)\right)^q \frac{d\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{1}{q}},
\end{aligned}$$

de donde se deduce la desigualdad

$$\|f+g\|_{L^{p,q}} \leq \text{máx}(2^{\frac{1}{p}},2)\,\text{máx}(2^{1-\frac{1}{q}},2^{\frac{1}{q}-1})\,(\|f\|_{L^{p,q}}+\|g\|_{L^{p,q}})\,, \quad (1.31)$$

lo que muestra que $f+g \in L^{p,q}(X,\mathscr{A},\mu,\mathbb{K})$ y hemos verificado que el espacio $L^{p,q}(X,\mathscr{A},\mu,\mathbb{K})$ es un subespacio vectorial del conjunto de funciones medibles.

2) Por las propiedades de la integral que define la funcional $\|\cdot\|_{L^{p,q}}$, tenemos por el Corolario 3.2.9 del Volumen 1, que $\|f\|_{L^{p,q}} = 0 \Longrightarrow \alpha\; d_f^{\frac{1}{p}}(\alpha) = 0$, para casi todo $\alpha > 0$, de donde se deduce sin mayor problema que la función f es nula en μ-casi todas partes. ■

Con las fórmulas (1.30), (1.31) y con el punto 2) de la proposición anterior hemos verificado lo siguiente.

Corolario 1.2.1 *Sea $(X,\mathscr{A},\mu)$ un espacio medido, sean $0 < p < +\infty$ y $0 < q \leq +\infty$ dos parámetros reales. La funcional $\|\cdot\|_{L^{p,q}}$ determinada por la expresión (1.25) y definida sobre los espacios de Lorentz $L^{p,q}(X,\mathscr{A},\mu,\mathbb{K})$ es una cuasi-norma.*

Mostraremos que los espacios $(L^{p,q},\|\cdot\|_{L^{p,q}})$ son espacios cuasi-normados completos, pero posponemos la demostración de este hecho a la Sección 1.2.3 en donde presentaremos otra manera equivalente de caracterizar los espacios de Lorentz que nos permitirá ir mucho más lejos en la presentación de las propiedades de estos espacios de funciones.

C) Desigualdad de Interpolación

Generalizamos aquí el Teorema 1.1.2 de la página 25, a los espacios de Lorentz $L^{p,q}$ que han sido caracterizados por medio de la función de distribución d_f en la Definición 1.2.1.

Teorema 1.2.1 (Interpolación) *Sea $(X,\mathscr{A},\mu)$ un espacio medido, sean $0 < p_0 < p_1 \leq +\infty$ dos parámetros reales y sea f una función medible tal que $f \in L^{p_0,\infty}(X,\mathscr{A},\mu,\mathbb{K}) \cap L^{p_1,\infty}(X,\mathscr{A},\mu,\mathbb{K})$, entonces $f \in L^{p,q}(X,\mathscr{A},\mu,\mathbb{K})$ para todo $p_0 < p < p_1$ y todo $0 < q < +\infty$ y además se tiene la desigualdad de interpolación siguiente*

$$\|f\|_{L^{p,q}} \leq C(p_0,p,p_1,q)\|f\|^{\theta}_{L^{p_0,\infty}}\|f\|^{1-\theta}_{L^{p_1,\infty}},$$

donde $\theta = \frac{p_0(p_1-p)}{p(p_1-p_0)}$ si $p_1 < +\infty$ y donde $\theta = \frac{p_0}{p}$ si $p_1 = +\infty$.

La demostración de este teorema sigue esencialmente las mismas etapas que las del Teorema 1.1.2 pero vamos a presentar los detalles para la mayor comodidad del lector.

Demostración. Supongamos para empezar que se tiene $0 < p_1 < +\infty$. Puesto que $f \in L^{p_0,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K}) \cap L^{p_1,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$, tenemos las mayoraciones

$$d_f(\alpha) \leq \frac{\|f\|^{p_0}_{L^{p_0,\infty}}}{\alpha^{p_0}} \qquad \text{y} \qquad d_f(\alpha) \leq \frac{\|f\|^{p_1}_{L^{p_1,\infty}}}{\alpha^{p_1}},$$

a partir de lo cual escribimos

$$d_f(\alpha) \leq \text{mín}\left(\frac{\|f\|^{p_0}_{L^{p_0,\infty}}}{\alpha^{p_0}}, \frac{\|f\|^{p_1}_{L^{p_1,\infty}}}{\alpha^{p_1}}\right).$$

Utilizando la definición de los espacios de Lorentz $L^{p,q}$ dada con la expresión (1.25) tenemos:

$$\begin{aligned}
\|f\|^q_{L^{p,q}} &= p\int_0^{+\infty} \alpha^{q-1} d_f^{\frac{q}{p}}(\alpha)d\alpha \\
&\leq p\int_0^{+\infty} \alpha^{q-1}\,\text{mín}\left(\frac{\|f\|^{p_0}_{L^{p_0,\infty}}}{\alpha^{p_0}}, \frac{\|f\|^{p_1}_{L^{p_1,\infty}}}{\alpha^{p_1}}\right)^{\frac{q}{p}} d\alpha \\
&\leq p\int_0^{T} \alpha^{q(1-\frac{p_0}{p})-1}\|f\|^{q\frac{p_0}{p}}_{L^{p_0,\infty}} d\alpha + p\int_T^{+\infty} \alpha^{q(1-\frac{p_1}{p})-1}\|f\|^{q\frac{p_1}{p}}_{L^{p_1,\infty}} d\alpha,
\end{aligned}$$

en donde hemos fijado $T = \left(\frac{\|f\|^{p_1}_{L^{p_1,\infty}}}{\|f\|^{p_0}_{L^{p_0,\infty}}}\right)^{\frac{1}{p_1-p_0}} < +\infty$. Como $p_0 < p < p_1$, evaluando el valor de estas integrales se tiene

$$\begin{aligned}
\|f\|^q_{L^{p,q}} &\leq C(p_0,p,q)\|f\|^{q\frac{p_0}{p}}_{L^{p_0,\infty}} T^{q(1-\frac{p_0}{p})} + C(p,p_1,q)\|f\|^{q\frac{p_1}{p}}_{L^{p_1,\infty}} T^{q(1-\frac{p_1}{p})} \\
&\leq C(p_0,p,p_1,q)\|f\|^{q\frac{p_0(p_1-p)}{p(p_1-p_0)}}_{L^{p_0,\infty}} \|f\|^{q(1-\frac{p_0(p_1-p)}{p(p_1-p_0)})}_{L^{p_1,\infty}},
\end{aligned}$$

y extrayendo la raíz q-ésima de esta desigualdad anterior y con la definición del parámetro θ obtenemos

$$\|f\|_{L^{p,q}} \leq C(p_0,p,p_1,q)\|f\|^{\theta}_{L^{p_0,\infty}}\|f\|^{1-\theta}_{L^{p_1,\infty}},$$

lo que proporciona la mayoración buscada cuando $0 < p_1 < +\infty$.

Pasemos ahora al caso cuando $p_1 = +\infty$. Por definición tenemos $L^{\infty,\infty} = L^{\infty}$ y entonces se tiene $d_f(\alpha) = 0$ si $\alpha > \|f\|_{L^\infty}$, lo que nos permite escribir

$$\|f\|^q_{L^{p,q}} = p\int_0^{+\infty} \alpha^{q-1} d_f^{\frac{q}{p}}(\alpha)d\alpha = p\int_0^{\|f\|_{L^\infty}} \alpha^{q-1} d_f^{\frac{q}{p}}(\alpha)d\alpha,$$

pero como $d_f(\alpha) \leq \alpha^{-p_0}\|f\|^{p_0}_{L^{p_0,\infty}}$, entonces

$$\|f\|^q_{L^{p,q}} \leq p\int_0^{\|f\|_{L^\infty}} \alpha^{q-1}\alpha^{-q\frac{p_0}{p}}\|f\|^{q\frac{p_0}{p}}_{L^{p_0,\infty}} d\alpha,$$

y evaluando esta integral obtenemos $\|f\|^q_{L^{p,q}} \leq C(p_0,p,q)\|f\|^{q\frac{p_0}{p}}_{L^{p_0,\infty}}\|f\|^{q(1-\frac{p_0}{p})}_{L^\infty}$, basta extraer la raíz q-ésima para obtener el resultado buscado. ∎

Observación 1.5 Nótese que el valor $q = +\infty$ no ha sido tomado en cuenta en este resultado. Esto no es ningún problema como nos lo indica el Corolario 1.2.6 de la página 79.

D) Propiedades particulares cuando $X = \mathbb{R}^n$

Para terminar esta sección generalizamos a los espacios de Lorentz $L^{p,q}$ la Proposición 1.1.9 página 21 que explicitaba dos propiedades adicionales cuando el espacio de base es $\mathbb{R}^n$.

Proposición 1.2.3 (Traslación y Dilatación en $L^{p,q}$) *Sean $0 < p < +\infty$ y $0 < q \leq +\infty$ dos parámetros reales. Consideremos los espacios de Lorentz $L^{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{K})$. Entonces, para todo $\tau \in \mathbb{R}^n$ y todo $\lambda > 0$ tenemos las identidades siguientes*

$$\|f_\tau\|_{L^{p,q}} = \|f\|_{L^{p,q}} \quad y \quad \|\delta_\lambda[f]\|_{L^{p,q}} = \lambda^{-\frac{n}{p}}\|f\|_{L^{p,q}},$$

en donde $f_\tau(x) = f(x+\tau)$ con $\tau \in \mathbb{R}^n$ representa la traslación de la función f y $\delta_\lambda[f](x) = f(\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n)$, con $\lambda > 0$, es la dilatación de la función f.

Prueba. Estudiamos únicamente el caso $0 < q < +\infty$ pues el caso $q = +\infty$ ya ha sido estudiado con la Proposición 1.1.9 y de esta manera trabajamos con la funcional $\|\cdot\|_{L^{p,q}}$ definida en la fórmula (1.25). Entonces, para la primera identidad tenemos por la fórmula (1.12) que $d_{f_\tau} = d_f$ de donde se deduce sin problema el resultado, mientras que para la segunda identidad basta aplicar la igualdad $d_{\delta_\lambda[f]} = \lambda^{-n} d_f$ demostrada en la expresión (1.13) para terminar la prueba de la proposición. ■

Recordemos ahora la noción de *dimensión homogénea* de un espacio de funciones dada en la Definición 4.2.4 del Volumen 1.

Definición 1.2.2 (Dimensión Homogénea) *Sea $E = \{f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{K} : \|f\|_E < +\infty\}$ un espacio funcional. Diremos que el espacio E es* homogéneo *si existe un índice real σ tal que se tenga para todo $f \in E$ la identidad*

$$\|\delta_\alpha[f]\|_E = \alpha^{-\sigma}\|f\|_E, \quad (\alpha > 0).$$

El parámetro real σ será llamado la dimensión homogénea *del espacio E.*

Tenemos entonces que tanto los espacios de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^n)$ con $0 < p \leq +\infty$ y los espacios de Lorentz generales $L^{p,q}(\mathbb{R}^n)$ con $0 < p < +\infty$ y $0 < q \leq +\infty$ son espacios de funciones homogéneos de dimensión homogéna $\sigma = \frac{n}{p}$. Como vemos aquí, en la dimensión homogénea de los espacios de Lorentz no interviene el segundo índice q y esto es un otro ejemplo, además de los ejemplos (i) y (ii) dados en la página 38, del rol preponderante del primer índice p.

Como vemos con los resultados anteriores, algunas de las características de los espacios de Lorentz $L^{p,\infty}$ se generalizan sin mayor problema a los espacios de Lorentz $L^{p,q}$ con $0 < q < +\infty$.

Hemos presentado aquí relativamente pocas propiedades y sería posible continuar nuestra exposición de los espacios de Lorentz utilizando la función de distribución d_f. Sin embargo este punto de vista no es el más adecuado para estudiar en detalle la estructura interna de estos espacios de funciones y para lograr este objetivo será necesario proceder en dos etapas considerando otras funciones que remplazarán a la función de distribución.

La primera de estas etapas está dada en la sección a continuación en donde se utiliza la *función de reordenamiento decreciente* f^* en lugar de la función d_f y tendremos la oportunidad de ver cómo algunas características de los espacios de Lorentz pueden deducirse muy directamente adoptando este punto de vista.

Lastimosamente el uso de la función de reordenamiento decreciente tampoco será suficiente, especialmente si estamos interesados en estudiar las propiedades de normabilidad de estos espacios de funciones, y entonces para completar el panorama utilizaremos una *función maximal* f^{**}, que presentaremos en la Sección 1.3.1 y que constituye la segunda etapa mencionada anteriormente.

1.2.2. Función de reordenamiento decreciente f^*

En la secciones anteriores hemos utilizado la función de distribución d_f para definir a los espacios de Lorentz $L^{p,q}$ con $0 < p < +\infty$ y $0 < q \leq +\infty$. Vamos ahora a utilizar la función de reordenamiento decreciente para estudiar estos espacios.

Definición 1.2.3 (Función de reordenamiento decreciente) *Sea* $(X, \mathscr{A}, \mu)$ *un espacio medido. Sean* α *y* t *dos parámetros positivos y sea* f *una función medible definida sobre* X *a valores en* $\mathbb{K}$. *La* función de reordenamiento decreciente *de* f *es la función* f^* *definida sobre* $[0, +\infty[$ *a valores reales que está determinada por la expresión*

$$f^*(t) = \inf_{\alpha > 0} \{\alpha : d_f(\alpha) \leq t\}. \tag{1.32}$$

Usaremos la convención $\inf\{\emptyset\} = +\infty$.

Notemos que para obtener la función de reordenamiento decreciente f^* es necesario determinar primero la función de distribución d_f.

Antes de exponer las principales características de la función de reordenamiento decreciente f^*, vamos a estudiar su comportamiento con cinco ejemplos sencillos y compararla a la función de distribución d_f.

(i) En primer lugar consideramos una función simple definida sobre $\mathbb{R}$ de la forma
$$f(x) = c_1 \mathbb{1}_{A_1}(x) + c_2 \mathbb{1}_{A_2}(x), \tag{1.33}$$
en donde $c_2 > c_1 > 0$ y los conjuntos A_j con $j = 1, 2$ son intervalos disjuntos de medida finita. La función de distribución es entonces
$$d_f(\alpha) = (|A_1| + |A_2|)\mathbb{1}_{[0,c_1[}(\alpha) + |A_2|\mathbb{1}_{[c_1,c_2[}(\alpha).$$

En este ejemplo, a partir de la fórmula (1.32) no es muy difícil determinar la función de reordenamiento decreciente, en efecto: si $0 \leq t < |A_2|$ se tiene $f^*(t) = c_2$ y si $|A_2| \leq t < |A_1|+|A_2|$ tenemos $f^*(t) = c_1$, de manera que podemos escribir

$$f^*(t) = c_2\mathbb{1}_{[0,|A_2|[}(t) + c_1\mathbb{1}_{[|A_2|,|A_1+|A_2|[}(t). \tag{1.34}$$

Para visualizar estas transformaciones, representamos las funciones f, d_f y f^* en el gráfico a continuación:

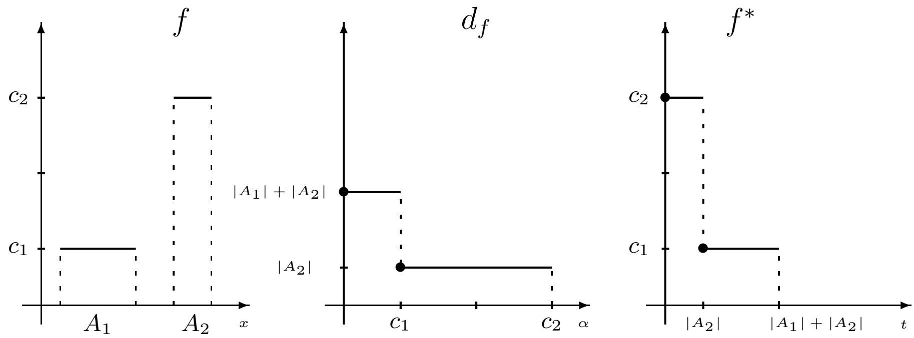

Figura 1.3: Función de reordenamiento decreciente de una función simple.

Como podemos ver aquí, la función f^* lleva bien su nombre pues prácticamente lo único que ha hecho es reordenar de forma decreciente la función inicial f. Desde el punto de vista muy general de *medida* (o del área bajo la función, si se prefiere) estas modificaciones de la función f son "transparentes", en el sentido que se preserva la medida. Esta propiedad ya la habíamos verificado para la función de distribución d_f con la fórmula (1.3) de la página 10 y demostraremos en el Corolario 1.2.2 un resultado análogo para la función de reordenamiento decreciente f^*.

(ii) Demos una versión más general del ejemplo anterior: esto es necesario pues las funciones simples permiten aproximaciones interesantes desde el punto de vista de la teoría de la integración de Lebesgue. Entonces, sobre un espacio medido $(X, \mathscr{A}, \mu)$ consideramos la función $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i\mathbb{1}_{A_i}(x)$, en donde los conjuntos A_i son conjuntos disjuntos de medida finita y donde los reales a_i verifican $a_1 > a_2 > \cdots > a_n > 0$. Tenemos entonces que la función de distribución asociada se escribe $d_f(\alpha) = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i\mathbb{1}_{[a_{i+1},a_i[}(\alpha)$, donde $a_{n+1} = 0$ y $b_i = \sum\limits_{k=1}^{i}\mu(A_k)$. Aplicando los argumentos del ejemplo anterior obtenemos que la función de reordenamiento decreciente está dada por la expresión $f^*(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{[b_{i-1}, b_i[}(t)$, en donde hemos fijado $b_0 = 0$.

En algunas situaciones que serán presentadas en las líneas a continuación, es interesante disponer de otra caracterización de este tipo de funciones y a la función simple f anterior podemos reescribirla de la siguiente manera:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbb{1}_{B_i}(x),$$

en donde los coeficientes c_i son todos reales positivos y los conjuntos B_i son todos de medida finita y forman una sucesión creciente, es decir que se tiene $B_1 \subset B_2 \subset \cdots \subset B_n$. Bajo este punto de vista, lo que se tiene en realidad son las identidades $c_i = a_i - a_{i+1}$ y $B_i = \bigcup_{k=1}^{i} A_k$ y una vez que tenemos esta representación de la función simple, obtenemos que su función de reordenamiento decreciente asociada puede escribirse por medio de la fórmula a continuación

$$f^*(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbb{1}_{[0, \mu(B_i)[}(t). \tag{1.35}$$

El interés de esta representación de la función de reordenamiento decreciente está dado en que las funciones indicatrices de conjuntos que intervienen aquí forman intervalos de la recta real que son crecientes pues se tiene por construcción $\mu(B_i) < \mu(B_{i+1})$.

(iii) En tercer lugar, consideremos sobre $\mathbb{R}^n$ (dotado de su estructura natural) la función

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{1 + |x|^r}, \end{aligned} \tag{1.36}$$

con $r > 0$. Calculemos la función de distribución d_f: por definición tenemos

$$d_f(\alpha) = |\{x \in \mathbb{R}^n : \alpha(1 + |x|^r) < 1\}|,$$

y vemos que si $\alpha \geq 1$ entonces $d_f(\alpha) = 0$, por lo tanto podemos suponer sin pérdida de regularidad que $0 < \alpha < 1$. Luego, escribimos

$$\begin{aligned} d_f(\alpha) &= |\{x \in \mathbb{R}^n : |x| < (1/\alpha - 1)^{\frac{1}{r}}\}| \\ &= |B(0, 1/\alpha - 1)^{\frac{1}{r}})| \\ &= (1/\alpha - 1)^{\frac{n}{r}} |B(0, 1)| \\ &= (1/\alpha - 1)^{\frac{n}{r}} v_n. \end{aligned}$$

Con estos cálculos preliminares y junto con la expresión (1.32) que define la función de reordenamiento decreciente, obtenemos para todo $t > 0$ la fórmula

$$f^*(t) = \frac{1}{1 + (t/v_n)^{\frac{r}{n}}}.$$

En la figura a continuación representamos las funciones f, d_f y f^*.

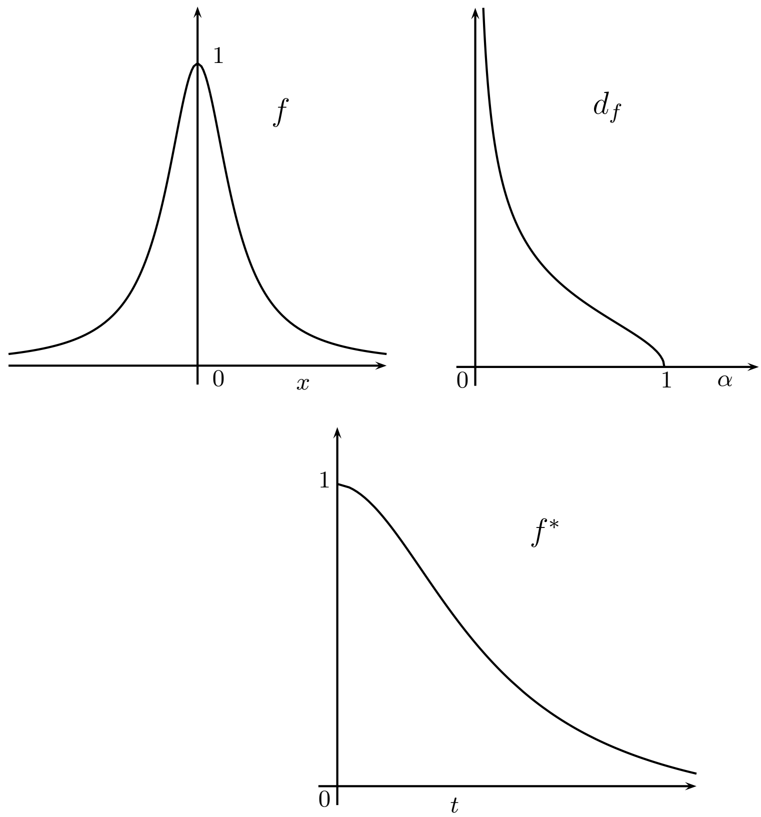

Figura 1.4: Función de reordenamiento decreciente de la función $\frac{1}{1+|x|^r}$.

Este ejemplo merece algunos comentarios. Primero observamos que, contrariamente al ejemplo (i) anterior, ya no es totalmente evidente ver que el área bajo la función f y la función f^* es la misma, pero esto será demostrado en el Corolario 1.2.2. Segundo, y este punto es mucho más importante, se tiene que la función inicial f está definida sobre el espacio $\mathbb{R}^n$ mientras que la función de reordenamiento decreciente f^* está definida sobre el intervalo $[0, +\infty[$: una vez más, y como para la función de distribución, se transpone la "medida" de una función definida en un conjunto X cualquiera sobre la recta $[0, +\infty[$.

(iv) Otro ejemplo está dado por la función

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 1 - e^{-|x|}. \end{aligned} \tag{1.37}$$

La función de distribución es $d_f(\alpha) = |\{x \in \mathbb{R}^n : 1 - e^{-|x|} < \alpha\}|$ y vemos que si $\alpha \geq 1$ entonces se tiene $d_f(\alpha) = 0$, pero si $0 < \alpha < 1$ tenemos siempre $d_f(\alpha) = +\infty$. A partir de esta función de distribución podemos explicitar sin mayor problema la función de reordenamiento decreciente y escribimos $f^*(t) = 1$, si $t > 0$.

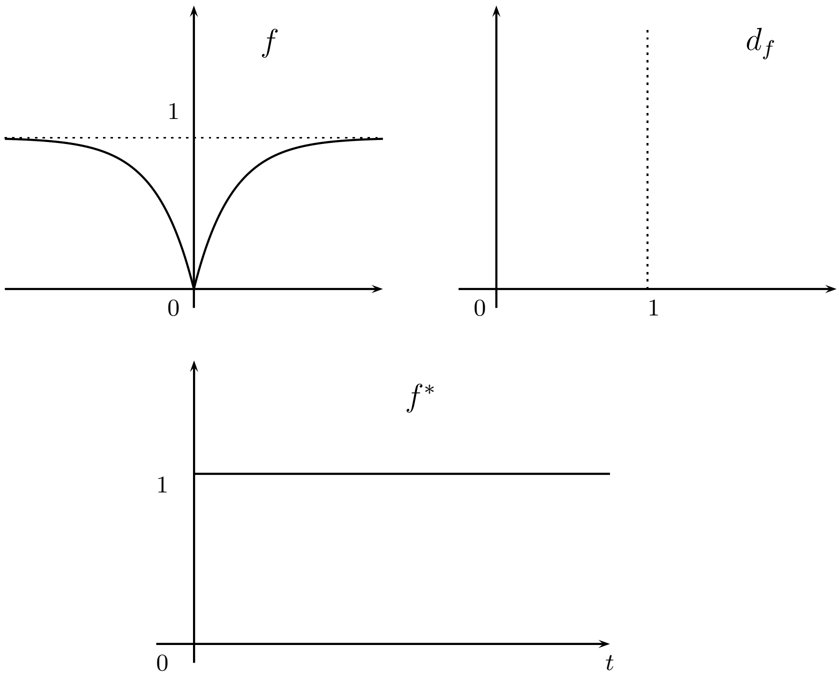

Figura 1.5: Función de reordenamiento decreciente de la función (1.37).

Con este ejemplo, podemos ver que en el paso de f a la función de reordenamiento decreciente f^* se *pierde* mucha información: en particular todo el comportamiento cerca del origen de la función inicial f desaparece completamente al considerar la función f^*, sin embargo, la información que se obtiene es *suficiente* para estudiar el tamaño de las funciones, ya sea desde el punto de vista de los espacios de Lebesgue o de los espacios de Lorentz como tendremos la oportunidad de verlo.

(v) El último ejemplo que presentamos considera el espacio discreto $\mathbb{N}$ y su estructura usual. En este caso las funciones son sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y entonces el hecho de considerar el reordenamiento decreciente de una sucesión puede verse de manera más directa como un arreglo particular (es decir una permutación) de los valores de la sucesión. Dicho de otra manera, el uso de la fórmula (1.32) nos conduce a definir una nueva sucesión $(a_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ que verifica $a_n^* = a_{\sigma(n)}$ en donde σ es una permutación. Ver más detalles en la Sección 1.6.1.

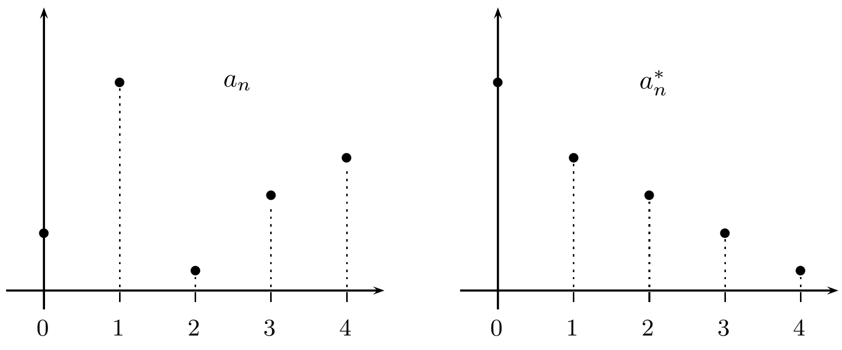

Figura 1.6: Función de reordenamiento decreciente de una sucesión.

Ahora que hemos trabajado un poco con la función f^*, es necesario exponer sus propiedades pues éstas determinarán el comportamiento de los espacios de Lorentz. En las páginas que siguen vamos a descomponer nuestra exposición en dos partes: la primera se concentra en las relaciones entre la función de reordenamiento decreciente f^* y la función de distribución d_f, mientras que la segunda presenta las desigualdades de Hardy-Littlewood que nos llevarán a considerar la noción de *espacios resonantes* cuyas propiedades serán de utilidad posteriormente.

A) Propiedades y relaciones entre f^* y d_f

El primer resultado que damos es el siguiente que nos indica que la función de reordenamiento decreciente f^* es en realidad un tipo muy especial de función de distribución.

Proposición 1.2.4 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido y sea f una función medible definida sobre X a valores en $\mathbb{K}$. Entonces tenemos $d_f(f^*(t)) \leq t$. Se tiene además la identidad $f^*(t) = d_{d_f}(t), t \geq 0$.*

Prueba. Recordemos que por la definición de función de distribución d_f, dada en la fórmula (1.1) página 5, tenemos $d_f(\alpha) = \mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\})$, mientras que para la función de reordenamiento decreciente f^*, que está definida por la expresión (1.32), tenemos $f^*(t) = \inf\limits_{\alpha>0}\{\alpha : d_f(\alpha) \leq t\}$. De esta manera podemos escribir

$$d_f(f^*(t)) = d_f(\inf\{\alpha : d_f(\alpha) \leq t\}) \leq t,$$

pues la función de distribución es continua por la derecha.

Pasemos al segundo punto. Tenemos, usando la continuidad por la derecha de la función de distribución, la identidad

$$\sup_{\alpha>0}\{\alpha : d_f(\alpha) > t\} = |\{\alpha : d_f(\alpha) > t\}|.$$

Luego, una vez más por la continuidad por la derecha de la función de distribución tenemos

$$f^*(t) = \text{ínf}\{\alpha : d_f(\alpha) \leq t\} = \sup\{\alpha : d_f(\alpha) > t\} = |\{\alpha : d_f(\alpha) > t\}| = d_{d_f}(t),$$

lo que demuestra el segundo punto. ■

Esta proposición es particularmente interesante pues relaciona de una manera diferente la función de reordenamiento decreciente f^* a la función de distribución d_f, pero sobre todo nos indica que la función de reordenamiento decreciente es en realidad una función de distribución, de modo que estamos en derecho de obtener propiedades similares a las obtenidas para la función d_f que se han expuesto en la Proposición 1.1.1, página 7, y en efecto se tiene el resultado siguiente.

Proposición 1.2.5 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido. Sean f y g dos funciones medibles definidas sobre X a valores en $\mathbb{K}$, tenemos entonces los puntos siguientes*

1) *se tiene $f^* = (|f|)^*$ y la función f^* es decreciente continua por la derecha sobre $[0, +\infty[$. Además si f y $\tilde{f}$ son dos funciones equidistribuidas, entonces se tiene $f^* = \tilde{f}^*$,*

2) *para todo $\lambda \in \mathbb{K}^*$ se tiene $(\lambda f)^*(t) = |\lambda| f^*(t)$,*

3) *si $0 < p < +\infty$, entonces $(|f|^p)^*(t) = (f^*)^p(t)$,*

4) *si $|g(x)| \leq |f(x)|$ en μ-casi todas partes, se tiene $g^*(t) \leq f^*(t)$, para $t \geq 0$. En particular, si $f = f^+ - f^-$, se tiene $(f^\pm)^*(t) \leq f^*(t)$.*

5) *si $t_1, t_2 \geq 0$ entonces $(f + g)^*(t_1 + t_2) \leq f^*(t_1) + g^*(t_2)$,*

6) *si $t_1, t_2 \geq 0$ se tiene $(fg)^*(t_1 + t_2) \leq f^*(t_1) g^*(t_2)$,*

7) *si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones medibles tales que se tiene $|f(x)| \leq \liminf\limits_{n\to+\infty} |f_n|$ en μ-casi todas partes, entonces $f^* \leq \liminf\limits_{n\to+\infty} f_n^*$.*

Prueba. Muchos de los puntos anteriores pueden deducirse rápidamente siguiendo los pasos expuestos en la demostración de la Proposición 1.1.1, pero para la mayor comodidad del lector detallamos un poco los argumentos.

1) La idendidad $f^* = (|f|)^*$ se deduce por las propiedades de la función de distribución:

$$(|f|)^*(t) = \inf_{\alpha>0}\{\alpha : d_{|f|}(\alpha) \leq t\} = \inf_{\alpha>0}\{\alpha : d_f(\alpha) \leq t\} = f^*(t).$$

Sean ahora $t_2 > t_1 > 0$, tenemos por el decrecimiento de la función de distribución

$$f^*(t_2) = \inf_{\alpha>0}\{\alpha : d_f(\alpha) \leq t_2\} \leq \inf_{\alpha>0}\{\alpha : d_f(\alpha) \leq t_1\} = f^*(t_1),$$

de donde se obtiene sin problema el decrecimiento de la función f^*. La continuidad a la derecha de f^* se deduce de la continuidad a la derecha de d_f. Finalmente, si f y $\tilde{f}$ son equidistribuidas, por definición su función de distribución d_f es la misma, de donde se obtiene inmediatamente que $f^* = \tilde{f}^*$.

2) Para el segundo punto basta escribir

$$\begin{aligned}(\lambda f)^*(t) &= \inf_{\alpha>0}\{\alpha : d_{\lambda f}(\alpha) \leq t\} = \inf\{\alpha : d_f(\alpha/|\lambda|) \leq t\}\\ &= \inf\{|\lambda|\nu : d_f(\nu) \leq t\} = |\lambda| f^*(t).\end{aligned}$$

3) Si $0 < p < +\infty$ entonces

$$\begin{aligned}(|f|^p)^*(t) &= \inf\{\alpha : \mu(\{x \in X : |f|^p > \alpha\}) \leq t\}\\ &= \inf\{\nu^p : \mu(\{x \in X : |f| > \nu\}) \leq t\} = (f^*)^p(t).\end{aligned}$$

4) Este punto es sencillo pues solo hay que utilizar las propiedades de la función de distribución que permite obtener la función de reordenamiento decreciente. Ver el punto 2) de la Proposición 1.1.1, página 7. En particular tenemos $f^{\pm}(x) \leq |f(x)|$, de donde se deduce $(f^{\pm})^*(t) \leq (|f|)^*(t) = f^*(t)$.

5) Esta desigualdad se basa en las observaciones siguientes: supongamos primero que $f^*(t_1) + g^*(t_2) < +\infty$ (sino no hay nada que demostrar) y entonces escribimos

$$d_{f+g}(f^*(t_1) + g^*(t_2)) \leq d_f(f^*(t_1)) + d_g(g^*(t_2)) \leq t_1 + t_2,$$

en donde la primera estimación está dada por la propiedad 4) de la Proposición 1.1.1 de las funciones de distribución expuesta en la página 7 mientras que la segunda desigualdad se deduce de la Proposición 1.2.4. Entonces, por definición de la función de reordenamiento decreciente tenemos

$$(f + g)^*(t_1 + t_2) = \inf\{\alpha : d_{f+g}(\alpha) \leq t_1 + t_2\} \leq f^*(t_1) + g^*(t_2).$$

6) Este punto se demuestra de forma similar. Observamos en efecto que

$$d_{fg}(f^*(t_1)g^*(t_2)) \leq d_f(f^*(t_1)) + d_g(g^*(t_2)) \leq t_1 + t_2$$

por las propiedades de la función de distribución y por la Proposición 1.2.4. Luego, por definición de la función de reordenamiento decreciente se tiene

$$(fg)^*(t_1 + t_2) = \inf\{\alpha : d_{fg}(\alpha) \leq t_1 + t_2\} \leq f^*(t_1)g^*(t_2).$$

7) El último punto se deduce utilizando la propiedad correspondiente de la función de distribución d_f. ■

Las propiedades anteriores de la función de reordenamiento decreciente f^* son esencialmente una consecuencia del hecho que esta función es una función de distribución particular, y si bien en la Proposición 1.2.4 hemos expuesto algunas relaciones entre la función de distribución d_f y la función de reordenamiento decreciente f^*, es necesario profundizar un poco más este punto, pues necesitamos definir los espacios de Lorentz, dados inicialmente por medio de la función d_f en (1.25), utilizando la funcion f^*.

Proposición 1.2.6 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido. Sea f una función medible definida sobre X a valores en $\mathbb{K}$. Entonces*

1) *se tiene $f^*(d_f(\alpha)) \leq \alpha$ siempre y cuando $d_f(\alpha) < +\infty$;*

2) *si $f^*(t) < +\infty$ entonces*

$$d_f(f^*(t)) = \mu(\{x \in X : |f(x)| > f^*(t)\}) \leq t \leq \mu(\{x \in X : |f(x)| \geq f^*(t)\}),$$

3) *para $0 < p < +\infty$ se tiene*

$$\sup_{t>0} \left\{t^p f^*(t)\right\} = \sup_{\alpha>0} \left\{\alpha d_f^p(\alpha)\right\},$$

4) *las funciones f y f^* son* equidistribuidas, *es decir $d_f(\alpha) = d_{f^*}(\alpha)$, o de forma equivalente*

$$\mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}) = |\{t \in [0, +\infty[: f^*(t) > \alpha\}|, \tag{1.38}$$

5) *si $A \subset X$ es un conjunto μ-medible y si la función f es positiva, entonces*

$$(f \mathbb{1}_A)^*(t) \leq f^*(t) \mathbb{1}_{[0,\mu(A)[}(t),$$

para $t \geq 0$. En particular, si $\mu(A) < +\infty$, se tiene $(\mathbb{1}_A)^*(t) = \mathbb{1}_{[0,\mu(A)[}(t)$.

Prueba.

1) Hemos visto en la Proposición 1.2.4 que se tiene $d_f(f^*(t)) \leq t$, en este punto estudiamos en cambio la función $f^*(d_f(\alpha))$ y tenemos directamente

$$f^*(d_f(\alpha)) = \inf_{\nu>0} \{d_f(\nu) \leq d_f(\alpha)\} \leq \alpha.$$

2) La primera desigualdad no es más que la primera parte de la Proposición 1.2.4, de manera que nos concentramos en la segunda desigualdad. Definimos el conjunto $A_n = \{x \in X : |f(x)| > f^*(t) - 1/n\}$ y observamos que para todo $n \geq 1$ se tiene por construcción $\mu(A_n) \geq t$ pues basta reemplazar f^* por su definición. Los conjuntos A_n forman una sucesión decreciente si n aumenta y su intersección tendrá una medida mayor o igual a t, la continuidad de las medidas permite concluir.

3) Para el tercer punto, solo debemos demostrar el caso cuando $p = 1$ puesto que el caso general se deduce de este caso particular. En efecto, si tenemos

$$\sup_{t>0} \left\{t f^*(t)\right\} = \sup_{\alpha>0} \left\{\alpha d_f(\alpha)\right\}, \tag{1.39}$$

entonces, utilizando el punto 3) de la Proposición 1.2.5, podemos escribir

$$\sup_{t>0} \left\{t^p f^*(t)\right\} = \sup_{t>0} \left\{\left(t f^{*\frac{1}{p}}(t)\right)^p\right\} = \sup_{t>0} \left\{\left(t (|f|^{\frac{1}{p}})^*(t)\right)^p\right\},$$

de manera que si se tiene la relación (1.39), podemos escribir utilizando la definición de la función de distribución d_f:

$$\begin{aligned}\sup_{t>0}\left\{\left(t(|f|^{\frac{1}{p}})^*(t)\right)^p\right\} &= \sup_{\alpha>0}\left\{\left(\alpha d_{|f|^{\frac{1}{p}}}(\alpha)\right)^p\right\}\\ &= \sup_{\nu>0}\left\{\left(\nu^{\frac{1}{p}}d_f(\nu)\right)^p\right\}=\sup_{\nu>0}\left\{\nu d_f^p(\nu)\right\}.\end{aligned}$$

Pasemos ahora a la demostración del caso $p=1$. Suponemos sin pérdida de generalidad que $d_f(\alpha)<+\infty$ y $f^*(t)<+\infty$. Tenemos entonces para todo $\beta>0$ la desigualdad $\sup\limits_{\alpha>0}\{\alpha\, d_f(\alpha)\}\geq \beta\, d_f(\beta)$ y usando el primer punto anterior para controlar β, obtenemos la desigualdad uniforme $\sup\limits_{\alpha>0}\{\alpha\, d_f(\alpha)\}\geq f^*(d_f(\beta))\, d_f(\beta)$, que nos permite escribir

$$\sup_{\alpha>0}\{\alpha\ d_f(\alpha)\}\geq\sup_{t>0}\{\,tf^*(t)\}.$$

Para obtener la estimación recíproca procedemos de forma totalmente similar y consideramos la desigualdad $\sup\limits_{t>0}\{tf^*(t)\}\geq\beta f^*(\beta)$, de manera que por la Proposición 1.2.4 controlamos el parámetro β y escribimos $\sup\limits_{t>0}\{tf^*(t)\}\geq d_f(f^*(\beta))\ f^*(\beta)$, lo que a su vez nos proporciona la desigualdad

$$\sup_{t>0}\{tf^*(t)\}\geq\sup_{\alpha>0}\{\alpha d_f(\alpha)\},$$

lo que termina la verificación del punto 3).

4) Verifiquemos ahora que las funciones f y f^* son equidistribuidas. Empezamos fijando $\alpha>0$ y vemos que se tiene

$$d_{f^*}(\alpha)=|\{t\in[0,+\infty[:\, f^*(t)>\alpha\}|=\sup_{c>0}\{f^*(c)>\alpha\},$$

puesto que f^* es decreciente. Por la continuidad por la derecha de esta función podemos escribir

$$\sup_{c>0}\{f^*(c)>\alpha\}\leq\inf_{\beta>0}\{f^*(\beta)\leq\alpha\},$$

pero dado que por el punto 1) demostrado anteriormente tenemos la estimación $f^*(d_f(\alpha))\leq\alpha$, se deduce entonces $d_{f^*}(\alpha)\leq d_f(\alpha)$.

La desigualdad recíproca se obtiene fijando $t>d_{f^*}(\alpha)=\sup\limits_{c>0}\{f^*(c)>\alpha\}$. Se tiene entonces por el decrecimiento de la función de reordenamiento decreciente $f^*(t)\leq\alpha$ y $d_f(\alpha)\leq d_f(f^*(t))\leq t$, en donde la primera desigualdad anterior es válida por el decrecimiento de la función d_f y la segunda se tiene por el punto 2). Si escribimos ahora $t=d_{f^*}(\alpha)+\varepsilon$ con $\varepsilon>0$, obtenemos $d_f(\alpha)\leq d_f(f^*(t))\leq d_{f^*}(\alpha)+\varepsilon$ y utilizando la continuidad por la derecha de la función de reordenamiento decreciente tenemos la estimación $d_f(\alpha)\leq d_{f^*}(\alpha)$. Concluimos entonces que $d_{f^*}(\alpha)=d_f(\alpha)$, para todo $\alpha>0$.

5) Dado que $f\mathbb{1}_A \leq f$ obtenemos $(f\mathbb{1}_A)^* \leq (f)^*$ y puesto que se tiene para todo $\alpha > 0$ la mayoración $\mu(\{x \in X : |f\mathbb{1}_A(x)| > \alpha\}) \leq \mu(A)$, de esta manera, como la función f^* es decreciente obtenemos $(f\mathbb{1}_A)^*(t) = 0$ si $t > \mu(A)$, y por lo tanto se tiene $(f\mathbb{1}_A)^*(t) \leq f^*(t)\mathbb{1}_{[0,\mu(A)[}(t)$.

   La identidad $(\mathbb{1}_A)^*(t) = \mathbb{1}_{[0,\mu(A)[}(t)$ si $\mu(A) < +\infty$, se obtiene directamente por definición de la función de reordenamiento decreciente. ■

El punto 4) de la Proposición 1.2.6 tiene la consecuencia siguiente.

Corolario 1.2.2 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido y sea f una función medible definida sobre X a valores en $\mathbb{K}$. Si $f \in L^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ con $0 < p < +\infty$ entonces*

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_0^{+\infty} f^{*p}(t)dt\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.40}$$

En el caso cuando $p = +\infty$ tenemos

$$\|f\|_{L^\infty} = f^*(0). \tag{1.41}$$

Prueba. Empezamos con la primera identidad. Utilizando el hecho que las funciones f y f^* son equidistribuidas (lo que ha sido verificado en la Proposición 1.2.6) y la fórmula general (1.2) de la página 9 que relaciona las funcionales $\|\cdot\|_{L^p}$ con las funciones de distribución, podemos escribir

$$\int_0^{+\infty} f^{*p}(t)dt = p\int_0^{+\infty} \alpha^{p-1}d_{f^*}(\alpha)d\alpha = p\int_0^{+\infty} \alpha^{p-1}d_f(\alpha)d\alpha = \|f\|_{L^p}^p,$$

de donde se obtiene la identidad deseada al extraer la raíz p-ésima en estas igualdades. La segunda aserción es consecuencia de la definición de la función de reordenamiento decreciente y de la definición de la funcional $\|\cdot\|_{L^\infty}$: basta escribir

$$f^*(0) = \inf_{\alpha>0}\{\alpha : \mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}) = 0\} = \|f\|_{L^\infty},$$

para obtener el resultado buscado. ■

Este corolario nos indica, como anunciado, que la función de reordenamiento decreciente f^* también permite caracterizar los espacios de Lebesgue usuales y disponemos ahora de una *tercera* manera de calcular la funcional $\|\cdot\|_{L^p}$: ya sea con su definición usual, ya sea por medio de la función de distribución con la expresión (1.2) dada en la página 9, ya sea con la función de reordenamiento decreciente f^* con la fórmula (1.40).

Un caso particular de este corolario es la identidad siguiente que completa la fórmula (1.3) expuesta en la página 10:

$$\|f\|_{L^1} = \int_X |f(x)|d\mu(x) = \int_0^{+\infty} d_f(\alpha)d\alpha = \int_0^{+\infty} f^*(t)dt,$$

de manera que cuando el espacio X es el intervalo $[0, +\infty[$, recuperamos la propiedad siguiente: el “área bajo las funciones” $|f|$, d_f y f^* es la misma.

Veamos ahora otra consecuencia de la Proposición 1.2.6: en efecto, a partir del punto 5) se obtiene el resultado a continuación.

Corolario 1.2.3 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido y sea f una función medible positiva definida sobre X. Si $A \subset X$ es un conjunto μ-medible entonces se tiene la desigualdad*

$$\int_A f(x)d\mu(x) \leq \int_0^{\mu(A)} f^*(t)dt.$$

Prueba. Podemos suponer para empezar que la medida $\mu(A)$ del conjunto A es finita, en este caso escribimos, dado que la función f es positiva

$$\int_A f(x)d\mu(x) = \int_X (f\mathbb{1}_A)(x)d\mu(x) = \int_0^{+\infty} (f\mathbb{1}_A)^*(t)dt,$$

por la equidistributividad de la función de reordenamiento decreciente. Aplicamos el punto 5) de la Proposición 1.2.6 y tenemos $(f\mathbb{1}_A)^*(t) \leq f^*(t)\mathbb{1}_{[0,\mu(A)[}(t)$, de donde se deduce directamente

$$\int_0^{+\infty} (f\mathbb{1}_A)^*(t)dt \leq \int_0^{+\infty} f^*(t)\mathbb{1}_{[0,\mu(A)[}(t)dt = \int_0^{\mu(A)} f^*(t)dt.$$

En el caso donde la medida del conjunto A es infinita se tiene directamente

$$\int_A f(x)d\mu(x) \leq \int_X f(x)d\mu(x) = \int_0^{+\infty} f^*(t)dt.$$

■

Estudiamos ahora la unicidad del reordenamiento decreciente.

Teorema 1.2.2 (Unicidad del reordenamiento) *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido y sea f una función medible definida sobre X a valores en $\mathbb{K}$. Existe una sola función continua por la derecha, decreciente que es equidistribuida con f. Dicho de otra manera, el reordenamiento decreciente de una función es único.*

Demostración. Sea f una función medible definida sobre X. Vamos a suponer que existen dos funciones distintas f_1^* y f_2^* que son decrecientes, continuas por la derecha y que son equimedibles con f. Existe por lo tanto un t_0 tal que $f_1^*(t_0) \neq f_2^*(t_0)$, y sin pérdida de generalidad, podemos considerar que $f_1^*(t_0) > f_2^*(t_0)$. Fijemos ahora un real $\varepsilon > 0$ tal que $f_1^*(t_0) > f_2^*(t_0) + \varepsilon$. Por la continuidad a la derecha de las funciones de reordenamiento decreciente, existe un intervalo no vacío $[t_0, t_1]$ tal que, para todo $t \in [t_0, t_1]$ se tenga $f_1^*(t) > f_2^*(t_0) + \varepsilon$. Utilizando el hecho de que estas funciones son decrecientes obtenemos que, por un lado:

$$|\{t \geq 0 : f_1^*(t) > f_2^*(t_0) + \varepsilon\}| \geq t_1,$$

pero por otro lado se tiene

$$|\{t \geq 0 : f_2^*(t) > f_2^*(t_0) + \varepsilon\}| \leq t_0 < t_1,$$

y esto contradice la equimedibilidad con respecto a f. Concluímos por lo tanto que $f_1^*(t) = f_2^*(t)$ y que el reordenamiento decreciente es único. ■

Antes de terminar el estudio de las propiedades de la función de reordenamiento decreciente, enunciamos un par de resultados adicionales.

Proposición 1.2.7 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido y sea f una función medible definida sobre X a valores en $\mathbb{K}$. Si la función de distribución d_f es continua y estrictamente decreciente, entonces f^* es la función inversa de d_f.*

Prueba. En efecto, si $d_f(\alpha) < +\infty$, por definición se tiene

$$f^*(d_f(\alpha)) = \inf_{\beta>0}\{\beta : d_f(\beta) \leq d_f(\alpha)\},$$

pero dado que por hipótesis d_f es estrictamente decreciente y continua, de donde se deduce que $f^*(d_f(\alpha)) = \alpha$. ■

Proposición 1.2.8 *Si $f : [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ es una función continua estrictamente decreciente, entonces se tiene la identidad $f(t) = f^*(t)$.*

Prueba. Por definición tenemos

$$f^*(t) = \inf_{\alpha>0}\big\{\alpha : |\{x \in [0, +\infty[: |f(x)| > \alpha\}| \leq t\big\},$$

pero como la función f es estrictamente decreciente y continua, se obtiene que la expresión a la derecha corresponde con el valor de $f(t)$. ■

Con estos dos resultados terminamos nuestra exposición sobre las principales relaciones existentes entre la función de reordenamiento decreciente y la función de distribución.

Sin embargo, antes de pasar a la sección siguiente, es necesario aclarar un punto particular: hemos anunciado en las páginas anteriores que el hecho de caracterizar los espacios de Lorentz $L^{p,q}$ por medio de la función de reordenamiento nos permitiría disponer (para ciertos valores de los parámetros p, q) de una estructura de espacio normado. Sin embargo, como hemos verificado en la Proposición 1.2.4, la función de reordenamiento decreciente es una clase particular de función de distribución y por lo tanto no debería ser de utilidad para obtener la desigualdad triangular, al menos no directamente. En efecto, no se tiene en toda generalidad (puntualmente), para dos funciones medibles f y g, la desigualdad triangular

$$(f + g)^*(t) \leq f^*(t) + g^*(t).$$

Veamos un contraejemplo: sean $f(x) = 1-x$ y $g(x) = x$ dos funciones definidas sobre el intervalo $[0, 1]$. Un cálculo evidente muestra que $(f + g)^*(t) = \mathbb{1}_{[0,1]}(t)$ y que $f^*(t) = g^*(t) = (1 - t)\mathbb{1}_{[0,1]}(t)$, de modo que no se cumple la estimación $(f + g)^*(t) \leq f^*(t) + g^*(t)$.

¿Qué significa esto? Si bien la función de reordenamiento decreciente es una función de distribución, esta transformación de las funciones posee *muchas* otras propiedades adicionales y en la sección que sigue vamos a exponer algunas características que nos permitirán verificar que los espacios de Lorentz $L^{p,q}$ son espacios normados para ciertos valores particulares de p y q.

B) El Teorema de Hardy-Littlewood y espacios resonantes

Empezamos esta sección con el problema siguiente: sean $(a_j)_{1\leq j\leq n}$ y $(b_j)_{1\leq j\leq n}$ dos sucesiones finitas de reales estrictamente positivos, ¿cuál es la mejor manera de combinar estos valores para maximizar la cantidad $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{\sigma(j)}b_{\gamma(j)}$, en donde $a_{\sigma(j)}$ y $b_{\gamma(j)}$ son permutaciones de las sucesiones $(a_j)_{1\leq j\leq n}$ y $(b_j)_{1\leq j\leq n}$?

Este problema fue estudiado por Hardy[16] y Littlewood[17] quienes encontraron que la solución estaba dada al considerar el reordenamiento decreciente de estas sucesiones, es decir que esta cantidad es maximal cuando se considera la suma $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j^* b_j^*$, dicho de otra manera, tenemos siempre la desigualdad

$$\sum_{j=1}^{n} a_{\sigma(j)}b_{\gamma(j)} \leq \sum_{j=1}^{n} a_j^* b_j^*,$$

como nos lo indica el Teorema 1.2.3 a continuación.

Si bien el hecho de establecer esta desigualdad anterior es importante en sí, la búsqueda de los casos cuando es posible obtener la igualdad nos llevará a introducir el concepto de espacio medido *resonante* cuyas propiedades serán de utilidad para el estudio de la estructura topológica de los espacios de Lorentz.

La generalización de esta desigualdad a espacios medidos generales está enunciada en el siguiente teorema.

Teorema 1.2.3 (Hardy-Littlewood) *Sea $(X,\mathscr{A},\mu)$ un espacio medido y sean f y g dos funciones integrables definidas sobre X a valores en $\mathbb{K}$ tal que su producto sea de módulo integrable. Se tiene entonces la desigualdad*

$$\int_X |f(x)g(x)|d\mu(x) \leq \int_0^{+\infty} f^*(t)g^*(t)dt. \tag{1.42}$$

Demostración. Dado que las cantidades al interior de las integrales son todas positivas, podemos suponer sin pérdida de generalidad[18] que las funciones f,g son a valores en $[0,+\infty[$. Escribimos entonces

$$f(x)=\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{\{f(x)>\alpha\}}d\alpha \qquad \text{y} \qquad g(x)=\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{\{g(x)>\sigma\}}d\sigma,$$

[16] Godfrey. H. Hardy (1877-1947), matemático inglés.
[17] John E. Littlewood (1885-1977), matemático inglés.
[18] Por el punto 1) de la Proposición 1.2.5, página 50.

de manera que se tiene

$$\int_X f(x)g(x)d\mu(x) = \int_X \left(\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{\{f(x)>\alpha\}} d\alpha\right)\left(\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{\{g(x)>\sigma\}} d\sigma\right) d\mu(x),$$

y aplicando el Teorema de Fubini podemos escribir

$$\begin{aligned}
\int_X f(x)g(x)d\mu(x) &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\left(\int_X \mathbb{1}_{\{f(x)>\alpha\}}\mathbb{1}_{\{g(x)>\sigma\}}d\mu(x)\right)d\alpha d\sigma\\
&= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\left(\int_X \mathbb{1}_{\{f(x)>\alpha\}\cap\{g(x)>\sigma\}}d\mu(x)\right)d\alpha d\sigma\\
&\leq \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\text{mín}\big(\mu(\{f(x)>\alpha\})\,,\,\mu(\{g(x)>\sigma\})\big)d\alpha d\sigma\\
&\leq \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\text{mín}\big(d_f(\alpha)\,,\,d_g(\sigma)\big)d\alpha d\sigma,
\end{aligned}$$

pero como las funciones f y g son equidistribuidas con sus funciones de reordenamiento decreciente f^* y g^*, tenemos

$$\int_X f(x)g(x)d\mu(x) \leq \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\text{mín}\big(d_{f^*}(\alpha)\,,\,d_{g^*}(\sigma)\big)d\alpha d\sigma.$$

En este punto observamos que, por el decrecimiento de las funciones f^* y g^*, la cantidad $\text{mín}\big(d_{f^*}(\alpha)\,,\,d_{g^*}(\sigma)\big)$ verifica

$$\text{mín}\big(d_{f^*}(\alpha)\,,\,d_{g^*}(\sigma)\big) = \text{mín}\big(|\{f^*>\alpha\}|\,,\,|\{g^*>\sigma\}|\big) = |\{f^*>\alpha\}\cap\{g^*>\sigma\}|,$$

de manera que se tiene

$$\begin{aligned}
\int_X f(x)g(x)d\mu(x) &\leq \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}|\{f^*>\alpha\}\cap\{g^*>\sigma\}|d\alpha d\sigma\\
&\leq \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}\mathbb{1}_{\{f^*(t)>\alpha\}}\mathbb{1}_{\{g^*(t)>\sigma\}}dt\right)d\alpha d\sigma,
\end{aligned}$$

aplicando una vez más el Teorema de Fubini escribimos

$$\begin{aligned}
\int_X f(x)g(x)d\mu(x) &\leq \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}\mathbb{1}_{\{f^*(t)>\alpha\}}d\alpha\right)\left(\int_0^{+\infty}\mathbb{1}_{\{g^*(t)>\sigma\}}d\sigma\right)dt\\
&\leq \int_0^{+\infty} f^*(t)g^*(t)dt,
\end{aligned}$$

lo que termina la demostración de la desigualdad de Hardy-Littlewood. ■

Corolario 1.2.4 *Sea $(X,\mathscr{A},\mu)$ un espacio medido y sean f,g dos funciones integrables definidas sobre X a valores en $\mathbb{K}$. Para toda función $\tilde{g}: X \longrightarrow \mathbb{K}$ que es equidistribuida con g se tiene*

$$\int_X |f(x)\tilde{g}(x)|d\mu(x) \leq \int_0^{+\infty} f^*(t)g^*(t)dt.$$

Si bien la verificación es inmediata dado que la prueba del teorema anterior se basa únicamente en las propiedades de la función de distribución, este resultado plantea un problema interesante: puesto que es posible considerar *familias* de funciones equidistribuidas, ¿bajo qué condiciones se tiene la igualdad en la desigualdad anterior? Es decir, es posible que la función g no permita obtener de manera directa la igualdad en la desigualdad anterior, pero quizás una transformación adecuada (en el sentido de que se mantiene la misma función de distribución) de esta función sí lo permita.

Veamos un ejemplo de esta situación: en el caso de sucesiones *finitas* $(a_j)_{1\leq j\leq n}$ y $(b_j)_{1\leq j\leq n}$ de reales estrictamente positivos la respuesta es positiva y muy sencilla de conceptualizar, es decir que no es muy difícil verificar que se tiene la identidad

$$\sum_{j=1}^{n} a_j\tilde{b}_j = \sum_{j=1}^{n} a_j^* b_j^*,$$

en donde la sucesión $(\tilde{b}_j)_{1\leq j\leq n}$ no es más que una permutación adecuada de la sucesión original $(b_j)_{1\leq j\leq n}$.

El caso general (medidas generales) es un poco más delicado de estudiar y es por eso que presentamos las dos definiciones a continuación.

Definición 1.2.4 (Espacio resonante) *Sea $(X,\mathscr{A},\mu)$ un espacio medido, diremos que este espacio medido es* resonante *si para todo par de funciones integrables $f,g: X\longrightarrow \mathbb{K}$ se tiene la identidad*

$$\int_0^{+\infty} f^*(t)g^*(t)dt = \sup_{\tilde{g}:d_{\tilde{g}}=d_g}\int_X |f(x)\tilde{g}(x)|d\mu(x), \tag{1.43}$$

en donde el supremo corre sobre todas las funciones medibles $\tilde{g}$ que son equidistribuidas con g.

Observación 1.6 Sabemos por el primer punto de la Proposición 1.1.1, página 7, que las funciones $\tilde{g}$ y $|\tilde{g}|$ son equidistribuidas. De esta manera, es posible *ajustar* la función $\tilde{g}$, tomando por ejemplo en el caso real $\tilde{\tilde{g}} = -\tilde{g}$ en los conjuntos en los cuales f es negativa, de tal manera que se tenga la identidad

$$\sup_{\tilde{g}:d_{\tilde{g}}=d_g}\int_X |f(x)\tilde{g}(x)|d\mu(x) = \sup_{\tilde{\tilde{g}}:d_{\tilde{\tilde{g}}}=d_g}\left|\int_X f(x)\tilde{\tilde{g}}(x)d\mu(x)\right|.$$

En lo que sigue utilizaremos principalmente la primera expresión anterior, pero la segunda será de utilidad posteriormente.

En el caso en que el supremo es alcanzado se tiene al concepto siguiente.

Definición 1.2.5 (Espacio fuertemente resonante) *Un espacio medido $(X,\mathscr{A},\mu)$ es* fuertemente resonante *si para todo par $f,g: X\longrightarrow \mathbb{K}$ de funciones integrables existe una función $\tilde{g}$ que es equidistribuida con g tal que*

$$\int_0^{+\infty} f^*(t)g^*(t)dt = \int_X |f(x)\tilde{g}(x)|d\mu(x). \tag{1.44}$$

Evidentemente, se puede ver sin ningún problema que todo espacio medido fuertemente resonante es resonante y pronto veremos ejemplos en donde no se tiene la recíproca.

Estos dos conceptos que acabamos de presentar son por el momento muy abstractos y es necesario relacionar estas propiedades de resonancia de los espacios medidos con características más sencillas de comprobar en la práctica. Para ello necesitaremos un lema y una definición.

Lema 1.2.1 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido no atómico de masa total finita ($\mu(X) < +\infty$). Si $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ es una función integrable y si $0 \leq t \leq \mu(X)$ es un real, entonces existe un conjunto medible A_t que verifica $\mu(A_t) = t$ y tal que*

$$\int_{A_t} |f(x)| d\mu(x) = \int_0^t f^*(s) ds.$$

Los conjuntos A_t pueden ser construidos de tal manera que sean crecientes con respecto al índice t, es decir si $t_0 \leq t_1$, entonces se tiene $A_{t_0} \subset A_{t_1}$.

Prueba. Supongamos para empezar que existe un real $\alpha > 0$ tal que $d_f(\alpha) = t$. Entonces por la definición de función de reordenamiento decreciente dada en la expresión (1.32) de la página 44 tenemos $f^*(t) = \inf\{\alpha : d_f(\alpha) = t\}$, y la continuidad por la derecha de la función de distribución nos permite escribir $d_f(f^*(t)) = t$. De manera equivalente el conjunto $A_t = \{x \in X : |f(x)| > f^*(t)\}$ verifica $\mu(A_t) = t$. Nótese en particular que al ser la función f^* decreciente, se tiene que el conjunto A_t es creciente con respecto al parámetro t. Estos argumentos muestran que la función de distribución de la función $f\mathbb{1}_{A_t}$ está dada por

$$d_{(f\mathbb{1}_{A_t})}(\alpha) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq \alpha \leq f^*(t), \\ \\ d_f(\alpha) & \text{si } \alpha > f^*(t). \end{cases}$$

Así mismo, la función de distribución de la función $f^*\mathbb{1}_{[0,t[}$ es

$$d_{(f^*\mathbb{1}_{[0,t[})}(\alpha) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq \alpha \leq f^*(t), \\ \\ d_{f^*}(\alpha) & \text{si } \alpha > f^*(t). \end{cases}$$

Pero como las funciones f y f^* son equidistribuidas, tenemos $d_f = d_{f^*}$, de donde se deduce por las expresiones anteriores que las funciones $f\mathbb{1}_{A_t}$ y $f^*\mathbb{1}_{[0,t[}$ son equidistribuidas y por lo tanto las integrales de sus funciones de distribución respectivas son las mismas. De esta manera podemos escribir

$$\begin{aligned} \int_{A_t} |f(x)| d\mu(x) &= \int_X |f(x)\mathbb{1}_{A_t}(x)| d\mu(x) \\ &= \int_0^{+\infty} d_{(f\mathbb{1}_{A_t})} d\alpha = \int_0^{+\infty} d_{(f^*\mathbb{1}_{[0,t[})} d\alpha \\ &= \int_0^{+\infty} f^*(s)\mathbb{1}_{[0,t[} ds = \int_0^t f^*(s) ds, \end{aligned}$$

lo que demuestra el lema en el caso cuando existe un real $\alpha > 0$ tal que $d_f(\alpha) = t$.

Pasemos ahora al caso cuando el valor de t no está en el rango de valores posibles de la función d_f. Esta situación se presenta cuando la función de reordenamiento decreciente no es *estrictamente* decreciente (ver el Ejercicio 1.2 para más detalles). En este caso, dado que por hipótesis la medida del conjunto X es finita y que la función f es integrable, por el teorema de convergencia dominada tenemos las identidades

$$\lim_{n\to+\infty} d_f(n) = \lim_{n\to+\infty} \mu(\{x \in X : |f(x)| > n\}) = \mu(\{x \in X : |f(x)| = +\infty\}) = 0,$$

y como la función de distribución es decreciente deducimos

$$\lim_{\alpha\to+\infty} d_f(\alpha) = 0. \tag{1.45}$$

Sea ahora $\alpha_0 = f^*(t)$ y supongamos que se tiene $\alpha_0 > 0$. Como $t > 0$, por la definición de la función de reordenamiento decreciente dada en la fórmula (1.32) y por la propiedad (1.45) anterior se tiene que α_0 es finito. Además si t no está en el rango de valores de d_f, tenemos por el punto 2) de la Proposición 1.2.6 las desigualdades $d_f(\alpha_0) < t < d_f(\alpha)$ para todo α tal que $0 < \alpha < \alpha_0$. Ahora, si t_1 es el límite por la derecha de la función $d_f(\alpha_0^-)$, cantidad que está bien definida pues la función de distribución es continua por la derecha y decreciente, entonces

$$t_0 = d_f(\alpha_0) < t \leq d_f(\alpha_0^-) = t_1, \tag{1.46}$$

lo que muestra que se tiene en realidad la identidad $f^*(s) = \lambda_0$ para todo $t_0 \leq s < t_1$ y esta situación corresponde cuando la función de reordenamiento decreciente f^* no es estrictamente decreciente y presenta una "meseta". Tenemos ahora la igualdad

$$t_1 = \mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha_0\}), \tag{1.47}$$

en efecto, definimos para $n \geq 1$ los conjuntos $B_n = \left\{x \in X : |f(x)| > \alpha_0 - \frac{1}{n}\right\}$, y como por hipótesis la masa total es finita, $\mu(X) < +\infty$, por el teorema de convergencia dominada podemos escribir

$$\mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha_0\}) = \lim_{n\to+\infty} \mu(B_n) = \lim_{n\to+\infty} d_f\left(\alpha_0 - \frac{1}{n}\right) = d_f(\alpha_0^-).$$

Por las fórmulas (1.46) y (1.47) obtenemos que el conjunto $C = \{x \in X : |f(x)| = \alpha_0\}$ es de μ-medida $t_1 - t_0$, y como la medida es no atómica, existe un subconjunto $D_t \subset C$ de medida $t - t_0$. El conjunto A_t definido por la expresión

$$A_t = \{x \in X : |f(x)| > \alpha_0\} \cup D_t,$$

tiene medida $d_f(\alpha_0) + (t - t_0) = t$ como se deseaba y podemos escribir

$$\int_{A_t} |f(x)|d\mu(x) = \int_{\{|f|>\alpha_0\}} |f(x)|d\mu(x) + \int_{D_t} |f(x)|d\mu(x).$$

Ahora, por (1.46) el valor de t_0 no está en el rango de valores de la función d_f y entonces la primera integral $\displaystyle\int_{\{|f|>\alpha_0\}} |f(x)|d\mu(x)$ tiene valor $\displaystyle\int_0^{t_0} f^*(s)ds$, además, como $|f(x)| = \alpha_0$ sobre el conjunto D_t, la segunda integral verifica

$$\alpha_0\mu(D_t) = \alpha(t - t_0) = \int_{t_0}^{t} f^*(s)ds,$$

y de esta forma se obtiene la identidad enunciada en el lema.

Para terminar la demostración, es necesario estudiar el caso cuando $\alpha_0 = 0$. En esta situación, en lugar de la desigualdad (1.46) obtenemos

$$\mu(\{x \in X : |f(x)| > 0\}) = t_0 < t,$$

y en este caso es posible escoger el conjunto D_t disjunto del soporte de f y de medida $\mu(D_t) = t - t_0$. Utilizando la misma definición de los conjuntos A_t presentada anteriormente, y observando que la función de reordenamiento decreciente f^* se anula para los valores mayores o iguales que t_0, obtenemos

$$\int_{A_t} |f(x)|d\mu(x) = \int_0^{t_0} f^*(s)ds = \int_0^{t} f^*(s)ds.$$

Lo único que falta verificar es que los conjuntos A_t son crecientes con respecto al parámetro t en el caso cuando el valor de t no está en el rango de valores posibles de la función d_f: aquí se puede escoger sin mayor dificultad los conjuntos D_t de tal manera que éstos sean crecientes con respecto al parámetro t en cada uno de los intervalos $]t_0, t_1]$ y de esta manera terminamos la verificación de este lema. ■

Necesitamos ahora una definición antes de enunciar un primer resultado que caracteriza, por medio de conceptos estudiados anteriormente, a los espacios medidos fuertemente resonantes.

Definición 1.2.6 (Espacio completamente atómico) *Diremos que un espacio medido σ-finito $(X, \mathscr{A}, \mu)$ es* completamente atómico *si todos los elementos de la σ-álgebra $\mathscr{A}$ son átomos*[19].

El ejemplo de base de espacio medido completamente atómico está dado por el conjunto de números naturales $\mathbb{N}$ dotado de la medida de conteo.

Con esta noción adicional, presentamos la proposición siguiente que relaciona el concepto de espacio medido fuertemente resonante con propiedades usuales de los espacios medidos. Dicho de otra manera, para determinar si un espacio medido es fuertemente resonante, no será necesario estudiar la identidad (1.44) sino que bastará verificar ciertos puntos que son más sencillos de comprobar en la práctica.

[19]Recordar que $A \subset \mathscr{A}$ es un *átomo* para la medida μ si $\mu(A) > 0$ y si todo subconjunto B de A o tiene la misma medida que A o es de medida nula.

Proposición 1.2.9 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido σ-finito de masa total finita que verifica uno de los dos puntos siguientes*

1) el espacio medido es no atómico,

2) el espacio medido es completamente atómico y cada átomo es de igual medida.

Entonces el espacio medido $(X, \mathscr{A}, \mu)$ es fuertemente resonante.

Prueba. Comencemos pues suponiendo que el espacio medido es de masa total finita, completamente atómico y que cada átomo es de igual medida. En este marco de trabajo debemos verificar que para todo par de funciones integrables (en este caso se trata de *sucesiones*) f, g existe una función $\tilde{g}$ que es equidistribuida con g y tal que se tiene la identidad

$$\int_0^{+\infty} f^*(t)g^*(t)dt = \int_X |f(x)\tilde{g}(x)|d\mu(x).$$

en donde, como se ha evidenciado anteriormente, basta considerar funciones positivas lo que haremos en todo lo que sigue.

Esta situación que estudia sucesiones es sencilla de verificar pues, una vez que se ha reordenado decrecientemente la función f por medio de una permutación de sus valores para obtener la función f^*, la función $\tilde{g}$ se obtiene reorganizando la función inicial g de manera a hacer coincidir los productos $f^*(t)g^*(t)$ y $f(x)\tilde{g}(x)$ de tal modo que se obtiene la identidad buscada y además, como la transformación realizada no es más que una permutación de los valores de la función g, se obtiene sin problema la equidistributividad de g y $\tilde{g}$.

Consideremos ahora el caso de un espacio medido no atómico de masa total finita. Sea $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de funciones simples positivas tales que $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n = g$ (ver el Teorema 3.2.4 del Volumen 1). Vamos ahora a construir una sucesión creciente de funciones simples positivas $(\tilde{g}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que cada $\tilde{g}_n$ es equidistribuida con g_n y tales que se tenga para todo $n \geq 0$ la identidad

$$\int_X |f(x)\tilde{g}_n(x)|d\mu(x) = \int_0^{+\infty} f^*(t)\tilde{g}_n^*(t)dt, \tag{1.48}$$

de esta manera, por el punto 6) de la Proposición 1.1.1 dada en la página 7, tenemos que la función $\tilde{g} = \lim\limits_{n\to+\infty} \tilde{g}_n$ es equidistribuida con la función g, y entonces, a partir de la identidad (1.48) anterior, utilizando el punto 7) de la Proposición 1.2.5 dada en la página 50 y el teorema de convergencia monótona, podemos deducir la propiedad de resonancia fuerte expresada con la fórmula (1.44). De esta manera, solo debemos construir las funciones simples tales que se tenga (1.48).

Para algún $n \geq 0$, notamos ahora $h = g_n$ y reescribimos como en el ejemplo (ii) de la página 45 esta función h de la siguiente manera

$$h = \sum_{j=1}^{m} c_j \mathbb{1}_{B_j},$$

donde los conjuntos $(B_j)_{1\leq j\leq m}$ son crecientes: $B_1 \subset B_2 \subset \cdots \subset B_m$ y los números reales $(c_j)_{1\leq j\leq m}$ son todos estrictamente positivos.

Entonces, por el Lema 1.2.1, tenemos que existen conjuntos $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_m$ tales que $\mu(A_j) = \mu(B_j)$ con la propiedad

$$\int_{A_j} f(x)d\mu(x) = \int_0^{\mu(B_j)} f^*(t)dt, \tag{1.49}$$

para todo $1 \leq j \leq m$. A partir de estas observaciones, definimos $\tilde{h} = \sum_{j=1}^{m} c_j \mathbb{1}_{A_j}$, de manera que se obtiene

$$h^* = \sum_{j=1}^{m} c_j \mathbb{1}_{[0,\mu(B_i)[} = (\tilde{h})^*,$$

es decir que las funciones de reordenamiento decreciente de h y de $\tilde{h}$, de donde se deduce que estas funciones son equidistribuidas. Entonces, a partir de la identidad (1.49) tenemos[20]

$$\begin{aligned}
\int_X f(x)\tilde{h}(x)d\mu(x) &= \int_X f(x)\left(\sum_{j=1}^{m} c_j \mathbb{1}_{A_j}\right)d\mu(x) = \sum_{j=1}^{m} c_j \int_{A_j} f(x)d\mu(x)\\
&= \sum_{j=1}^{m} c_j \int_0^{\mu(B_j)} f^*(t)dt = \int_0^{+\infty} \sum_{j=1}^{m} c_j \mathbb{1}_{[0,\mu(B_j)[} f^*(t)dt\\
&= \int_0^{+\infty} f^*(t)h^*(t)dt,
\end{aligned}$$

y si definimos $\tilde{g}_n = \tilde{h}$, entonces obtenemos que la función $\tilde{g}_n$ es equidistribuida con g_n, y entonces se tiene la identidad buscada (1.48) para estas funciones.

Como las funciones g_n son crecientes con respecto al parámetro n, por el Lema 1.2.1 se tiene que los conjuntos A_j considerados en la expresión (1.49) también pueden ser crecientes, lo que implica que las funciones $\tilde{g}_n$ también son crecientes. Una vez que tenemos este resultado, por las propiedades de paso al límite expresadas en las líneas precedentes obtenemos que el espacio medido $(X, \mathscr{A}, \mu)$ es fuertemente resonante. ■

Este resultado anterior se generaliza a los espacios medidos resonantes de la siguiente manera.

Proposición 1.2.10 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido σ-finito que verifica uno de los dos puntos a continuación:*

1) el espacio medido es no atómico,

[20]Recordar que podemos suponer sin pérdida de generalidad que todas las funciones son positivas.

2) el espacio medido es completamente atómico y cada átomo es de igual medida,

entonces el espacio medido $(X, \mathscr{A}, \mu)$ es resonante.

Prueba. Consideremos sin pérdida de generalidad dos funciones f, g integrables positivas. Vamos a verificar que para todo real $s > 0$ que verifica

$$0 < s < \int_0^{+\infty} f^*(t)g^*(t)dt, \tag{1.50}$$

existe una función medible positiva $\tilde{g}$ que es equidistribuida con g y tal que

$$s < \int_X f(x)\tilde{g}(x)d\mu(x). \tag{1.51}$$

Dado que el espacio medido $(X, \mathscr{A}, \mu)$ existe una sucesión creciente $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos medibles de medida finita tales que su unión es todo X (ver Observación 2.5 del Volumen 1). Sean ahora $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones de funciones simples positivas, a soporte sobre A_n que convergen crecientemente hacia f y g respectivamente. Por la desigualdad (1.50) y por las propiedades de las funciones de reordenamiento decreciente, existe un entero $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que se tenga

$$s < \int_0^{+\infty} f_N^*(t)g_N^*(t)dt. \tag{1.52}$$

Si consideramos la restricción de la estructura de espacio medido $(X, \mathscr{A}, \mu)$ al conjunto A_N, obtenemos un espacio medido σ-finito de masa total finita, que por la Proposición 1.2.9 anterior es fuertemente resonante. De esta manera existe una función medible h definida sobre A_N que es equidistribuida con la función $g\mathbb{1}_{A_N}$ y que verifica la identidad

$$\int_{A_N} f(x)h(x)d\mu(x) = \int_0^{\mu(A_N)} (f\mathbb{1}_{A_N})^*(t)(g\mathbb{1}_{A_N})^*(t)dt.$$

Observamos ahora que se tiene por contrucción las mayoraciones $f\mathbb{1}_{A_N} \geq f_N$ y $g\mathbb{1}_{A_N} \geq g_N$, de manera que a partir de la identidad anterior y de la mayoración (1.52) obtenemos, extendiendo con el valor 0 la función h fuera del conjunto A_N, la desigualdad $0 < s < \displaystyle\int_X f(x)h(x)d\mu(x)$. En este punto, definimos la función $\tilde{g} = h\mathbb{1}_{A_N} + g\mathbb{1}_{X\setminus A_N}$ y podemos ver sin mayor dificultad que esta función es equidistribuida con g. Se tiene entonces $\tilde{g} \geq h$ y por (1.52) escribimos

$$0 < s < \int_X f(x)h(x)d\mu(x) \leq \int_X f(x)\tilde{g}(x)d\mu(x),$$

de donde se obtiene (1.51) y por lo tanto que el espacio medido considerado es resonante. ■

Como vemos con estos dos resultados, los ejemplos más usuales de espacios medidos como son los conjuntos $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{N}$ o $\mathbb{Z}$ dotados de sus estructuras naturales son espacios resonantes y disponemos entonces de la importante identidad

(1.43) que será utilizada en la Sección 1.2.3.

Demos ahora dos ejemplos que ilustran las proposiciones anteriores y la diferencia existente entre espacios resonantes y espacios fuertemente resonantes.

(i) Empecemos pues considerando la función $f(x) = 1 - e^{-x}$ definida sobre el intervalo $[0, +\infty[$ dotado de la medida de Lebesgue. De la misma manera que con la función dada en la expresión (1.37) de la página 47, vemos sin mayor problema que la función de reordenamiento decreciente f^* es constante e igual a 1. Si fijamos ahora la función g como la función indicatriz del intervalo $[0,1[$ tenemos $g = g^* = \mathbb{1}_{[0,1[}$ y vemos que si $\tilde{g}$ es equidistribuida con g, entonces $|\tilde{g}|$ es la función indicatriz de algún conjunto $A \subset [0, +\infty[$ de medida igual a 1. De esta manera tenemos la desigualdad estricta

$$\int_0^{+\infty} |f(x)\tilde{g}(x)|dx = \int_A 1 - e^{-x}dx < 1 = \int_0^{+\infty} f^*(t)g^*(t)dt.$$

Sabemos por los teoremas demostrados en las líneas anteriores que el espacio medido $([0, +\infty[, \mathcal{B}or([0, +\infty[), dx)$ es resonante y los cálculos anteriores muestran que este espacio no es fuertemente resonante. De esta manera concreta vemos que un espacio resonante no es necesariamente un espacio fuertemente resonante.

(ii) Veamos un segundo ejemplo. Sobre el espacio medible $(\mathbb{R}, \mathcal{B}or(\mathbb{R}))$ consideramos la medida μ definida sobre dos átomos 0 y 1 con los valores $\mu(0) = 1$ y $\mu(1) = 3$. Definimos luego las funciones $f = \mathbb{1}_{\{1\}}$ y $g = \mathbb{1}_{\{0\}}$ y un cálculo directo determina que $f^* = \mathbb{1}_{[0,3[}$ y $g^* = \mathbb{1}_{[0,1[}$, de esta manera tenemos $\displaystyle\int_0^{+\infty} f^*(t)g^*(t)dt = 1$. Pero para toda función $\tilde{g}$ equidistribuida con g tenemos que la integral $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(x)\tilde{g}(x)|d\mu(x)$ es nula puesto que las funciones f y $\tilde{g}$ deben tener soporte disjunto. Este ejemplo muestra que ningún espacio medido que contiene dos átomos con pesos distintos es resonante.

Estos ejemplos nos permiten completar las Proposiciones 1.2.9 y 1.2.10 de la siguiente manera.

Teorema 1.2.4 *Un espacio medido $(X, \mathscr{A}, \mu)$ σ-finito es fuertemente resonante si y solo si es de masa total finita y verifica uno de los dos puntos a continuación:*

1) el espacio medido es no atómico,

2) el espacio medido es completamente atómico y cada átomo es de igual medida.

Demostración. La condición suficiente ha sido demostrada en la Proposición 1.2.9 y nos concentramos en la condición necesaria. Observamos por el ejemplo (ii) anterior que si el espacio medido $(X, \mathscr{A}, \mu)$ es fuertemente resonante, entonces en caso de contener átomos, todos éstos deben ser de igual medida y siguiendo esencialmente los mismos argumentos, vemos que el espacio medido $(X, \mathscr{A}, \mu)$ no puede contener una mezcla de átomos y partes no-atómicas, de manera que si el espacio medido es resonante, entonces o es no atómico o es completamente atómico con átomos de igual medida.

Por otra parte, el ejemplo (i) en las líneas precedentes muestra que si el espacio es fuertemente resonante, entonces debe ser de masa total finita, pues caso contrario con este ejemplo se tendría una contradicción. ■

Teorema 1.2.5 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido σ-finito que verifica uno de los dos puntos a continuación:*

1) *el espacio medido es no atómico,*

2) *el espacio medido es completamente atómico y cada átomo es de igual medida,*

entonces el espacio medido $(X, \mathscr{A}, \mu)$ es resonante.

Demostración. De la misma manera que en el teorema anterior, la condición suficiente ha sido tratada en la Proposición 1.2.10. Los ejemplos (i) y (ii) muestran que un espacio medido resonante es necesariamente de uno de los dos tipos explicitados en este teorema. ■

Con el resultado siguiente recopilamos hechos que se deducen de lo anterior.

Corolario 1.2.5

1) *Un espacio medido $(X, \mathscr{A}, \mu)$ σ-finito es fuertemente resonante si es un espacio medido resonante de medida finita.*

2) *Un espacio medido $(X, \mathscr{A}, \mu)$ resonante es un espacio σ-finito que es no atómico o que es la unión numerable de átomos de igual medida.*

Observación 1.7 Con el fin de utilizar la identidad (1.43) supondremos a menudo que el espacio medido $(X, \mathscr{A}, \mu)$ sobre el cual se trabaja es un *espacio medido resonante*. Esto es, por el Corolario 1.2.5, consideraremos espacios medido σ-finitos no atómicos o espacios medidos σ-finitos completamente atómicos cuyos átomos son todos de igual medida.

El hecho de tomar en cuenta espacios resonantes permite estudiar con una sola noción dos grandes familias de espacios medidos: los espacios no atómicos (que permiten estudiar funciones) y los espacios completamente atómicos (que permiten estudiar sucesiones).

1.2.3. Segunda definición de los espacios de Lorentz $L^{p,q}$

Una vez que hemos detallado estas propiedades adicionales de la función de reordenamiento decreciente, podemos definir los espacios de Lorentz $L^{p,q}$ utilizando la función f^* y vamos a ver que se obtiene la misma funcional $\|\cdot\|_{L^{p,q}}$ utilizada en la Definición 1.2.1. Pero esta verificación de rutina no tendría sentido si no se pudiera sacar provecho de esta nueva caracterización de los espacios de Lorentz, de manera que, inmediatamente después de verificar que esta segunda definición corresponde con la primera, pasaremos a detallar algunas propiedades adicionales de estos espacios que son sencillas de demostrar utilizando la función de reordenamiento decreciente.

Definición 1.2.7 (Espacios de Lorentz) *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido. Sean p y q dos índices reales. Si $0 < p \leq +\infty$ y $0 < q < +\infty$, los espacios de Lorentz $L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ están constituidos por las funciones medibles f definidas sobre X y a valores en $\mathbb{K}$ tales que la cantidad a continuación sea finita:*

$$\|f\|_{L^{p,q}} = \left(\int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.53}$$

En el caso $0 < p \leq +\infty$ y $q = +\infty$ escribimos

$$\|f\|_{L^{p,\infty}} = \sup_{t>0} \left\{t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right\}. \tag{1.54}$$

Como anunciado, antes de pasar al estudio de las propiedades que se deducen de esta definición, lo primero que es necesario hacer es verificar que la cantidad $\|\cdot\|_{L^{p,q}}$ definida aquí arriba con las fórmulas (1.53) y (1.54) coincide con la funcional dada en la Definición 1.2.1 de la página 36.

Para ello consideramos primero el caso $0 < p < +\infty$ y $0 < q < +\infty$. Por el punto 3) de la Proposición 1.2.5, página 50, tenemos las identidades:

$$\int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right)^q \frac{dt}{t} = \int_0^{+\infty} t^{\frac{q}{p}-1} (f^*)^q(t)dt = \int_0^{+\infty} t^{\frac{q}{p}-1} (|f|^q)^*(t)dt,$$

ahora por la Proposición 1.2.4, página 49, se tiene la identidad $(|f|^q)^* = d_{d_{|f|^q}}$ y escribimos

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} t^{\frac{q}{p}-1} (|f|^q)^*(t)dt &= \int_0^{+\infty} t^{\frac{q}{p}-1} d_{d_{|f|^q}}(t)dt \\
&= \int_0^{+\infty} t^{\frac{q}{p}-1} \left(\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{\{d_{|f|^q}(\alpha)>t\}} d\alpha\right) dt,
\end{aligned}$$

aplicando el Teorema de Fubini obtenemos

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{d_{|f|^q}(\alpha)} t^{\frac{q}{p}-1} dt\right) d\alpha = \frac{p}{q} \int_0^{+\infty} \left(d_{|f|^q}\right)^{\frac{q}{p}} d\alpha \\
&= \frac{p}{q} \int_0^{+\infty} \left(\mu(\{x \in X : |f(x)|^q > \alpha\})\right)^{\frac{q}{p}} d\alpha \\
&= \frac{p}{q} \int_0^{+\infty} \left(\mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha^{\frac{1}{q}}\})\right)^{\frac{q}{p}} d\alpha.
\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $\beta^q = \alpha$, se tiene

$$= \frac{p}{q}\int_0^{+\infty} (\mu(\{x \in X : |f(x)| > \beta\}))^{\frac{q}{p}}\, q\beta^{q-1}d\beta = p\int_0^{+\infty} \left(\beta\, d_f(\beta)^{\frac{1}{p}}\right)^q \frac{d\beta}{\beta},$$

de donde finalmente obtenemos la identidad

$$\int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right)^q \frac{dt}{t} = p\int_0^{+\infty} \left(\beta\, d_f(\beta)^{\frac{1}{p}}\right)^q \frac{d\beta}{\beta},$$

lo que demuestra, extrayendo la raíz q-ésima de la expresión anterior que se tiene la igualdad entre las expresiones (1.53) y (1.25).

Pasemos ahora al caso $0 < p < +\infty$ y $q = +\infty$, por el punto 3) de la Proposición 1.2.6, página 52, se tiene la identidad

$$\sup_{t>0} \left\{t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right\} = \sup_{\alpha>0} \left\{\alpha d_f^{\frac{1}{p}}(\alpha)\right\},$$

de donde se deduce directamente la igualdad entre (1.54) y (1.26).

Estudiemos el caso $p = +\infty$ y $q = +\infty$. En esta situación la fórmula (1.54) se escribe $\sup\limits_{t>0} \{f^*(t)\}$, pero como la función f^* es decreciente y continua por la derecha se tiene

$$\sup_{t>0} \{f^*(t)\} = f^*(0),$$

y esta cantidad corresponde por la identidad (1.41) del Corolario 1.2.2, página 54, a la norma $\|\cdot\|_{L^\infty}$.

Con esto vemos que la funcional $\|\cdot\|_{L^{p,q}}$ que se basa en la función de distribución d_f como indicado en la Definición 1.2.1, también puede ser caracterizada por medio de la función de reordenamiento decreciente f^* como en la Definición 1.2.7.

Observación 1.8 El caso cuando $p = +\infty$ y $0 < q < +\infty$ no estaba tratado en la Definición 1.2.1 pero sí puede estudiarse con la Definición 1.2.7. Sin embargo, cuando la medida es *no atómica* los espacios $L^{\infty,q}$ con $0 < q < +\infty$ están reducidos al elemento nulo y por lo tanto no presentan ningún interés.

En efecto, para los valores $p = +\infty$ y $0 < q < +\infty$, si la cantidad $\displaystyle\int_0^{+\infty} f^*(t)^q \frac{dt}{t}$ es finita se tiene que $f = 0$ en μ-casi todas partes. Para verificarlo procedemos por el absurdo y suponemos que $f \neq 0$. En este caso existe al menos un $c > 0$ y un conjunto A de medida positiva y finita tales que $|f(x)| > c$ para todo $x \in A$. Por el punto 5) de la Proposición 1.2.6, página 52 y por la monotonía de la función de distribución (ver el punto 4) de la Proposición 1.2.5, página 50) tenemos entonces las mayoraciones

$$\int_0^{+\infty} f^*(t)^q \frac{dt}{t} \geq \int_0^{+\infty} (f\mathbb{1}_A)^*(t)^q \frac{dt}{t} \geq \int_0^{\mu(A)} c^q \frac{dt}{t} = +\infty,$$

de donde se deduce que $L^{\infty,q}(X,\mathscr{A},\mu,\mathbb{K})=\{0\}$ para todo $0<q<+\infty$.

Veremos sin embargo en la Sección 1.6 que cuando la medida es completamente atómica, el estudio de los espacios de Lorentz de índices $p=+\infty$ y $0<q<+\infty$ es totalmente diferente.

Observación 1.9 Es muy importante notar aquí que, gracias al Teorema 1.2.2 de unicidad del reordenamiento decreciente, las funciones que pertenecen a los espacios de Lorentz están totalmente caracterizadas por medio de la función de reordenamiento decreciente f^*.

Esta observación tiene algunas consecuencias interesantes. Sabíamos por la caracterización de los espacios de Lorentz dada en la Definición 1.2.1, que si f y g son dos funciones equidistribuidas, entonces la información dada por la funcional $\|\cdot\|_{L^{p,q}}$ es la misma. Con la Definición 1.2.7 y la observación anterior obtenemos una propiedad adicional: dos funciones que tienen el mismo reordenamiento decreciente tienen el mismo comportamiento con respecto a la funcional $\|\cdot\|_{L^{p,q}}$, es decir que los espacios de Lorentz $L^{p,q}$ son *invariantes por reordenamiento decreciente*. Como por el Corolario 1.2.2 también podemos caracterizar los espacios de Lebesgue L^p por medio de la función de reordenamiento decreciente, obtenemos que estos importantes espacios de funciones son asimismo invariantes por reordenamiento decreciente.

Una vez que hemos visto que la segunda definición de los espacios de Lorentz $L^{p,q}$ dada con las expresiones (1.53) y (1.54) coincide con la primera definición expuesta en las fórmulas (1.25) y (1.26), vamos a sacar provecho de las propiedades de la función de reordenamiento decreciente para estudiar más en detalle las propiedades de estos espacios.

Para mayor claridad en la exposición, vamos a dividir en cuatro partes nuestra presentación en donde veremos algunas características fundamentales de los espacios de Lorentz así como las limitaciones que existen al trabajar con la función de reordenamiento decreciente. Los temas que vamos a tratar son los siguientes:

A) Propiedades adicionales de la funcional $\|\cdot\|_{L^{p,q}}$.

B) Propiedades relativas a la teoría de la medida.

C) Relaciones entre los espacios de Lorentz.

D) Un primer estudio de normabilidad de los espacios de Lorentz.

Los tres primeros puntos aquí arriba serán estudiados desde un punto de vista general, mientras que para tratar el último punto necesitaremos que el espacio medido considerado sea resonante.

A) Propiedades adicionales de la funcional $\|\cdot\|_{L^{p,q}}$

En esta sección vamos a presentar dos resultados que se deducen muy fácilmente de la caracterización por medio de la función de reordenamiento decreciente de los espacios de Lorentz.

El primero de ellos es una generalización de una propiedad que ha sido presentada para los espacios de Lebesgue en el Ejercicio 4.4 del Volumen 1.

Proposición 1.2.11 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido y sea f una función medible definida sobre el conjunto X a valores en $\mathbb{K}$. Entonces, para todo $0 < p, r < +\infty$ y para todo $0 < q \leq +\infty$ se tiene la identidad*

$$\||f|^r\|_{L^{p,q}} = \|f\|^r_{L^{pr,qr}}.$$

Prueba. La demostración de esta identidad es totalmente directa gracias al punto 3) de la Proposición 1.2.5, página 50. Empecemos con el caso cuando $0 < q < +\infty$, por la definición (1.53) escribimos

$$\begin{aligned} \||f|^r\|^q_{L^{p,q}} &= \int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{1}{p}} \left(|f|^r\right)^* (t)\right)^q \frac{dt}{t} = \int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{1}{p}} \left(f^*(t)\right)^r\right)^q \frac{dt}{t} \\ &= \int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{1}{rp}} f^*(t)\right)^{rq} \frac{dt}{t} = \|f\|^{rq}_{L^{rp,rq}}, \end{aligned}$$

de manera que al extraer la raíz q-ésima de esta expresión se obtiene el resultado buscado. En el caso cuando $q = +\infty$, utilizamos la fórmula (1.54) y tenemos de manera totalmente similar las identidades

$$\begin{aligned} \||f|^r\|_{L^{p,\infty}} &= \sup_{t>0} \left\{t^{\frac{1}{p}}(|f|^r)^*(t)\right\} = \sup_{t>0} \left\{t^{\frac{1}{p}}(f^*)^r(t)\right\} \\ &= \sup_{t>0} \left\{\left(t^{\frac{1}{rp}} f^*(t)\right)^r\right\} = \|f\|^r_{L^{rp,\infty}}, \end{aligned}$$

lo que termina la verificación de esta proposición. ■

Presentamos ahora una primera versión de las importantes desigualdades de Hölder en los espacios de Lorentz generales.

Teorema 1.2.6 (Desigualdades de Hölder) *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido. Sean p y q dos índices tales que $1 \leq p < +\infty$ y $1 \leq q \leq +\infty$ y sean p' y q' sus conjugados armónicos respectivos. Si f y g son dos funciones medibles tales que $f \in L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ y $g \in L^{p',q'}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$, entonces tenemos la desigualdad*

$$\left|\int_X f(x)g(x)d\mu(x)\right| \leq \|f\|_{L^{p,q}}\|g\|_{L^{p',q'}}. \tag{1.55}$$

Demostración. En la verificación de este resultado vamos utilizar la caracterización de los espacios de Lorentz por medio de la función de reordenamiento decreciente junto con la desigualdad de Hardy-Littlewood presentada en el Teorema 1.2.3, en efecto por la mayoración (1.42), página 57 podemos escribir

$$\int_X |f(x)g(x)|d\mu(x) \leq \int_0^{+\infty} f^*(t)g^*(t)dt.$$

Suponemos para empezar que $1 < q, q' < +\infty$, entonces dado que se tienen las relaciones $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$, tenemos la igualdad

$$\int_0^{+\infty} f^*(t)g^*(t)dt = \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} f^*(t)\, t^{\frac{1}{p'}-\frac{1}{q'}} g^*(t)dt.$$

En este punto es suficiente aplicar la desigualdad de Hölder usual (ver el Teorema 4.2.3 del Volumen 1) en los espacios de Lebesgue con índices q y q' a las dos funciones $\varphi(t) = t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} f^*(t)$ y $\psi(t) = t^{\frac{1}{p'}-\frac{1}{q'}} g^*(t)$ para obtener

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} f^*(t)\, t^{\frac{1}{p'}-\frac{1}{q'}} g^*(t)dt &= \int_0^{+\infty} \varphi(t)\psi(t)dt \\ &\leq \left(\int_0^{+\infty} \varphi(t)^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^{+\infty} \psi(t)^{q'} dt\right)^{\frac{1}{q'}}.\end{aligned}$$

Reemplazando los valores de las funciones φ y ψ y junto con la caracterización (1.53) de la funcional $\|\cdot\|_{L^{p,q}}$ se tiene

$$\begin{aligned}&\leq \left(\int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} f^*(t)\right)^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{1}{p'}-\frac{1}{q'}} g^*(t)\right)^{q'} dt\right)^{\frac{1}{q'}} \\ &\leq \left(\int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{1}{p'}} g^*(t)\right)^{q'} \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q'}} \\ &\leq \|f\|_{L^{p,q}}\|g\|_{L^{p',q'}},\end{aligned}$$

lo que termina la demostración de las desigualdades de Hölder en el caso cuando $1 < q, q' < +\infty$. Cuando $q = +\infty$, se tiene entonces $q' = 1$ y escribimos utilizando la fórmula (1.54)

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} f^*(t)g^*(t)dt &= \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\, t^{\frac{1}{p'}-1} g^*(t)dt \\ &\leq \sup_{t>0}\left\{t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right\} \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{p'}} g^*(t)\frac{dt}{t},\end{aligned}$$

de donde se deduce la estimación $\displaystyle\int_X |f(x)g(x)|d\mu(x) \leq \|f\|_{L^{p,\infty}}\|g\|_{L^{p',1}}$, evidentemente, el mismo razonamiento se aplica cuando $q = 1$ y $q' = +\infty$. ■

Es interesante comparar este resultado general con el Corolario 1.1.3 presentado en la página 28 que estudiaba únicamente a los espacios $L^{p,\infty}$. En efecto, en ese corolario se obtiene la estimación

$$\|fg\|_{L^{1,\infty}} \leq C(p,p')\|f\|_{L^{p,\infty}}\|g\|_{L^{p',\infty}} \qquad (\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1), \tag{1.56}$$

en donde suponemos por comodidad que $1 < p, p' < +\infty$, mientras que el teorema anterior proporciona la mayoración

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^{p,\infty}}\|g\|_{L^{p',1}} \qquad (\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1).$$

Si deseamos comparar lo que es comparable, es útil aplicar las relaciones de inclusión entre los espacios de Lebesgue y de Lorentz explicitadas en la Proposición 1.1.6 de la página 20 (es decir $\|fg\|_{L^{1,\infty}} \leq \|fg\|_{L^1}$), para poder reescribir esta última mayoración de la siguiente manera

$$\|fg\|_{L^{1,\infty}} \leq \|f\|_{L^{p,\infty}}\|g\|_{L^{p',1}}. \tag{1.57}$$

Ahora, si bien ambas estimaciones (1.56) y (1.57) entran en la *familia* de las desigualdades de Hölder, cada una de ellas proporciona informaciones distintas y la diferencia (a parte de las técnicas de demostración) se sitúa en las cantidades $\|g\|_{L^{p',\infty}}$ y $\|g\|_{L^{p',1}}$ que intervienen en la parte derecha de estas mayoraciones.

Es entonces totalmente natural preguntarse cuál de estas dos estimaciones es más precisa, y haciendo abstracción de la constante que aparece en (1.56), la respuesta a esta pregunta pasa por una comparación entre $\|g\|_{L^{p',\infty}}$ y $\|g\|_{L^{p',1}}$, lo que equivale a estudiar las relaciones de inclusión existentes entre espacios de Lorentz, este tipo de problemas será estudiado en la parte C) a continuación, pero antes presentamos unos resultados adicionales.

B) Propiedades relativas a la teoría de la medida

En esta sección presentamos dos propiedades importantes de los espacios de Lorentz $L^{p,q}$ que son el lema de Fatou y el análogo del teorema de convergencia dominada de Lebesgue. Estos dos resultados son fundamentales pues permiten utilizar argumentos de paso al límite que son esenciales en el análisis matemático. Empecemos con nuestro primer resultado. El caso $p = q = +\infty$ no es estudiado pues corresponde por definición al espacio L^∞ que ya ha sido tratado anteriormente en el Volumen 1.

Teorema 1.2.7 (Lema de Fatou) *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido y sean p, q dos parámetros reales tales que $0 < p < +\infty$ y $0 < q \leq +\infty$. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada de funciones positivas que pertenecen al espacio de Lorentz $L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$, si se tiene $\liminf\limits_{n\to+\infty} f_n = f$ en μ-casi todas partes, entonces la función f pertenece al espacio de Lorentz $L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ y tenemos la desigualdad*

$$\|f\|_{L^{p,q}} \leq \liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|_{L^{p,q}}.$$

Demostración. La demostración es directa una vez que se tiene el resultado clásico para la integral de Lebesgue (ver el Teorema 3.3.2 del Volumen 1) y el punto 7) de la Proposición 1.2.5, página 50. En efecto, dado que tenemos la estimación $f^* \leq \liminf\limits_{n\to+\infty} f_n^*$, al construir la funcional $\|\cdot\|_{L^{p,q}}$ cuando $0 < q < +\infty$ se obtiene

$$\int_0^{+\infty} t^{\frac{q}{p}-1}(f^*)^q(t)dt \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} t^{\frac{q}{p}-1}(f_n^*)^q(t)dt,$$

es decir $\|f\|_{L^{p,q}} \leq \liminf\limits_{n\to+\infty} \|f_n\|_{L^{p,q}}$. El caso cuando $q = +\infty$ se estudia de manera similar y se tiene la mayoración

$$t^{\frac{1}{p}} f^*(t)dt \leq \liminf_{n\to+\infty} t^{\frac{1}{p}} f_n^*(t),$$

de donde se deduce sin problema que $\|f\|_{L^{p,+\infty}} \leq \liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|_{L^{p,+\infty}}$. ■

Pronto veremos algunas aplicaciones interesantes de este resultado que nos permitirán estudiar más en detalle las propiedades de los espacios de Lorentz $L^{p,q}$, pero en lo inmediato veamos cómo utilizar el Lema de Fatou en la generalización del teorema de convergencia dominada en estos espacios de funciones.

Teorema 1.2.8 (de convergencia dominada) *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido. Sean $0 < p < +\infty$ y $0 < q \leq +\infty$ dos reales y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones que pertenecen al espacio $L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ tal que se tienen el límite $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$ en μ-casi todas partes.*

Si existe una función $g \in L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ tal que $|f_n(x)| \leq g(x)$ en μ-casi todas partes (que es la condición de acotación), entonces se tiene que la función f pertenece al espacio $L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ y además $\|f_n - f\|_{L^{p,q}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Demostración. De la misma forma que en los espacios de Lebesgue la demostración de este resultado se basa en el Lema de Fatou. En efecto, por la hipótesis de dominación, la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada por la función $g \in L^{p,q}$, luego por el punto 4) de la Proposición 1.2.5, página 50, se obtiene que la función límite f también pertenece al espacio de Lorentz $L^{p,q}$. Tenemos entonces $f^{*\,q} \leq g^{*\,q}$ y por lo tanto $f^{*\,q} + g^{*\,q} \geq 0$, de manera que aplicando el Lema de Fatou podemos escribir

$$\int_0^{+\infty} \left(f^{*\,q}(t) + g^{*\,q}(t)\right) t^{\frac{q}{p}-1}dt \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \left(f_n^{*\,q}(t) + g^{*\,q}(t)\right) t^{\frac{q}{p}-1}dt,$$

y puesto que la función g pertenece al espacio de Lorentz $L^{p,q}$ obtenemos

$$\int_0^{+\infty} f^{*\,q}(t)t^{\frac{q}{p}-1}dt \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n^{*\,q}(t)t^{\frac{q}{p}-1}dt.$$

Razonando de forma similar tenemos que $g^{*\,q} - f^{*\,q} \geq 0$ y

$$\int_0^{+\infty} \left(g^{*\,q}(t) - f^{*\,q}(t)\right) t^{\frac{q}{p}-1}dt \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \left(g^{*\,q}(t) - f_n^{*\,q}(t)\right) t^{\frac{q}{p}-1}dt,$$

es decir, sustrayendo $g^{*\,q}$, se tiene por el Lema de Fatou

$$\int_0^{+\infty} -f^{*\,q}(t)t^{\frac{q}{p}-1}dt \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} -f_n^{*\,q}(t)t^{\frac{q}{p}-1}dt,$$

lo que es equivalente a

$$\int_0^{+\infty} f^{*\,q}(t)t^{\frac{q}{p}-1}dt \geq \limsup_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n^{*\,q}(t)t^{\frac{q}{p}-1}dt.$$

Hemos entonces construido las acotaciones siguientes:

$$\limsup_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n^{*\,q}(t)t^{\frac{q}{p}-1}dt \leq \int_0^{+\infty} f^{*\,q}(t)t^{\frac{q}{p}-1}dt \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n^{*\,q}(t)t^{\frac{q}{p}-1}dt,$$

lo que termina la demostración del teorema de convergencia dominada en los espacios de Lorentz $L^{p,q}$. ■

C) Relaciones entre los espacios de Lorentz

¿Qué relaciones de inclusión existen entre todos estos espacios de Lorentz? Sabemos por la Proposición 1.1.6, página 20, que en el caso general se tiene la inclusión $L^p \subset L^{p,\infty}$ para todo índice $0 < p \leq +\infty$ y también sabemos por la Proposición 1.2.1, página 37, que se tiene la identificación $L^{p,p} = L^p$ entre los espacios de Lorentz y de Lebesgue. Recordamos ahora que gracias a las funciones dadas en la expresión (1.29) de la página 38, los espacios de Lorentz L^{p_0,q_0} y L^{p_1,q_1} con $0 < p_0, p_1 < +\infty$ y $0 < q_0, q_1 \leq +\infty$ son distintos en el sentido que no existen relaciones de inclusión entre ellos, sin embargo este ejemplo no permitía distinguir el caso de los espacios L^{p,q_0} y L^{p,q_1}, es decir cuando el primer índice es el mismo mientras que el segundo varía.

En esta sección vamos a estudiar más en detalle estos aspectos y vamos a mostrar con el Teorema 1.2.9 las relaciones de inclusión que existen entre los espacios de Lorentz y veremos algunas aplicaciones de estas inclusiones.

Pero antes, la siguiente proposición nos explica lo que sucede con los espacios de Lorentz $L^{p,q}$ si hacemos variar el índice q hacia el infinito.

Proposición 1.2.12 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido. Sea $0 < p < +\infty$ un parámetro real y sea $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ una función medible que pertenece al espacio de Lorentz $L^{p,q_0}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ para algún índice q_0 tal que $p \leq q_0 < +\infty$. Entonces tenemos el límite $\lim\limits_{q_0 \to +\infty} \|f\|_{L^{p,q_0}} = \|f\|_{L^{p,\infty}}$.*

Prueba. Una vez que disponemos de la caracterización de los espacios de Lorentz dada en la Definición 1.2.7, página 68, que se basa en las función de reordenamiento decreciente, la prueba de este resultado es muy similar al caso de los espacios de Lebesgue L^p . En efecto, por la fórmula (1.53) tenemos

$$\|f\|_{L^{p,q_0}} = \left(\int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right)^{q_0} \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q_0}} = \left(\int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q_0}} f^*(t)\right)^{q_0} dt\right)^{\frac{1}{q_0}},$$

cantidad que puede verse como la norma L^{q_0} de la función $t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q_0}} f^*(t)$, de esta manera aplicando el Teorema 4.2.8 del Volumen 1, podemos hacer tender $q_0 \to +\infty$ para obtener el resultado deseado. ■

Este resultado muestra la estabilidad de la funcional $\|\cdot\|_{L^{p,q}}$ cuando se hace tender el segundo índice al infinito, mostrando de esta manera una cierta forma de *continuidad* con respecto a este segundo parámetro.

Veamos ahora el resultado más importante de esta sección que explica las relaciones de inclusión entre los espacios de Lorentz $L^{p,q}$ cuando el primer índice está fijado y hacemos variar el segundo índice.

Teorema 1.2.9 (Inclusiones entre espacios de Lorentz) *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido y sean p, q_1, q_2 tres índices reales tales que $0 < p < +\infty$ y $0 < q_1 < q_2 \leq +\infty$. Entonces el espacio de Lorentz $L^{p,q_1}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ está* *estrictamente incluído en el espacio* $L^{p,q_2}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$, *es decir que los espacios de Lorentz son* crecientes *con respecto al segundo índice. Al nivel de las normas, esta propiedad se refleja por la estimación*

$$\|f\|_{L^{p,q_2}} \leq C\|f\|_{L^{p,q_1}}. \tag{1.58}$$

con $C = \left(\frac{q_1}{p}\right)^{\frac{1}{q_1}}$ *si* $q_2 = +\infty$ *y* $C = \left(\frac{q_1}{p}\right)^{\frac{q_2-q_1}{q_1 q_2}}$ *si* $0 < q_2 < +\infty$.

Demostración. Consideremos primero el caso $q_2 = +\infty$, $0 < p < +\infty$ y $0 < q_1 < +\infty$. Podemos escribir entonces bajo estas hipótesis la identidad

$$t^{\frac{1}{p}} f^*(t) = \left(\frac{q_1}{p} \int_0^t \left(s^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right)^{q_1} \frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{q_1}}.$$

Dado que la función de reordenamiento es decreciente, tenemos la desigualdad $f^*(t) \leq f^*(s)$ para todo $0 \leq s \leq t$, de donde obtenemos la mayoración

$$t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \leq \left(\frac{q_1}{p} \int_0^t \left(s^{\frac{1}{p}} f^*(s)\right)^{q_1} \frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{q_1}}.$$

a partir de la cual se obtiene sin problema la estimación siguiente que es uniforme con respecto a la variable t

$$t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \leq \left(\frac{q_1}{p} \int_0^{+\infty} \left(s^{\frac{1}{p}} f^*(s)\right)^{q_1} \frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{q_1}},$$

es decir, utilizando la Definición 1.2.7 página 68 de los espacios de Lorentz obtenemos

$$\|f\|_{L^{p,\infty}} = \sup_{t>0}\{t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\} \leq \left(\frac{q_1}{p}\right)^{\frac{1}{q_1}} \|f\|_{L^{p,q_1}}, \tag{1.59}$$

y se tiene la inclusión de espacios $L^{p,q_1} \subset L^{p,\infty}$ para todo $0 < q_1 < +\infty$.

Estudiemos ahora el caso $0 < p < +\infty$ y $0 < q_1 < q_2 < +\infty$. Para ello escribimos

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^{p,q_2}} &= \left(\int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right)^{q_2-q_1+q_1} \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q_2}} \\
&\leq \sup_{t>0}\{t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\}^{\frac{q_2-q_1}{q_2}} \left(\int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right)^{q_1} \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q_2}},
\end{aligned}$$

y dado que acabamos de verificar que se tiene la inclusión $L^{p,q_1} \subset L^{p,\infty}$, utilizando la estimación (1.59) tenemos

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^{p,q_2}} &\leq \left(\left(\frac{q_1}{p}\right)^{\frac{1}{q_1}} \|f\|_{L^{p,q_1}}\right)^{\frac{q_2-q_1}{q_2}} \|f\|_{L^{p,q_1}}^{\frac{q_1}{q_2}} \\
&\leq \left(\frac{q_1}{p}\right)^{\frac{q_2-q_1}{q_1 q_2}} \|f\|_{L^{p,q_1}}^{1-\frac{q_1}{q_2}} \|f\|_{L^{p,q_1}}^{\frac{q_1}{q_2}} \leq \left(\frac{q_1}{p}\right)^{\frac{q_2-q_1}{q_1 q_2}} \|f\|_{L^{p,q_1}},
\end{aligned}$$

hemos entonces demostrado que si una función f pertenece al espacio de Lorentz L^{p,q_1} entonces también pertenece al espacio L^{p,q_2} con $0 < q_1 < q_2 < +\infty$.

Para terminar la demostración del teorema necesitamos demostrar que las inclusiones son estrictas y para ello vamos a exhibir una función tal que, para todo parámetro $0 < p < +\infty$ y para todos dos índices $0 < q_1 < q_2 \leq +\infty$, se tiene que f pertenece al espacio L^{p,q_2} pero f no pertenece al espacio L^{p,q_1}. Por simplicidad, consideramos como marco general de trabajo la recta real $\mathbb{R}$ dotada de su estructura natural. Empezamos con el caso $0 < q_1 < q_2 < +\infty$ y sea entonces la función

$$\begin{array}{rcl} f :]0, e^{-\frac{\beta}{\alpha}}[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha |\ln(x)|^\beta}, \end{array} \tag{1.60}$$

en donde los parámetros α y β son reales positivos que serán determinados posteriormente en función de los índices p, q_1 y q_2. Observamos que esta función es continua y estrictamente decreciente, por lo tanto por la Proposición 1.2.8, página 56, tenemos $f = f^*$ lo que nos permite escribir por un lado

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^{p,q_1}}^{q_1} &= \int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{1}{p}} f(t)^*\right)^{q_1} \frac{dt}{t} = \int_0^{e^{-\frac{\beta}{\alpha}}} t^{\frac{q_1}{p}-1} \frac{1}{t^{\alpha q_1} |\ln(t)|^{\beta q_1}} dt \\ &= \int_0^{e^{-\frac{\beta}{\alpha}}} \frac{1}{t^{1+\alpha q_1 - \frac{q_1}{p}} |\ln(t)|^{\beta q_1}} dt, \end{aligned}$$

y por otro lado, por los mismos argumentos tenemos:

$$\|f\|_{L^{p,q_2}}^{q_2} = \int_0^{e^{-\frac{\beta}{\alpha}}} \frac{1}{t^{1+\alpha q_2 - \frac{q_2}{p}} |\ln(t)|^{\beta q_2}} dt.$$

Estas integrales, conocidas como *integrales de Bertrand*[21], son finitas si la potencia de la variable t es estrictamente inferior a 1 o si esta potencia es igual a 1 y la potencia del logaritmo es estrictamente mayor a 1 (ver el Ejercicio 1.4 para más detalles). De esta manera, si fijamos $\alpha = \frac{1}{p}$ y si fijamos el parámetro β de tal manera que se tenga $q_1 < \frac{1}{\beta} < q_2$, entonces tenemos que la cantidad $\|f\|_{L^{p,q_2}}$ es finita mientras que la cantidad $\|f\|_{L^{p,q_1}}$ no lo es y de esta manera podemos evidenciar que las inclusiones entre espacios de Lorentz son estrictas.

Falta considerar el caso cuando $0 < p < +\infty$ y $0 < q_1 < q_2 = +\infty$. Vamos pues a mostrar una función que pertenece al espacio de Lorentz $L^{p,\infty}$ pero que no pertenece al espacio L^{p,q_1}, en efecto si consideramos la función

$$\begin{array}{rcl} f :]0, 1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = x^{-\frac{1}{p}}, \end{array}$$

que es estrictamente decreciente, por la Proposición 1.2.8 página 56 tenemos la identidad $f = f^*$ y entonces la cantidad $\|f\|_{L^{p,\infty}} = \sup\limits_{t>0}\{t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\}$ es finita.

[21] Joseph Bertrand (1822-1900), matemático francés.

Pero se tiene que la cantidad

$$\|f\|_{L^{p,q_1}} = \int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right)^{q_1} \frac{dt}{t} = \int_0^1 \frac{dt}{t},$$

nunca es finita y así mismo tenemos que las inclusiones entre espacios de Lorentz demostradas anteriormente son estrictas. ■

Observación 1.10 Los ejemplos de funciones presentados en la fórmula (1.29) de la página 38 permitían distinguir los espacios de Lorentz L^{p_1,q_1} y L^{p_2,q_2} cuando los parámetros p_1 y p_2 son distintos, pero estos ejemplos no distinguían dos espacios de Lorentz L^{p,q_1} y L^{p,q_2} con el mismo índice p y con valores distintos del segundo índice. Para verificar que estos espacios son en verdad diferentes utilizamos las funciones dadas en la expresión (1.60): esto nos lleva a decir *grosso modo* que los espacios de Lorentz constituyen una corrección logarítmica de los espacios de Lebesgue.

En el siguiente gráfico ilustramos las inclusiones existentes de los espacios de Lebesgue y de Lorentz, en donde los parámetros reales p_0, p_1, q, r verifican $0 < p_0 < 1$, $1 < p_1 < +\infty$, $0 < r < 1$ y $1 < q < +\infty$.

$p = p_0$	$p = 1$	$p = p_1$	$p = +\infty$
$L^{p_0,r}$	$L^{1,r}$	$L^{p_1,r}$	$L^{\infty,r} = \{0\}$
$\cap$	$\cap$	$\cap$	
$L^{p_0,p_0} = L^{p_0}$	$\vdots$	$\vdots$	
$\cap$	$\cap$	$\cap$	
$L^{p_0,1}$	$L^{1,1} = L^1$	$L^{p_1,1}$	$L^{\infty,1} = \{0\}$
$\cap$	$\cap$	$\cap$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$L^{\infty,q} = \{0\}$
$\cap$	$\cap$	$\cap$	
$\vdots$	$\vdots$	$L^{p_1,p_1} = L^{p_1}$	
$\cap$	$\cap$	$\cap$	
$L^{p_0,q}$	$L^{1,q}$	$\vdots$	
$\cap$	$\cap$	$\cap$	
$L^{p_0,\infty}$	$L^{1,\infty}$	$L^{p_1,\infty}$	$L^{\infty,\infty} = L^\infty$

Figura 1.7: Relaciones entre espacios de Lorentz $L^{p,q}$.

Recordamos que las inclusiones dentro de cada columna son estrictas y que en el caso general no existe ninguna relación de inclusión entre columnas.

Una vez que hemos aclarado las relaciones de inclusión entre los espacios de Lorentz $L^{p,q}$, podemos responder a la pregunta planteada al final de la sección anterior, en la página 72: ¿cuál de las desigualdades de Hölder (1.56) o (1.57) es más precisa? La primera desigualdad es

$$\|fg\|_{L^{1,\infty}} \leq C\|f\|_{L^{p,\infty}}\|g\|_{L^{p',\infty}},$$

con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, mientras que la segunda es

$$\|fg\|_{L^{1,\infty}} \leq \|f\|_{L^{p,\infty}}\|g\|_{L^{p',1}}.$$

Gracias al teorema que acabamos de demostrar, tenemos la mayoración siguiente $\|g\|_{L^{p',\infty}} \leq C\|g\|_{L^{p',1}}$, de donde se deduce sin problema que la desigualdad (1.56) es más precisa que la estimación (1.57), es decir que tenemos

$$\|fg\|_{L^{1,\infty}} \leq C\|f\|_{L^{p,\infty}}\|g\|_{L^{p',\infty}} \leq C\|f\|_{L^{p,\infty}}\|g\|_{L^{p',1}}.$$

Sin embargo hay una pequeña ventaja en la segunda desigualdad (1.57) que consiste en la ausencia de constante, lo cual puede ser muy útil en las aplicaciones.

Veamos ahora un corolario que completa el Teorema 1.2.1 de la página 41.

Corolario 1.2.6 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido, sean $0 < p_0 < p_1 \leq +\infty$ dos parámetros reales y sea f una función medible tal que $f \in L^{p_0,q_0}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K}) \cap L^{p_1,q_1}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ donde $0 < q_0, q_1 \leq +\infty$, entonces $f \in L^{p,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ para todo $p_0 < p < p_1$ y se tiene la desigualdad de interpolación siguiente*

$$\|f\|_{L^{p,\infty}} \leq C(p_0, p, p_1, q_0, q_1)\|f\|^{\theta}_{L^{p_0,q_0}}\|f\|^{1-\theta}_{L^{p_1,q_1}},$$

donde $\theta = \frac{p_0(p_1-p)}{p(p_1-p_0)}$ si $p_1 < +\infty$ y donde $\theta = \frac{p_0}{p}$ si $p_1 = +\infty$.

Prueba. Por el Teorema 1.2.1 se tiene la desigualdad

$$\|f\|_{L^{p,q}} \leq C(p_0, p, p_1)\|f\|^{\theta}_{L^{p_0,\infty}}\|f\|^{1-\theta}_{L^{p_1,\infty}},$$

para algún $0 < q < +\infty$. Basta entonces aplicar a ambos lados de la desigualdad anterior la inclusión de espacios $L^{p,q} \subset L^{p,\infty}$ (que se traduce por la estimación $\|f\|_{L^{p,\infty}} \leq C\|f\|_{L^{p,q}}$). ■

Presentamos otro corolario de estas inclusiones entre espacios que permite estudiar un poco más en detalle la estructura de los espacios de Lorentz $L^{p,q}$, generalizando de esta manera el Teorema 1.1.1, página 18:

Proposición 1.2.13 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido. Si p, q son dos parámetros reales tales que $0 < p, q < +\infty$, entonces los espacios de Lorentz generales $(L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K}), \|\cdot\|_{L^{p,q}})$ son espacios de cuasi-Banach.*

Prueba. El hecho que los espacios de Lorentz $(L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K}), \|\cdot\|_{L^{p,q}})$ son espacios cuasi-normados ya ha sido verificado en el Corolario 1.2.1, página 41, usando la caracterización de la funcional $\|\cdot\|_{L^{p,q}}$ basada en la función de distribución, de manera que lo único que queda por verificar es la completitud con respecto a esta funcional.

Dado que el caso cuando $0 < p < +\infty$ y $q = +\infty$ ya ha sido tratado en el Teorema 1.1.1, consideramos únicamente el caso $0 < p, q < +\infty$. Sea pues $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en donde todas las funciones pertenecen al espacio de Lorentz $L^{p,q}$. Dado que se tiene la inclusión $L^{p,q} \subset L^{p,\infty}$, la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ también es una sucesión de Cauchy para el espacio $L^{p,\infty}$ y por la expresión (1.10) se tiene que también es una sucesión de Cauchy en μ-medida, entonces por la Proposición 1.1.5 de la página 17, existe una subsucesión $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge en μ-casi todas partes hacia una función medible f. Fijemos $k_0 \in \mathbb{N}$, entonces como se tiene

$$|f(x) - f_{n_{k_0}}(x)| = \lim_{k\to+\infty} |f_{n_k}(x) - f_{n_{k_0}}(x)|,$$

podemos aplicar el punto 7) de la Proposición 1.2.5 y obtenemos

$$(f - f_{n_{k_0}})^*(t) \leq \liminf_{k\to+\infty} (f_{n_k} - f_{n_{k_0}})^*(t).$$

Reconstruyendo la funcional $\|\cdot\|_{L^{p,q}}$ a partir de esta estimación podemos escribir, aplicando el Lema de Fatou

$$\|f - f_{n_{k_0}}\|^q_{L^{p,q}} \leq \liminf_{k\to+\infty} \|f_{n_k} - f_{n_{k_0}}\|^q_{L^{p,q}},$$

hacemos ahora tender k_0 hacia el infinito y usamos el hecho que la sucesión es de Cauchy para obtener la la subsucesión $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge en los espacios de Lorentz $L^{p,q}$. Para terminar, como estamos trabajando sobre espacios cuasi-normados, aplicamos la Proposición 1.1.4 de la página 16 que nos permite concluir que la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy es convergente hacia una función $f \in L^{p,q}$. ■

Como vemos con este resultado, disponemos de una estructura de espacio cuasi-normado completo para todos los espacios de Lorentz $L^{p,q}$, pero esta estructura aún deja mucho que desear y pronto veremos cómo obtener una verdadera norma para estos espacios.

Mientras tanto, y para terminar esta sección, generalizamos el Corolario 1.1.2 presentado en la página 24 con el resultado a continuación en donde se obtienen relaciones de inclusión si la masa total del espacio es finita.

Proposición 1.2.14 (Inclusiones - Medida finita) *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido de masa total finita. Si $0 < p < q < +\infty$ entonces para todo $0 < r \leq +\infty$, los espacios de Lorentz $L^{q,r}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ están contenidos en los espacios $L^{p,s}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ para todo $0 < s \leq +\infty$.*

Prueba. Supongamos para empezar que $0 < s < +\infty$. Sabemos por el resultado general dado en el Teorema 1.2.9 que se tienen las inclusiones $L^{q,r} \subset L^{q,\infty}$ para todo $0 < r < +\infty$, lo que se refleja con la desigualdad (1.59), es decir $\|f\|_{L^{q,\infty}} \leq C\|f\|_{L^{q,r}}$. De esta manera, lo único que debemos verificar es la mayoración siguiente

$$\|f\|_{L^{p,s}} \leq C(s, p, q)\mu(X)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_{L^{q,\infty}}, \tag{1.61}$$

en donde se tiene $0 < p < q < +\infty$, $0 < s < +\infty$ y $C(s,p,q) = \left(\frac{pq}{s(q-p)}\right)^{\frac{1}{s}}$.

Ahora, como tenemos la identidad $f = f\mathbb{1}_X$, por el punto 5) de la Proposición 1.2.6, página 52, tenemos la mayoración $(f\mathbb{1}_X)^*(t) \leq f^*(t)\mathbb{1}_{[0,\mu(X)[}$ y como la medida del conjunto X es finita, podemos escribir

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^{p,s}} &= \|f\mathbb{1}_X\|_{L^{p,s}} = \left(\int_0^{+\infty}\left(t^{\frac{1}{p}}(f\mathbb{1}_X)^*(t)\right)^s\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{s}}\\
&\leq \left(\int_0^{+\infty}\left(t^{\frac{1}{p}}f^*(t)\mathbb{1}_{\mu(X)}\right)^s\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{s}} = \left(\int_0^{\mu(X)}\left(t^{\frac{1}{p}}f^*(t)\right)^s\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{s}},
\end{aligned}$$

como $0 < p < q < +\infty$, entonces

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^{\mu(X)}\left(t^{\frac{1}{p}}f^*(t)\right)^s\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{s}} &= \left(\int_0^{\mu(X)} t^{\frac{s}{p}-\frac{s}{q}-1}\, t^{\frac{s}{q}}(f^*)^s(t)dt\right)^{\frac{1}{s}}\\
&\leq \sup_{t>0}\{t^{\frac{1}{q}}f^*(t)\}\left(\int_0^{\mu(X)} t^{\frac{s}{p}-\frac{s}{q}-1}dt\right)^{\frac{1}{s}},
\end{aligned}$$

y después de integrar se obtienen las mayoraciones

$$\|f\|_{L^{p,s}} \leq \|f\|_{L^{q,\infty}}\left(\frac{pq}{s(q-p)}\right)^{\frac{1}{s}}\mu(X)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}},$$

de donde se deducen las inclusiones $L^{q,\infty} \subset L^{p,s}$.

El caso cuando $s = +\infty$ es totalmente similar, en efecto: por los mismos argumentos utilizados aquí arriba tenemos (puesto que $0 < p < q < +\infty$)

$$\begin{aligned}
t^{\frac{1}{p}}f^*(t) &= t^{\frac{1}{p}}(f\mathbb{1}_X)^*(t) \leq t^{\frac{1}{p}}f^*(t)\mathbb{1}_{[0,\mu(X)[} = t^{\frac{1}{q}}f^*(t)t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\mathbb{1}_{[0,\mu(X)[}\\
&\leq \sup_{t>0}\{t^{\frac{1}{q}}f^*(t)\}\mu(X)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}},
\end{aligned}$$

hemos entonces verificado la mayoración $\|f\|_{L^{p,\infty}} \leq \mu(X)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|f\|_{L^{q,\infty}}$, que implica la inclusión $L^{q,\infty} \subset L^{p,\infty}$, lo que junto con las inclusiones generales dadas en el Teorema 1.2.9 permite terminar la demostración de la proposición. ■

Es importante notar que la hipótesis $p < q$ no puede ser dejada de lado, pues caso contrario es posible encontrar sin mayor dificultad contraejemplos para las inclusiones consideradas.

D) Un primer estudio de normabilidad de los espacios de Lorentz

Hemos caracterizados a los espacios de Lorentz $L^{p,q}$ por medio de la funcional $\|\cdot\|_{L^{p,q}}$ que puede ser definida ya sea usando la función de distribución d_f, ya sea utilizando la función de reordenamiento decreciente f^* y cada uno de estos puntos de vista permite obtener resultados y propiedades que nos informan sobre las propiedades de estos espacios de funciones, y en particular sabemos que todos estos espacios disponen de una estructura de espacio de cuasi-Banach.

Vamos a ver ahora que una propiedad importante de la función de reordenamiento decreciente es que permite, junto con la noción de espacio medido resonante, demostrar de manera elemental que los espacios de Lorentz son en realidad espacios normados. Sin embargo la prueba que vamos a presentar solo será válida para un cierto rango de los parámetros p y q, y para estudiar otros casos será necesario considerar un tercer punto de vista que será detallado en la Sección 1.3.

El resultado siguiente nos proporciona pues un primer estudio sobre la normabilidad de los espacios de Lorentz.

Teorema 1.2.10 (Normabilidad) *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido resonante. Si los índices p, q verifican $1 \leq q \leq p < +\infty$ entonces el espacio de Lorentz $(L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K}), \|\cdot\|_{L^{p,q}})$ es un espacio normado.*

Demostración. Cuando $1 \leq p < +\infty$ y si $p = q$, entonces no hay nada que demostrar pues los espacios de Lorentz se reducen en este caso a los espacios de Lebesgue L^p que son espacios de Banach.

Suponemos entonces que $1 \leq q < p < +\infty$. En estas condiciones, la función $t \longmapsto t^{\frac{q}{p}-1}$ es continua y estrictamente decreciente sobre $[0, +\infty[$ y tenemos por la Proposición 1.2.8, página 56, la identidad $(t^{\frac{q}{p}-1})^* = t^{\frac{q}{p}-1}$. Ahora, como por hipótesis el espacio medido es resonante, disponemos por definición de la identidad (1.43), página 59, y podemos escribir

$$\begin{aligned} \|f+g\|_{L^{p,q}} &= \left(\int_0^{+\infty} t^{\frac{q}{p}-1}(f+g)^{*\,q}(t)dt\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\sup \int_X |f(x)+g(x)|^q |h(x)| d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}}, \end{aligned}$$

en donde el supremo es tomado sobre toda las funciones h equidistribuidas con la función $t^{\frac{q}{p}-1}$. Reescribimos ahora esta identidad anterior de la siguiente manera

$$\|f+g\|_{L^{p,q}} = \sup \left(\int_X \left| f(x)|h(x)|^{\frac{1}{q}} + g(x)|h(x)|^{\frac{1}{q}}\right|^q d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}},$$

y puesto que $1 \leq q < +\infty$, podemos aplicar la desigualdad de Minkowski usual y la subaditividad del supremo para obtener

$$\|f+g\|_{L^{p,q}} \leq \sup \left(\int_X |f(x)|^q |h(x)| d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}} + \sup \left(\int_X |g(x)|^q |h(x)| d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Utilizando una vez más el hecho de que el espacio medido es resonante, que se tiene la fórmula $(t^{\frac{q}{p}-1})^* = t^{\frac{q}{p}-1}$ y que se tiene la identidad (1.43) escribimos

$$\|f+g\|_{L^{p,q}} \leq \left(\int_0^{+\infty} t^{\frac{q}{p}-1}(|f|^q)^*(t)dt\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_0^{+\infty} t^{\frac{q}{p}-1}(|g|^q)^*(t)dt\right)^{\frac{1}{q}},$$

finalmente, utilizando el punto 3) de la Proposición 1.2.5, página 50, tenemos

$$\begin{aligned}\|f+g\|_{L^{p,q}} &\leq \left(\int_0^{+\infty} t^{\frac{q}{p}-1}(f^*(t))^q dt\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_0^{+\infty} t^{\frac{q}{p}-1}(g^*(t))^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\\ &\leq \|f\|_{L^{p,q}} + \|g\|_{L^{p,q}},\end{aligned}$$

lo que termina la demostración de la desigualdad triangular. ■

En la verificación de este teorema hemos utilizado el concepto de espacio medido resonante, que permite pasar de una integral sobre las funciones de reordenamiento decreciente a una integral en donde podemos aplicar la desigualdad triangular usual en los espacios de Lebesgue. Pero para realizar estos cálculos necesitamos que el peso $t^{\frac{q}{p}-1}$ sea estrictamente decreciente, lo que se tiene por la hipótesis $1 \leq q < p$ y en el caso cuando $p < q$, no es posible utilizar los argumentos anteriores.

Pero esto no significa que en estas situaciones los espacios de Lorentz correspondientes no sean normables, simplemente tendremos que cambiar de punto de vista y para ello será necesario reemplazar la función de reordenamiento decreciente f^* por una nueva función, que notaremos f^{**}, y que verifica propiedades que nos permitirán hacer un estudio detallado de la eventual normabilidad de estos espacios de funciones.

1.3. Distancias y Normas en los espacios de Lorentz

En esta sección concentramos nuestro estudio en la posibilidad de dotar (o no) a los espacios de Lorentz $L^{p,q}$ de una estructura de espacio métrico y de espacio normado.

Sabemos que los espacios de Lebesgue L^p son espacios normados cuando $1 \leq p \leq +\infty$ y que son espacios métricos si $0 < p < 1$. Dado que los espacios de Lorentz son generalizaciones de los espacios de Lebesgue, es de esperarse que estos dos casos se den igualmente pero con una dificultad suplementaria pues también hay que tomar en cuenta el índice q. Un primer ejemplo del rol de este parámetro puede verse en el Teorema 1.2.10 anterior, en donde se obtenía que los espacios de Lorentz $L^{p,q}$ eran espacios normados cuando los índices p y q verificaban la condición $1 \leq q \leq p < +\infty$ y cuando el espacio medido era resonante.

En este sentido, el objetivo de toda esta sección es triple: primero, en el caso cuando el parámetro p que caracteriza los espacios de Lorentz $L^{p,q}$ verifica $0 < p < 1$, es de esperarse que estos espacios puedan ser dotados de una distancia al igual que los espacios de Lebesgue L^p correspondientes y deseamos por lo tanto exhibir esta distancia. Segundo, estudiar el caso cuando los parámetros p y q que determinan los espacios de Lorentz verifican $1 \leq p \leq q < +\infty$, es decir cuando estamos fuera del marco de trabajo del Teorema 1.2.10. Tercero, obtener resultados de normabilidad sin la condición de resonancia exigida en la sección anterior.

Antes de pasar a los aspectos técnicos, recordemos que por el Corolario 1.2.1 presentado en la página 41, en el caso general (cuando $0 < p < +\infty$ y $0 < q < +\infty$) tenemos que la funcional $\|\cdot\|_{L^{p,q}}$ es una cuasi-norma: es decir que el problema de saber para qué índices p y q los espacios de Lorentz disponen de una distancia o de una norma se "reduce" a estudiar la desigualdad triangular y vamos a ver en las páginas que siguen que obtener esta desigualdad no es un ejercicio totalmente trivial.

1.3.1. La función maximal f_r^{**}

Recordemos que los espacios de Lorentz $L^{p,q}$ con $0 < p < +\infty$ y $0 < q \leq +\infty$, habían sido definidos por medio de la funcional $\|\cdot\|_{L^{p,q}}$ que podía expresarse de dos maneras distintas:

- ya sea utilizando la función de distribución d_f con la fórmula (1.25):

$$\|f\|_{L^{p,q}} = p^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^{+\infty} \left(\alpha\, d_f(\alpha)^{\frac{1}{p}} \right)^q \frac{d\alpha}{\alpha} \right)^{\frac{1}{q}},$$

- ya sea por medio de la función de reordenamiento decreciente f^* con la expresión (1.53):

$$\|f\|_{L^{p,q}} = \left(\int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}},$$

  con las modificaciones del caso en ambas expresiones cuando $q = +\infty$, ver las fórmulas (1.26) y (1.54) para los detalles.

Sin embargo, ninguna de estas dos expresiones permitía obtener *directamente* la desigualdad triangular para esta funcional pues no se tiene a disposición estimaciones *puntuales* del tipo

$$d_{f+g}(\alpha) \leq d_f(\alpha) + d_g(\alpha) \quad \text{o} \quad (f+g)^*(t) \leq f^*(t) + g^*(t),$$

como hemos visto con los contraejemplos correspondientes que han sido presentados en las páginas 14 y 56.

La idea es entonces reemplazar las funciones de distribución d_f y de reordenamiento decreciente f^* por una función diferente, que notaremos f_r^{**}, que sí nos permita obtener este tipo de desigualdades puntales. Empezaremos pues nuestra exposición con la definición de esta función f_r^{**} y de sus principales propiedades, para luego compararla con la función de distribución d_f y la función de reordenamiento decreciente f^*.

Definición 1.3.1 (Función maximal f_r^{**}) *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido y sea r un real tal que verifica la condición $0 < r < +\infty$. Si f es una función* *medible definida sobre X y a valores en $\mathbb{K}$, definimos entonces la función maximal $f_r^{**} :]0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ por medio de la expresión*

$$f_r^{**}(t) = \left(\frac{1}{t} \int_0^t (f^*)^r(s)ds \right)^{\frac{1}{r}}. \tag{1.62}$$

En el caso cuando $r = 1$, notaremos más simplemente $f^{**} = f_1^{**}$.

Como la función f es medible, entonces tiene sentido considerar su función de distribución d_f que a su vez permite determinar sin problema la función de reordenamiento decreciente f^*, a partir de la cual definimos la función maximal f_r^{**}: vemos entonces que para obtener esta función maximal f_r^{**} es necesario realizar *dos* transformaciones a la función inicial f. Esta manipulaciones sucesivas pueden resultar difíciles de realizar en la práctica, pero las propiedades que vamos a obtener de esta función maximal justifican plenamente su estudio.

Antes de pasar a la exposición de algunos ejemplos y propiedades de esta función, vamos a justificar su denominación de *función maximal* y para ello fijaremos por comodidad $r = 1$. Sabemos por la desigualdad de Hardy-Littlewood demostrada en el Teorema 1.2.3, página 57, que si f y g son dos funciones integrables definidas sobre el espacio medido $(X, \mathscr{A}, \mu)$ a valores en $\mathbb{K}$, entonces se tiene la desigualdad general

$$\int_X |f(x)g(x)|d\mu(x) \leq \int_0^{+\infty} f^*(s)g^*(s)ds.$$

Fijemos ahora la función g de tal manera que sea la función indicatriz de un conjunto medible A de μ-medida igual a t, es decir $g(x) = \mathbb{1}_A(x)$ con $\mu(A) = t$. Sabemos entonces por el ejemplo (i) de la página 44 que se tiene $g^*(s) = \mathbb{1}_{[0,\mu(A)[}(s) = \mathbb{1}_{[0,t[}(s)$, y por lo tanto la desigualdad anterior se escribe

$$\int_A |f(x)|d\mu(x) \leq \int_0^t f^*(s)ds,$$

de manera que dividiendo ambas partes de esta estimación por $\mu(A) = t$ obtenemos

$$\frac{1}{\mu(A)} \int_A |f(x)|d\mu(x) \leq \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s)ds = f^{**}(t). \tag{1.63}$$

Esto significa que el promedio de la función $|f|$ sobre todos los conjuntos de medida t es siempre controlado por el correspondiente promedio de su función de reordenamiento decreciente f^*, que es por definición igual al valor de la función f^{**} evaluada en t.

Pero esto no es todo, por la misma desigualdad de Hardy-Littlewood, aplicada esta vez al caso del intervalo $]0, +\infty[$, tenemos que la cantidad $\frac{1}{t} \int_0^t f^*(s)ds$ es maximal (por ser la función f^* decreciente) si se la compara con todos los promedios posibles de la función f^* sobre intervalos de tamaño t. Es entonces esta propiedad de "doble" maximalidad que explica el nombre dado a la función f^{**}.

Este tipo de funciones maximales juegan un rol absolutamente fundamental en el análisis armónico[22] y han sido la fuente de numerosos desarrollos como tendremos la oportunidad de verlo en algunos de los capítulos siguientes.

Consideremos ahora un par de ejemplos de determinación de la función f_r^{**}.

(i) Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido y sea A un conjunto de μ-medida finita. Si consideramos su función indicatriz $f(x) = \mathbb{1}_A(x)$, sabemos que la función de reordenamiento decreciente asociada es $f^*(s) = \mathbb{1}_{[0,\mu(A)[}(s)$ y por lo tanto tenemos

$$f_r^{**}(t) = \left(\frac{1}{t}\int_0^t (f^*)^r(s)ds\right)^{\frac{1}{r}} = \left(\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{1}_{[0,\mu(A)[}(s)ds\right)^{\frac{1}{r}},$$

y a partir de esta expresión vemos que si se tiene $0 < t < \mu(A)$ entonces $f_r^{**}(t) = 1$, mientras que si $\mu(A) \leq t$ obtenemos $f_r^{**}(t) = \left(\frac{\mu(A)}{t}\right)^{\frac{1}{r}}$. En la figura a continuación representamos esta función:

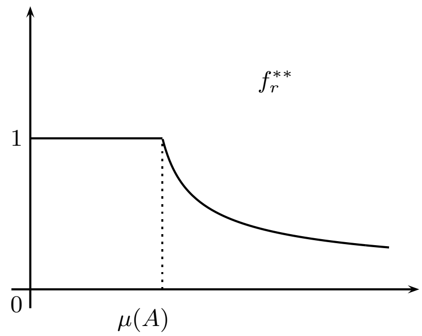

Figura 1.8: La función f_r^{**} asociada a una función indicatriz.

Es decir, tenemos para esta función indicatriz

$$f_r^{**}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < t < \mu(A), \\ \left(\frac{\mu(A)}{t}\right)^{\frac{1}{r}} & \text{si } \mu(A) \leq t. \end{cases} \tag{1.64}$$

Este ejemplo merece dos observaciones. La primera de ellas tiene que ver con el soporte de la función maximal f_r^{**} con respecto a la función inicial f: a pesar de haber partido de una función simple a soporte compacto, obtenemos una función definida sobre todo el intervalo $]0, +\infty[$ y esto indica que, contrariamente a la función de distribución d_f y a la función de reordenamiento decreciente f^* que mantenían esta propiedad de soporte, el comportamiento de la función maximal f_r^{**} es radicalmente diferente.

[22]Desde un cierto punto de vista, puede decirse que el estudio de las funciones maximales marca el *inicio* del análisis armónico moderno.

La segunda observación es en parte una consecuencia de este hecho: aún cuando se toma en cuenta una función indicatriz de un conjunto de medida finita (que pertenece por lo tanto a *todos* los espacios de Lebesgue y de Lorentz), la función maximal resultante puede no ser ni siquiera integrable, este es *siempre* el caso cuando $r \geq 1$ y cuando $0 < r < 1$, la potencia $\frac{1}{r}$ de la fórmula (1.62) sirve justamente para que esta función sea integrable. Esta propiedad de las funciones maximales tiene algunas consecuencias que estudiaremos en su debido tiempo.

(ii) Veamos ahora otro ejemplo. Fijemos un real $0 < r < +\infty$ y sobre el intervalo $]0, +\infty[$ dotado de su estructura natural consideramos la función $f(x) = x^{-\frac{1}{p}}$ con $0 < r < p < +\infty$, que es una función real, continua y estrictamente decreciente. Por la Proposición 1.2.8 de la página 56, obtenemos entonces que es igual a su función de reordenamiento decreciente, es decir $f^*(s) = s^{-\frac{1}{p}}$. A partir de estas observaciones, es sencillo deducir la expresión explícita de la función maximal correspondiente y aplicando directamente la definición (1.62) se obtiene

$$f_r^{**}(t) = \frac{p}{p-r} t^{-\frac{1}{p}}.$$

Nótese bien aquí el rol del parámetro r y de la condición $0 < r < p$: esto permite evaluar la integral que define la función f_r^{**}. En particular, es importante observar que no es posible considerar el caso cuando $p = r$ pues en esta situación la integral de la expresión (1.62) no estaría definida.

Este ejemplo muestra que, salvo una constante multiplicativa, la función maximal f_r^{**} preserva las funciones (reales) del tipo $x^{-\frac{1}{p}}$ cuando se tiene la condición $0 < r < p < +\infty$. En las líneas siguientes veremos la utilidad de esta propiedad.

Estos ejemplos permiten ver desde ya algunas de las características de esta función maximal f_r^{**} y en lo que sigue vamos a continuar la exposición de sus principales propiedades con varios lemas y proposiciones. Todos estos resultados serán utilizados en las secciones siguientes, en particular cuando se trate de dar una caracterización de los espacios de Lorentz por medio de esta función f_r^{**}.

El primer resultado que presentamos recopila algunas particularidades de la función maximal que son heredadas de las funciones de distribución y de decrecimiento decreciente.

Proposición 1.3.1 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido, sea $0 < r < +\infty$ un real y sean f y g dos funciones medibles definidas sobre X a valores en $\mathbb{K}$. Tenemos entonces los puntos siguientes.*

1) Se tiene $(|f|)_r^{**} = f_r^{**}$ y la función maximal f_r^{**} es una función positiva, decreciente y continua sobre $]0, +\infty[$. Además, si f y $\tilde{f}$ son dos funciones equidistribuidas, entonces se tiene $f_r^{**} = \tilde{f}_r^{**}$,

2) para todo $\lambda \in \mathbb{K}^*$, tenemos la identidad $(\lambda f)_r^{**} = |\lambda| f_r^{**}$,

3) *si se tiene la estimación* $|g| \leq |f|$ *en* μ*-casi todas partes entonces para todo* $t > 0$ *se tiene* $g_r^{**}(t) \leq f_r^{**}(t)$,

4) *si* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión creciente de funciones medibles tal que se tiene la estimación* $|f_n(x)| \leq |f(x)|$ *en* μ*-casi todas partes y si además se tiene el límite* $\lim\limits_{n\to+\infty} |f_n| = |f|$ *en* μ*-casi todas partes, entonces tenemos la desigualdad* ${f_r^{**}}_n(t) \leq f_r^{**}(t)$ *y* $\lim\limits_{n\to+\infty} {f_r^{**}}_n(t) = f_r^{**}(t)$ *para todo* $t > 0$,

5) *La función maximal* f_r^{**} *es idénticamente nula si y solo si se tiene* $f = 0$ *en* μ*-casi todas partes.*

Prueba.

1) La identidad $(|f|)_r^{**} = f_r^{**}$ se deduce directamente la propiedad correspondiente $(|f|)^* = f^*$ de las funciones de reordenamiento decreciente demostrada en el punto 1) de la Proposición 1.2.5, página 50. A partir de este hecho se obtiene sin problema que la función f_r^{**} es positiva.

   El hecho que la función maximal es decreciente se deduce del siguiente hecho general que enunciamos por separado en el lema a continuación.

Lema 1.3.1 *Sea* φ *una función a valores reales definida sobre* $]0, +\infty[$, *decreciente y positiva. Si* x, y *son dos reales tales* $0 < x \leq y$, *entonces tenemos la estimación*

$$\frac{1}{y}\int_0^y \varphi(s)ds \leq \frac{1}{x}\int_0^x \varphi(s)ds.$$

Prueba. Como la función φ es decreciente tenemos por un lado la mayoración

$$x\int_x^y \varphi(s)ds \leq x\int_x^y \varphi(x)ds = (y-x)x\varphi(x),$$

y por otro lado la estimación $0 \leq \displaystyle\int_0^x \big(\varphi(s) - \varphi(x)\big)ds$, pues sobre el intervalo $s \in]0, x]$ se tiene el control $\varphi(s) \geq \varphi(x)$, lo que a su vez implica la estimación $xf(x) \leq \displaystyle\int_0^x \varphi(s)ds$, de esta manera la primera mayoración aquí arriba se reescribe $x\displaystyle\int_x^y \varphi(s)ds \leq (y-x)\int_0^x \varphi(s)ds$, y por la linealidad de la integral obtenemos $x\displaystyle\int_x^y \varphi(s)ds + x\int_0^x \varphi(s)ds \leq y\int_0^x \varphi(s)ds$, de donde se deduce sin problema la desigualdad $x\displaystyle\int_0^y \varphi(s)ds \leq y\int_0^x \varphi(s)ds$, lo que concluye la prueba de este lema. ■

De esta manera, para obtener que la función maximal f_r^{**} definida por medio de la fórmula (1.62) es decreciente, es suficiente aplicar este lema a la función $(f^*)^r$ que verifica todas las hipótesis necesarias.

La continuidad de esta función f_r^{**} se obtiene por la continuidad de la integral con respecto a la cota superior (ver el Corolario 3.3.2 del Volumen 1).

Finalmente, si f y $\tilde{f}$ son dos funciones equidistribuidas, por el punto 1) de la Proposición 1.2.5 se tiene $f^* = \tilde{f}^*$, de donde se obtiene por definición de la función maximal la identidad $f_r^{**} = \tilde{f}_r^{**}$.

2) El segundo punto se deduce sin problema de la propiedad $(\lambda f)^* = |\lambda| f^*$ de la función de reordenamiento decreciente que ha sido demostrada en el punto 2) de la Proposición 1.2.5, de manera que los detalles son dejados al lector.

3) Se obtiene este punto utilizando el punto 4) de la Proposición 1.2.5 y reconstruyendo la función maximal f_r^{**} dada en (1.62).

4) Gracias al punto 3) anterior obtenemos la mayoración $f_{r\,n}^{**}(t) \leq f_r^{**}(t)$ y el paso al límite se basa en el teorema de convergencia monótona.

5) Para el último punto, se tiene $f_r^{**} \equiv 0$ si y solo si la función de reordenamiento decreciente f^* es nula, lo que es equivalente al hecho que la función inicial f es nula en μ-casi todas partes. ■

Con el resultado a continuación comparamos la función maximal f_r^{**} con la función de reordenamiento decreciente f^*.

Proposición 1.3.2 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido, sea $0 < r < +\infty$ un real y sea f una función medible definida sobre X a valores en $\mathbb{K}$. Entonces se tiene la desigualdad*

$$f^*(t) \leq f_r^{**}(t),$$

para todo $0 < t < +\infty$.

Prueba. Como la función f^* es decreciente se tiene sobre el intervalo $0 < s \leq t$ que $f^*(s) \geq f^*(t)$, de manera que podemos escribir

$$f_r^{**}(t) = \left(\frac{1}{t}\int_0^t (f^*)^r(s)ds\right)^{\frac{1}{r}} \geq \left((f^*)^r(t)\frac{1}{t}\int_0^t ds\right)^{\frac{1}{r}} = f^*(t),$$

lo que termina la verificación de esta proposición. ■

Vemos entonces que la función maximal f_r^{**} siempre controla a la función de reordenamiento decreciente f^* y pronto utilizaremos esta información para seguir adelante con nuestra exposición. Una consecuencia particular de este hecho es el siguiente resultado.

Proposición 1.3.3 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido, sea $0 < r < +\infty$ un real y sea f una función medible definida sobre X a valores en $\mathbb{K}$. Si $f \in L^\infty(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$, entonces se tiene*

$$\|f\|_{L^\infty} = \sup_{t>0} f_r^{**}(t).$$

Prueba. Por el resultado anterior tenemos $\sup\limits_{t>0} f^*(t) \leq \sup\limits_{t>0} f_r^{**}(t)$, pero como la función f^* es decreciente, utilizando la fórmula (1.41), página 54, se tienen las identidades $\sup\limits_{t>0} f^*(t) = f^*(0) = \|f\|_{L^\infty}$, de donde se obtiene la mayoración $\|f\|_{L^\infty} \leq \sup\limits_{t>0} f_r^{**}(t)$. Por otro lado, por la definición de la función f_r^{**} y utilizando el decrecimiento de la función f^*, tenemos

$$f_r^{**}(t) = \left(\frac{1}{t}\int_0^t (f^*)^r(s)ds\right)^{\frac{1}{r}} \leq f^*(0)\left(\frac{1}{t}\int_0^t ds\right)^{\frac{1}{r}} = f^*(0) = \|f\|_{L^\infty},$$

de donde se obtiene el control $\sup\limits_{t>0} f_r^{**}(t) \leq \|f\|_{L^\infty}$. ■

Regresemos ahora unas pocas páginas hacia atrás para interesarnos un poco más en detalle en la estimación (1.63) de la página 85 y la pregunta que nos planteamos consiste en estudiar en qué ocasiones se tiene la igualdad en esta expresión.

Recordemos que esta mayoración tiene como origen la desigualdad de Hardy-Littlewood (1.42) y justamente habíamos introducido en páginas anteriores las nociones de espacios medidos *resonantes* y *fuertemente resonantes* con las Definiciones 1.2.4 y 1.2.5, respectivamente, para caracterizar las situaciones en las cuales se tiene la identidad en la desigualdad de Hardy-Littlewood.

Siguiendo estas ideas tenemos el resultado a continuación.

Proposición 1.3.4 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido y sean r, t dos reales tales que $0 < r < +\infty$ y $0 < t \leq \mu(X)$. Sea f una función medible definida sobre X a valores en $\mathbb{K}$.*

1) *Si el espacio medido es resonante, entonces tenemos la identidad*

$$f_r^{**}(t) = \sup_{\mu(A)=t}\left(\frac{1}{\mu(A)}\int_A |f(x)|^r d\mu(x)\right)^{\frac{1}{r}}.$$

2) *Si el espacio medido es fuertemente resonante, entonces existe un conjunto medible A tal que $\mu(A) = t$ y tal que se tenga la identidad*

$$f_r^{**}(t) = \left(\frac{1}{t}\int_A |f(x)|^r d\mu(x)\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Prueba.

1) Debemos verificar que se tiene la identidad

$$f_r^{**}(t) = \left(\frac{1}{t}\int_0^t (f^*)^r(s)ds\right)^{\frac{1}{r}} = \sup_{\mu(A)=t}\left(\frac{1}{\mu(A)}\int_A |f(x)|^r d\mu(x)\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Pero por el punto 3) de la Proposición 1.2.5, página 50, tenemos $(f^*)^r = (|f|^r)^*$, de manera que si definimos $|h| = |f|^r$, podemos reescribir la identidad buscada de la siguiente manera:

$$\left(\frac{1}{t}\int_0^t h^*(s)ds\right)^{\frac{1}{r}} = \sup_{\mu(A)=t}\left(\frac{1}{\mu(A)}\int_A |h(x)|d\mu(x)\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Ahora, como se tiene $0 < t \leq \mu(X)$ y como el espacio medido es resonante, existe un conjunto medible $A \subset X$ tal que se tenga $\mu(A) = t$. Si definimos $g(x) = \mathbb{1}_A(x)$, entonces la función de reordenamiento decreciente está dada por $g^*(s) = \mathbb{1}_{[0,\mu(A)[}(s) = \mathbb{1}_{[0,t[}(s)$. En este punto observamos que una función $\tilde{g}$ es equidistribuida con g si y solo si $|\tilde{g}|$ es igual en μ-casi todas partes a la función característica de algún conjunto medible B tal que $\mu(B) = \mu(A) = t$. Entonces, como por hipótesis el espacio medido es resonante tenemos la identidad (1.43) que se escribe en este caso como

$$\int_0^{+\infty} h^*(s)\mathbb{1}_{[0,t[}(s)ds = \sup_{\mu(A)=t}\int_X |h(x)|\mathbb{1}_A(x)d\mu(x),$$

de manera que dividiendo esta identidad por t, reemplazando la expresión de la función h y extrayendo la raíz r-ésima en ambas partes de esta fórmula se obtiene la identidad deseada.

2) El caso de espacios fuertemente resonantes es totalmente similar y hasta un poco más sencillo de estudiar puesto que en esta situación no hace falta tomar el supremo: por hipótesis de resonancia fuerte disponemos de una función que realiza la identidad. ■

Esta proposición es totalmente fundamental en el estudio de los espacios de Lorentz que nos proponemos realizar en las secciones siguientes y justifica por sí sola el uso de la función maximal: en efecto, recordamos que tanto las función de distribución d_f como la función de reordenamiento decreciente f^* no verifican una desigualdad triangular *puntual* (ver la página 84), pero gracias al resultado anterior tenemos el corolario siguiente.

Corolario 1.3.1 (Subaditividad de la función maximal f^{**})
Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido resonante y sean f, g dos funciones medibles definidas sobre X a valores en $\mathbb{K}$. Si $1 \leq r < +\infty$, entonces se tiene la siguiente desigualdad puntual

$$(f+g)_r^{**}(t) \leq f_r^{**}(t) + g_r^{**}(t),$$

dicho de otra manera, en los espacios medidos resonantes, la función maximal f_r^{**} es subaditiva.

Prueba. Por el primer punto de la Proposición 1.3.4 anterior, si $r \geq 1$ tenemos:

$$(f+g)_r^{**}(t) = \left(\sup_{\mu(A)=t}\frac{1}{\mu(A)}\int_A |f(x)+g(x)|^r d\mu(x)\right)^{\frac{1}{r}},$$

de manera que usando la desigualdad de Minkowski y la subaditividad del supremo obtenemos la mayoración

$$(f+g)^{**}(t) \leq \left(\sup_{\mu(A)=t} \frac{1}{\mu(A)} \int_A |f(x)|^r d\mu(x)\right)^{\frac{1}{r}} + \left(\sup_{\mu(A)=t} \frac{1}{\mu(A)} \int_A |g(x)|^r d\mu(x)\right)^{\frac{1}{r}},$$

aplicando una vez más la Proposición 1.3.4 escribimos

$$(f+g)_r^{**}(t) \leq f_r^{**}(t) + g_r^{**}(t),$$

es decir que hemos obtenido la subaditividad de la función maximal cuando $1 \leq r < +\infty$. ■

En el caso cuando $0 < r < 1$, no se tiene la desigualdad de Minkowski que permite obtener la subaditividad, pero se tiene el resultado a continuación.

Corolario 1.3.2 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido resonante y sean f, g dos funciones medibles definidas sobre X a valores en $\mathbb{K}$. Si $0 < r < 1$ es un parámetro real, entonces tenemos la desigualdad*

$$\left((f+g)_r^{**}\right)^r (t) \leq \left(f_r^{**}\right)^r (t) + \left(g_r^{**}\right)^r (t).$$

Prueba. La verificación de este hecho es muy similar a la del corolario anterior y se basa en la Proposición 1.3.4. En efecto, aplicando el primer punto de esta proposición podemos escribir

$$\left((f+g)_r^{**}\right)^r (t) = \sup_{\mu(A)=t} \frac{1}{\mu(A)} \int_A |f(x)+g(x)|^r d\mu(x),$$

pero como $0 < r < 1$, por el Lema 4.2.1 del Volumen 1 tenemos la desigualdad puntual

$$|f(x)+g(x)|^r \leq |f(x)|^r + |g(x)|^r,$$

de manera que por la subaditividad del supremo obtenemos

$$\left((f+g)_r^{**}\right)^r (t) \leq \sup_{\mu(A)=t} \frac{1}{\mu(A)} \int_A |f(x)|^r d\mu(x) + \sup_{\mu(A)=t} \frac{1}{\mu(A)} \int_A |g(x)|^r d\mu(x),$$

es decir, utilizando otra vez la identidad del primer punto de la Proposición 1.3.4, hemos obtenido la mayoración

$$\left((f+g)_r^{**}\right)^r (t) \leq \left(f_r^{**}\right)^r (t) + \left(g_r^{**}\right)^r (t),$$

lo que termina la prueba del corolario. ■

Como el lector puede intuir sin ningún problema, estos dos corolarios nos ayudarán a dotar a los espacios de Lorentz de una estructura de espacios métrico y en algunos casos de espacio normado. Pero en estos resultados estamos utilizando una hipótesis adicional, que es la condición de *resonancia* exigida para el espacio medido. Si bien los espacios medidos resonantes corresponden a los casos más usuales en la práctica, es interesante estudiar si es posible generalizar estas desigualdades a los casos de espacios medidos generales.

Para ello vamos a ver que todo espacio medido general $(X, \mathscr{A}, \mu)$ puede *replicarse* en un espacio medido no-atómico $(\bar{X}, \bar{\mathscr{A}}, \bar{\mu})$, y a partir de este hecho podremos deducir la subaditividad de la función maximal f_r^{**} en el caso general. En efecto, si $(X, \mathscr{A}, \mu)$ es un espacio medido σ-finito cualquiera, entonces podemos escribir

$$X = X_0 \cup \left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \right),$$

en donde el conjunto X_0 es no-atómico y los conjuntos A_j son átomos disjuntos y de medida positiva finita. Nótese que al ser el espacio $(X, \mathscr{A}, \mu)$ σ-finito, solo hay a lo mucho un infinito numerable de tales átomos. Definimos ahora el conjunto $\bar{X}$ por medio de la identidad

$$\bar{X} = X_0 \cup \left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_j \right),$$

en donde los conjuntos I_j son subintervalos disjuntos de la recta real tales que $|I_j| = \mu(A_j)$.

Diremos ahora que un subconjunto E de $\bar{X}$ es medible si su intersección con X_0 es μ-medible y si su intersección con los intervalos I_j es Lebesgue-medible. Por toda la teoría desarrollada en el Volumen 1 tenemos que la colección de estos conjuntos medibles forman una σ-álgebra, que la notaremos $\bar{\mathscr{A}}$. Sobre esta σ-álgebra definimos ahora la medida $\bar{\mu}$ por medio de la expresión

$$\bar{\mu}(E) = \mu(E \cap X_0) + \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(E \cap I_j),$$

de donde se obtiene entonces que el espacio $(\bar{X}, \bar{\mathscr{A}}, \bar{\mu})$ es un espacio medido σ-finito no-atómico.

Ahora, a toda función medible f definida sobre el espacio medido $(X, \mathscr{A}, \mu)$ a valores en $\mathbb{K}$, podemos asociarle la función $\bar{f}$ definida sobre el espacio medido $(\bar{X}, \bar{\mathscr{A}}, \bar{\mu})$ de la siguiente manera: $\bar{f}$ coincide con f sobre el conjunto X_0 y $\bar{f}$ es constante sobre los intervalos I_j y toma los valores de f sobre los conjuntos A_j. De esta manera obtenemos una función $\bar{f}$ que es equidistribuida con f y por los primeros puntos de las Proposiciones 1.2.5 y 1.3.1 se tiene entonces las identidades

$$\bar{f}^* = f^* \quad \text{y} \quad \bar{f}_r^{**} = f_r^{**}. \tag{1.65}$$

Con esta función $\bar{f}$ y con estas identidades anteriores tenemos el resultado siguiente.

Teorema 1.3.1 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido σ-finito. Si f y g son dos funciones medibles definidas sobre el conjunto X a valores en $\mathbb{K}$, entonces tenemos la desigualdad puntual siguiente para todo $0 < t < +\infty$ y todo $0 < r < 1$:*

$$\left((f+g)_r^{**}\right)^r(t) \leq \left(f_r^{**}\right)^r(t) + \left(g_r^{**}\right)^r(t).$$

En el caso cuando $1 \leq r < +\infty$ *tenemos en cambio la mayoración*

$$\big((f+g)_r^{**}\big)(t) \leq \big(f_r^{**}\big)(t) + \big(g_r^{**}\big)(t),$$

en particular, cuando $r = 1$ *la función maximal* f^{**} *es* subaditiva.

Demostración. Empezamos notando que se tiene la identidad $\overline{(f+g)} = \bar{f} + \bar{g}$ que se deduce sin problema de la definición de la función $\bar{f}$ descrita anteriormente. Dado que el espacio medido $(\bar{X}, \bar{\mathscr{A}}, \bar{\mu})$ es σ-finito y no-atómico, por el Teorema 1.2.5 este espacio es resonante y por lo tanto, aplicando el Corolario 1.3.2 tenemos la desigualdad

$$\big([\overline{(f+g)}]_r^{**}\big)^r(t) = \big([\bar{f}+\bar{g}]_r^{**}\big)^r(t) \leq \big(\bar{f}_r^{**}\big)^r(t) + \big(\bar{g}_r^{**}\big)^r(t),$$

pero como por construcción las funciones $\bar{f}$ y f son equidistribuidas, se tienen las identidades (1.65), de donde se deduce la desigualdad puntual deseada.

Para el caso $1 \leq r < +\infty$ basta utilizar los mismos argumentos y aplicar el Corolario 1.3.1. ∎

1.3.2. Tercera definición de los espacios de Lorentz $L^{p,q}$

En esta sección vamos a sacar provecho de las propiedades de la función maximal f_r^{**} que han sido expuestas en las páginas anteriores para obtener una caracterización *equivalente* de los espacios de Lorentz $L^{p,q}$.

En efecto, contrariamente a la función de distribución d_f y a la función de reordenamiento decreciente f^*, que permitían ambas definir una misma funcional $\|\cdot\|_{L^{p,q}}$, la funcional que obtendremos utilizando la función maximal f_r^{**} no será exactamente la misma pero será más que suficiente para definir sin ambigüedad los espacios de Lorentz y, sobre todo, nos permitirá obtener resultados estructurales interesantes sobre estos espacios de funciones.

Empecemos pues con la definición de la funcional que nos permitirá presentar una nueva caracterización de los espacios de Lorentz.

Definición 1.3.2 (Funcional $|||\cdot|||_{p,q,r}$) *Sea* $(X, \mathscr{A}, \mu)$ *un espacio medido y sea* f *una función medible definida sobre* X *a valores en* $\mathbb{K}$. *Sean* r, p, q *tres índices reales tales que* $0 < r < p < +\infty$ *y* $r \leq q \leq +\infty$. *Definimos entonces la funcional* $|||\cdot|||_{p,q,r}$ *por medio de la expresión*

$$|||f|||_{p,q,r} = \left(\int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{1}{p}} f_r^{**}(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.66}$$

En el caso $0 < r < p < +\infty$ *y* $q = +\infty$ *tenemos*

$$|||f|||_{p,\infty,r} = \sup_{t>0} \left\{ t^{\frac{1}{p}} f_r^{**}(t) \right\}. \tag{1.67}$$

Cuando $r = 1$, *por simplicidad notaremos* $|||f|||_{p,q}$ *en vez de* $|||f|||_{p,q,1}$.

Notamos que las fórmulas (1.66) y (1.67) son casi idénticas a las funcionales (1.53) y (1.54) dadas en la Definición 1.2.7 de la página 68: solo cambia la función de base f_r^{**} en vez de la función de reordenamiento decreciente f^*.

Sin embargo este cambio tiene consecuencias importantes y con el objetivo de ilustrar y comparar la acción de esta nueva funcional, vamos a calcular en los dos ejemplos siguientes las cantidades $\|\cdot\|_{L^p}$, $\|\cdot\|_{L^{p,q}}$ y $|||\cdot|||_{p,q,r}$.

(i) Sobre el espacio medido $(X, \mathscr{A}, \mu)$ consideramos la función indicatriz $f(x) = \mathbb{1}_A(x)$, en donde A es un subconjunto de μ-medida finita de X y suponemos que se tiene $0 < r < p, q < +\infty$. Entonces, de forma inmediata tenemos $\|f\|_{L^p} = \mu(A)^{\frac{1}{p}}$ y recordando la fórmula (1.28) de la página 38 tenemos $\|f\|_{L^{p,q}} = \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{q}} \mu(A)^{\frac{1}{p}}$. Gracias a la expresión de f_r^{**} calculada en la página 86, obtenemos sin dificultad

$$
\begin{aligned}
|||f|||_{p,q,r} &= \left(\int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{1}{p}} \left(\mathbb{1}_{]0,\mu(A)[}(t) + \mathbb{1}_{[\mu(A),+\infty[}(t) \left(\frac{\mu(A)}{t}\right)^{\frac{1}{r}}\right)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{1}{p}} \mathbb{1}_{]0,\mu(A)[}(t) + t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}} \mu(A)^{\frac{1}{r}} \mathbb{1}_{[\mu(A),+\infty[}(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}
$$

Utilizando el soporte disjunto de las dos funciones que conforman la integral anterior y el hecho que se tiene $0 < r < p$, obtenemos

$$
\begin{aligned}
|||f|||_{p,q,r} &= \left(\int_0^{\mu(A)} t^{\frac{q}{p}-1} dt + \int_{\mu(A)}^{+\infty} t^{\frac{q}{p}-\frac{q}{r}-1} \mu(A)^{\frac{q}{r}} dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\left(\frac{p}{q}\right) \mu(A)^{\frac{q}{p}} + \left(\frac{pr}{q(p-r)}\right) \mu(A)^{\frac{q}{r}} \mu(A)^{\frac{q}{p}-\frac{q}{r}}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{p}{p-r}\right)^{\frac{1}{q}} \mu(A)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}
$$

Todos estos cálculos, a pesar de ser sencillos, son muy reveladores del comportamiento de la funcional $|||\cdot|||_{p,q,r}$. Observamos primero que cuando se tiene $0 < p, q < +\infty$, las tres funcionales $\|\cdot\|_{L^p}$, $\|\cdot\|_{L^{p,q}}$ y $|||\cdot|||_{p,q,r}$ miden el tamaño de las funciones indicatrices de manera muy similar: en cada una de estas funcionales la información relevante está dada por $\mu(A)^{\frac{1}{p}}$.

Una segunda observación tiene que ver con la condición $0 < r < p$ exigida en la Definición 1.3.2: dado que la función maximal f_r^{**} asociada a una función indicatriz de un conjunto de medida finita no es una función a soporte finito, esta condición es indispensable para poder evaluar la segunda integral en el cálculo de la funcional $|||\cdot|||_{p,q,r}$ realizado aquí arriba. Nótese que la condición $r \leq q$ no interviene en los cálculos anteriores y será considerada más adelante.

(ii) Sobre el intervalo $]0, +\infty[$ estudiamos ahora funciones reales del tipo $f(x) = x^{-\frac{1}{p}}$ con $0 < r < p < +\infty$. Estas funciones no pertenecen a los espacios de Lebesgue L^p pero tenemos por los cálculos realizados en la página 12 que $\|f\|_{L^{p,\infty}} = 1$, es decir que estas funciones sí pertenecen a los espacios de Lorentz $L^{p,\infty}$.

Vamos ahora a evaluar la cantidad $|||f|||_{p,\infty,r}$ según la fórmula (1.67). Sabemos por el ejemplo (ii) de la página 87 que se tiene $f_r^{**}(t) = \frac{p}{p-r}t^{-\frac{1}{p}}$, de manera que

$$|||f|||_{p,\infty,r} = \sup_{t>0}\left\{t^{\frac{1}{p}} f_r^{**}(t)\right\} = \sup_{t>0}\left\{t^{\frac{1}{p}}\left(\frac{p}{p-r}\right)t^{-\frac{1}{p}}\right\} = \frac{p}{p-r},$$

como vemos, la funcional $|||\cdot|||_{p,\infty,r}$ también tiene sentido al estudiar las funciones de este tipo, y la única diferencia con la funcional $\|\cdot\|_{L^{p,\infty}}$ está dada por la constante $\frac{p}{p-r}$.

Como podemos ver con estos dos ejemplos, la funcional $|||\cdot|||_{p,q,r}$ posee un comportamiento muy similar al de la funcional $\|\cdot\|_{L^{p,q}}$, pero el resultado obtenido en cálculos concretos como los anteriores no es *exactamente* el mismo, sino que difieren por una constante.

Estas observaciones muestran, al menos empíricamente, dos puntos: primero, la funcional $|||\cdot|||_{p,q,r}$ captura esencialmente la misma información que la funcional $\|\cdot\|_{L^{p,q}}$, es decir que será posible caracterizar los espacios de Lorentz utilizando la función maximal y las fórmulas (1.66) y (1.67). Segundo, la caracterización obtenida no será exactamente la misma, será únicamente una caracterización *equivalente*[23], lo que para nuestros fines es más que suficiente.

De esta manera, en lo que queda de esta sección, vamos a demostrar con el Teorema 1.3.2 a continuación cómo es posible caracterizar los espacios de Lorentz generales usando la función maximal f_r^{**}. Para ello necesitaremos el resultado siguiente que será la clave para obtener las mayoraciones buscadas en la demostración de las equivalencias entre las funcionales $\|\cdot\|_{L^{p,q}}$ y $|||\cdot|||_{p,q,r}$.

Proposición 1.3.5 (Hardy) *Sea f una función positiva definida sobre el intervalo $]0,+\infty[$ dotado de su estructura natural. Si α y β son dos parámetros reales tales que $1 \leq \alpha < +\infty$ y $0 < \beta < +\infty$, entonces tenemos las desigualdades siguientes*

$$\left(\int_0^{+\infty}\left(\int_0^t f(s)ds\right)^\alpha \frac{dt}{t^{\beta+1}}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \leq \frac{\alpha}{\beta}\left(\int_0^{+\infty}(s\,f(s))^\alpha \frac{ds}{s^{\beta+1}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \qquad (1.68)$$

$$\left(\int_0^{+\infty}\left(\int_t^{+\infty} f(s)\frac{ds}{s}\right)^\alpha \frac{dt}{t^{1-\beta}}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \leq \frac{\alpha}{\beta}\left(\int_0^{+\infty} f(s)^\alpha \frac{ds}{s^{1-\beta}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}. \qquad (1.69)$$

Prueba. Para la desigualdad (1.68), tenemos al elevar a la potencia α-ésima:

$$\int_0^{+\infty}\left(\int_0^t f(s)ds\right)^\alpha \frac{dt}{t^{\beta+1}} = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^t f(s)t^{-\frac{\beta}{\alpha}}ds\right)^\alpha t^{-1}dt, \qquad (1.70)$$

[23] En análisis, mientras no sean fundamentales, "*todas las constantes son iguales y valen uno*". Lastimosamente, las constantes son (casi) siempre fundamentales.

y nos interesamos en la integral entre paréntesis, que reescribimos de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\left(\int_0^t f(s)t^{-\frac{\beta}{\alpha}}ds\right)^\alpha &= \left(\frac{\displaystyle\int_0^t f(s)ds}{\displaystyle\frac{\beta}{\alpha}\int_0^t s^{\frac{\beta}{\alpha}-1}ds}\right)^\alpha\\ &= \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\alpha\left(\frac{\displaystyle\int_0^t \left[f(s)\ s^{-\frac{\beta}{\alpha}+1}\right]s^{\frac{\beta}{\alpha}-1}ds}{\displaystyle\int_0^t s^{\frac{\beta}{\alpha}-1}ds}\right)^\alpha.\end{aligned}$$

Ahora aplicamos a esta última expresión la desigualdad de Jensen (ver el Teorema 4.3.4 del Volumen 1) con respecto a la medida $\frac{s^{\frac{\beta}{\alpha}-1}ds}{\int_0^t s^{\frac{\beta}{\alpha}-1}ds}$ -notar que la medida del intervalo $[0,t]$ con respecto a esta medida es exactamente 1- para obtener

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\alpha\left(\frac{\displaystyle\int_0^t \left[f(s)\ s^{-\frac{\beta}{\alpha}+1}\right]s^{\frac{\beta}{\alpha}-1}ds}{\displaystyle\int_0^t s^{\frac{\beta}{\alpha}-1}ds}\right)^\alpha \leq \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\alpha\int_0^t\left(f(s)s^{-\frac{\beta}{\alpha}+1}\right)^\alpha\frac{s^{\frac{\beta}{\alpha}-1}ds}{\displaystyle\int_0^t s^{\frac{\beta}{\alpha}-1}ds},$$

de donde se tiene

$$\left(\int_0^t f(s)t^{-\frac{\beta}{\alpha}}ds\right)^\alpha \leq \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\alpha-1}\int_0^t\left(f(s)s^{-\frac{\beta}{\alpha}+1}\right)^\alpha s^{\frac{\beta}{\alpha}-1}ds\ t^{-\frac{\beta}{\alpha}}.$$

A partir de esta estimación reconstruimos la expresión (1.70) para obtener la desigualdad

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\left(\int_0^t f(s)t^{-\frac{\beta}{\alpha}}ds\right)^\alpha t^{-1}dt &\leq \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\alpha-1}\int_0^{+\infty}\int_0^t\left(f(s)s^{-\frac{\beta}{\alpha}+1}\right)^\alpha s^{\frac{\beta}{\alpha}-1}ds\ \frac{dt}{t^{\frac{\beta}{\alpha}+1}}\\ &\leq \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\alpha-1}\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}(sf(s))^\alpha s^{-\beta-1}s^{\frac{\beta}{\alpha}}\mathbb{1}_{\{s<t\}}(s)ds\right)\frac{dt}{t^{\frac{\beta}{\alpha}+1}}.\end{aligned}$$

Finalmente, aplicando el teorema de Fubini se tiene

$$\int_0^{+\infty}\left(\int_0^t f(s)ds\right)^\alpha\frac{dt}{t^{\beta+1}} \leq \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\alpha\int_0^{+\infty}(sf(s))^\alpha s^{-\beta-1}ds,$$

lo que termina la demostración de la primera desigualdad al extraer la raíz α-ésima de esta expresión.

La segunda desigualdad (1.69) sigue exactamente los mismos argumentos anteriores de manera que los detalles son dejados al lector. ■

Es importante notar que para poder aplicar la desigualdad de Jensen son necesarias las dos condiciones $\alpha \geq 1$ y $\beta > 0$.

Con esta proposición preliminar, podemos ahora enunciar el resultado más importante de esta sección que nos permite relacionar las funcionales $\|\cdot\|_{L^{p,q}}$ y $|||\cdot|||_{p,q,r}$.

Teorema 1.3.2 (Caracterización equivalente) *Sea $(X,\mathscr{A},\mu)$ un espacio medido. Sean p,q,r tres índices reales tales que*

$$0<r<p<+\infty \ \ y \ \ r\leq q\leq +\infty.$$

Para toda función f que pertenece al espacio de Lorentz $L^{p,q}(X,\mathscr{A},\mu,\mathbb{K})$ tenemos las desigualdades

$$\|f\|_{L^{p,q}}\leq |||f|||_{p,q,r}\leq \left(\frac{p}{p-r}\right)^{\frac{1}{r}}\|f\|_{L^{p,q}}. \tag{1.71}$$

Es decir que las cantidades $\|\cdot\|_{L^{p,q}}$ y $|||\cdot|||_{p,q,r}$ definen espacios equivalentes.

Antes de pasar a la demostración de esta equivalencia, observamos que el caso cuando $p=+\infty$ y $0<q<+\infty$ no entra en consideración en este resultado. Esto no es ningún problema pues por la Observación 1.8, página 69, sabemos que cuando el espacio medido es no atómico, los espacios $L^{\infty,q}$ se reducen al elemento $\{0\}$. El caso de espacios completamente atómicos será estudiado posteriormente en la Sección 1.6. Notemos también que el caso $p=q=+\infty$ tampoco es tomado en cuenta, pero en esta situación se tiene por definición $L^{\infty,\infty}=L^{\infty}$, que es un espacio que ya ha sido estudiado en el Volumen 1 y 2. Notemos también que los ejemplos (i) y (ii) de la página 95 y los cálculos ahí realizados verifican la cadena de desigualdades (1.111)

Demostración. La primera estimación es inmediata gracias a la Proposición 1.3.2 en donde se tiene el control puntual $f^*(t)\leq f_r^{**}(t)$: en efecto, a partir de esta desigualdad, y utilizando las propiedades de monotonía de las integrales consideradas, es suficiente reconstruir las funcionales para obtener, en el caso $0<r<p<+\infty$ y $r\leq q<+\infty$:

$$\|f\|_{L^{p,q}}=\left(\int_0^{+\infty}\left(t^{\frac{1}{p}}f^*(t)\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}\leq\left(\int_0^{+\infty}\left(t^{\frac{1}{p}}f_r^{**}(t)\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}=|||f|||_{p,q,r}.$$

En el caso $0<r<p<+\infty$ y $q=+\infty$ tenemos

$$\|f\|_{L^{p,\infty}}=\sup_{t>0}\left\{t^{\frac{1}{p}}f^*(t)\right\}\leq\sup_{t>0}\left\{t^{\frac{1}{p}}f_r^{**}(t)\right\}=|||f|||_{p,\infty,r}.$$

Para la segunda parte de (1.111), en el caso $0<r<p<+\infty$ y $r\leq q<+\infty$, utilizamos la definición de la función maximal f_r^{**} dada en la expresión (1.62) para escribir

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\left(t^{\frac{1}{p}}f_r^{**}(t)\right)^q\frac{dt}{t} &= \int_0^{+\infty}\left(t^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)^r ds\right)^{\frac{1}{r}}\right)^q\frac{dt}{t}\\ &= \int_0^{+\infty}\left(\int_0^t f^*(s)^r ds\right)^{\frac{q}{r}}\frac{dt}{t^{\frac{q}{r}-\frac{q}{p}+1}}.\end{aligned}$$

En este punto aplicamos ahora la desigualdad de Hardy (1.68), con $\alpha = \frac{q}{r}$ y $\beta = \frac{q}{r} - \frac{q}{p}$, para obtener

$$\int_0^{+\infty}\left(\int_0^t f^*(s)^r ds\right)^{\frac{q}{r}} \frac{dt}{t^{\frac{q}{r}-\frac{q}{p}+1}} \leq \left(\frac{p}{p-r}\right)^{\frac{q}{r}} \int_0^{+\infty}\left(s^{\frac{1}{p}} f^*(s)\right)^q \frac{ds}{s},$$

es decir que se tiene

$$\begin{aligned} |||f|||_{p,q,r}^q = \int_0^{+\infty}\left(t^{\frac{1}{p}} f_r^{**}(t)\right)^q \frac{dt}{t} \quad & \leq \quad \left(\frac{p}{p-r}\right)^{\frac{q}{r}} \int_0^{+\infty}\left(s^{\frac{1}{p}} f^*(s)\right)^q \frac{ds}{s} \\ & \leq \quad \left(\frac{p}{p-r}\right)^{\frac{q}{r}} \|f\|_{L^{p,q}}^q, \end{aligned}$$

y al extraer la raíz q-ésima de estas estimaciones se obtiene la cadena de desigualdades (1.111).

En el caso cuando $0 < r < p < +\infty$ y $r < q = +\infty$ escribimos

$$\begin{aligned} |||f|||_{p,\infty,r} &= \sup_{t>0}\left\{t^{\frac{1}{p}} f_r^{**}(t)\right\} = \sup_{t>0}\left\{t^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)^r ds\right)^{\frac{1}{r}}\right\} \\ &= \sup_{t>0}\left\{t^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)^r s^{\frac{r}{p}} s^{-\frac{r}{p}} ds\right)^{\frac{1}{r}}\right\} \\ &\leq \sup_{s>0}\left\{s^{\frac{1}{p}} f^*(s)\right\} \sup_{t>0}\left\{t^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{t}\int_0^t s^{-\frac{r}{p}} ds\right)^{\frac{1}{r}}\right\} \\ &\leq \|f\|_{L^{p,\infty}} \sup_{t>0}\left\{t^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{t}\left(\frac{p}{p-r}\right) t^{1-\frac{r}{p}}\right)^{\frac{1}{r}}\right\} = \left(\frac{p}{p-r}\right)^{\frac{1}{r}} \|f\|_{L^{p,\infty}}, \end{aligned}$$

lo que termina la demostración del teorema. ■

Observación 1.11 Las condiciones $r < p$ y $r \leq q$ exigidas para obtener la equivalencia de estas funcionales provienen de las desigualdades de Hardy enunciadas en la Proposición 1.3.5. Pero esto no es un simple detalle técnico pues en caso de no tener estas relaciones entre los índices p, q y r es posible exhibir contraejemplos que muestran que las funcionales $\|\cdot\|_{L^{p,q}}$ y $|||\cdot|||_{p,q,r}$ no son equivalentes, en efecto, se puede ver sin problema que se tiene $|||\cdot|||_{1,\infty,1} = \|\cdot\|_{L^1}$ y sabemos que el espacio L^1 es muy diferente al espacio $L^{1,\infty}$. Ver más detalles en el Ejercicio 1.12 y en el Ejercicio 1.13.

*

Como anunciado, la funcional $|||\cdot|||_{p,q,r}$ permite caracterizar a los espacios de Lorentz $L^{p,q}$, con $0 < p < +\infty$ y $0 < q \leq +\infty$ (con las condiciones $0 < r < p$ y $r \leq q$), en el sentido siguiente: sobre un espacio medido $(X, \mathscr{A}, \mu)$, una función medible $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ pertenece al espacio de Lorentz $L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ si y solo si $|||f|||_{p,q,r} < +\infty$.

Esta tercera manera de caracterizar a los espacios de Lorentz nos permitirá obtener más información sobre las diversas estructuras topológicas existentes sobre estos espacios como lo veremos en la sección a continuación.

1.3.3. Distancias, normas y problemas de normabilidad

En esta sección estudiaremos bajo qué condiciones los espacios de Lorentz son espacios métricos o espacios normados. Evidentemente, lo que se busca es obtener una estructura lo más fuerte posible, pero vamos a ver que este problema es más delicado de tratar pues no todos los espacios de Lorentz admiten una norma.

Sabemos por el Teorema 1.1.1, página 18 y por la Proposición 1.2.13 de la página 79 que todos los espacios de Lorentz $L^{p,q}$ con $0 < p < +\infty$ y $0 < q \leq +\infty$ son espacios cuasi-normados completos. Pero esta información, si bien es útil, deja mucho que desear y en realidad vamos a ver se puede ir mucho más lejos utilizando la funcional $|||\cdot|||_{p,q,r}$ que presentamos en la sección anterior.

Empezaremos nuestra exposición examinando de qué manera es posible dotar estos espacios de funciones con una distancia, para luego ver si es posible fortalecer esta estructura de espacio métrico para obtener una estructura de espacio normado. Finalmente expondremos algunos problemas que surgen al estudiar este tipo de propiedades.

A) Distancias en los espacios de Lorentz

El siguiente resultado nos indica que todos los espacios $L^{p,q}$ poseen una agradable estructura métrica.

Teorema 1.3.3 (Distancias en los espacios de Lorentz) *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido. Sean r, p y q tres índices reales tales que se tenga $0 < r < p < +\infty$ y $r \leq q \leq +\infty$. Entonces los espacios de Lorentz $L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ son metrizables con la métrica definida por*

$$d(f,g) = |||f-g|||^r_{p,q,r}.$$

Una vez más, los casos $p = +\infty$, $0 < q < +\infty$ y $p = q = +\infty$ no son considerados aquí: el primero porque en el caso de medidas no atómicas se reduce al elemento $\{0\}$, el segundo porque corresponde con el espacio de Lebesgue L^∞ que ya ha sido estudiado en el Volumen 1.

Demostración. Empezamos con el caso cuando $0 < r < p < +\infty$ y $r \leq q < +\infty$. Si $f, g \in L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$, tenemos entonces

$$d(f,g) = |||f-g|||^r_{p,q,r} = \left(\int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{1}{p}}(f-g)^{**}_r(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{r}{q}}.$$

Se tiene sin problema la propiedad de simetría $d(f,g) = d(g,f)$ y la propiedad de separabilidad, $d(f,g) = 0 \iff f = g$, se obtiene por el punto 5) de la Proposición 1.3.1, página 87.

Solo queda por verificar entonces la desigualdad triangular para esta distancia, es decir $d(f,g) \leq d(f,h) + d(h,g)$, en donde $f, g, h \in L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$. Para ello escribimos

$$d(f,g)^{\frac{q}{r}} = \int_0^{+\infty} t^{\frac{q}{p}-1} \left[((f-h+h-g)_r^{**})^r (t) \right]^{\frac{q}{r}} dt,$$

y aplicamos el Corolario 1.3.2, página 92, que nos proporciona la desigualdad puntual

$$((f-h+h-g)_r^{**})^r (t) \leq ((f-h)_r^{**})^r (t) + ((h-g)_r^{**})^r (t),$$

lo que nos permite escribir

$$d(f,g)^{\frac{q}{r}} \leq \int_0^{+\infty} t^{\frac{q}{p}-1} \left[((f-h)_r^{**})^r (t) + ((h-g)_r^{**})^r (t) \right]^{\frac{q}{r}} dt.$$

Escribiendo la expresión anterior de una forma más adecuada se tiene

$$d(f,g)^{\frac{q}{r}} \leq \int_0^{+\infty} \left[t^{(\frac{q}{p}-1)\frac{r}{q}} ((f-h)_r^{**})^r (t) + t^{(\frac{q}{p}-1)\frac{r}{q}} ((h-g)_r^{**})^r (t) \right]^{\frac{q}{r}} dt,$$

si notamos $\varphi(t) = t^{(\frac{q}{p}-1)\frac{r}{q}} ((f-h)_r^{**})^r (t)$ y $\psi(t) = t^{(\frac{q}{p}-1)\frac{r}{q}} ((h-g)_r^{**})^r (t)$, tenemos

$$d(f,g)^{\frac{q}{r}} \leq \int_0^{+\infty} [\varphi(t) + \psi(t)]^{\frac{q}{r}} dt.$$

Luego extrayendo la raíz $\frac{r}{q}$-ésima se tiene

$$d(f,g) \leq \left(\int_0^{+\infty} [\varphi(t) + \psi(t)]^{\frac{q}{r}} dt \right)^{\frac{r}{q}},$$

pero dado que $r \leq q$, se tiene $1 \leq \frac{q}{r}$ y entonces podemos aplicar la desigualdad de Minkoswki usual en la integral anterior para obtener

$$d(f,g) \leq \left(\int_0^{+\infty} \varphi(t)^{\frac{q}{r}} dt \right)^{\frac{r}{q}} + \left(\int_0^{+\infty} \psi(t)^{\frac{q}{r}} dt \right)^{\frac{r}{q}}.$$

Volviendo a las definiciones de las funciones auxiliares φ y ψ, obtenemos la estimación:

$$\begin{aligned}
d(f,g) &\leq \left(\int_0^{+\infty} \left(t^{(\frac{q}{p}-1)\frac{r}{q}} ((f-h)_r^{**})^r (t) \right)^{\frac{q}{r}} dt \right)^{\frac{r}{q}} \\
&\quad + \left(\int_0^{+\infty} \left(t^{(\frac{q}{p}-1)\frac{r}{q}} ((h-g)_r^{**})^r (t) \right)^{\frac{q}{r}} dt \right)^{\frac{r}{q}} \\
&\leq \left(\int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{1}{p}} (f-h)_r^{**}(t) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{r}{q}} + \left(\int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{1}{p}} (h-g)_r^{**}(t) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{r}{q}} \\
&\leq d(f,h) + d(h,g),
\end{aligned}$$

de manera que hemos obtenido la desigualdad triangular para esta distancia.

En el caso cuando $0 < r < p < +\infty$ y $r < q = +\infty$, utilizando el Corolario 1.3.2 escribimos

$$\begin{aligned} t^{\frac{r}{p}} \left((f-g)_r^{**} \right)^r (t) &= t^{\frac{r}{p}} \left((f-h+h-g)_r^{**} \right)^r (t) \\ &\leq t^{\frac{r}{p}} \left((f-h)_r^{**} \right)^r (t) + t^{\frac{r}{p}} \left((h-g)_r^{**} \right)^r (t), \end{aligned}$$

tomando el supremo sobre $t > 0$ y gracias a la definición de la funcional $|||\cdot|||_{p,\infty,r}$ dada en la fórmula (1.67) obtenemos

$$d(f,g) = |||f-g|||_{p,\infty,r}^r \leq |||f-h|||_{p,\infty,r}^r + |||h-g|||_{p,\infty,r}^r = d(f,h) + d(h,g),$$

y esto termina la demostración del teorema. ■

Observación 1.12 Este resultado, junto con la Proposición 1.2.13 de la página 79, hace que todos los espacios de Lorentz $L^{p,q}$ con $0 < p < +\infty$ y $0 < q \leq +\infty$ son espacios métricos completos.

B) Normas en los espacios de Lorentz

Pasamos por fin al estudio de la normabilidad de los espacios de Lorentz y veremos que para cierto rango de valores de los índices p y q, los espacios $L^{p,q}$ son espacios de Banach, lo que nos permitirá aplicar en la Sección 1.5, todos los resultados del análisis funcional obtenidos en el Volumen 2. El resultado fundamental de esta sección y que justifica plenamente el uso de la función maximal para caracterizar los espacios de Lorentz es el siguiente.

Teorema 1.3.4 (Normabilidad de los espacios de Lorentz) *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido no atómico. Si los índices p, q que determinan los espacios de Lorentz verifican las condiciones*

1) $1 < p < +\infty$ *y* $1 \leq q \leq +\infty$,

2) $p = q = 1$ *o* $p = q = +\infty$,

entonces los espacios de Lorentz $(L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K}), |||\cdot|||_{p,q})$ son espacios normados.

Demostración. Solo nos interesamos al primer punto pues el segundo corresponde a los espacios de Lebesgue L^1 y L^∞ que ya han sido tratados en detalle en el Volumen 1.

Recuérdese que por simplicidad hemos notado $|||\cdot|||_{p,q} = |||\cdot|||_{p,q,1}$, de manera que la función maximal que interviene en esta funcional dada en la Definición 1.3.2 es la función $f^{**} = f_1^{**}$. Con esta observación en mente, debemos pues verificar los tres axiomas de norma para la funcional $|||\cdot|||_{p,q}$.

La *separabilidad* de esta funcional, es decir $|||f|||_{p,q} = 0 \iff f = 0$ en μ-casi todas partes, se obtiene por el punto 5) de la Proposición 1.3.1, página 87, mientras que la *homogeneidad*, es decir $|||\lambda f|||_{p,q} = |\lambda|\,|||f|||_{p,q}$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}^*$, se deduce sin problema del punto 2) de la misma Proposición 1.3.1.

De esta manera, basta verificar que la desigualdad triangular es válida para la funcional $|||\cdot|||_{p,q}$. Entonces, si $f, g : X \longrightarrow \mathbb{K}$ son dos funciones medibles que pertenecen al espacio de Lorentz $L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$, debemos demostrar la mayoración

$$|||f+g|||_{p,q} \leq |||f|||_{p,q} + |||f|||_{p,q}.$$

Para ello utilizamos el Corolario 1.3.1 de la página 91, que nos proporciona la desigualdad puntual siguiente:

$$(f+g)^{**}(t) \leq f^{**}(t) + g^{**}(t).$$

Nótese bien que esta estimación se tiene bajo las condiciones $1 < p < +\infty$ y $1 \leq q \leq +\infty$, lo que corresponde con las condiciones exigidas en el primer punto del teorema. Ahora, a partir de esta estimación reconstruimos la funcional $|||\cdot|||_{p,q}$ y podemos escribir, en el caso cuando $1 < q < +\infty$:

$$\begin{aligned}
|||f+g|||_{p,q} &= \left(\int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{1}{p}}(f+g)^{**}(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left(\int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{1}{p}}\left(f^{**}(t)+g^{**}(t)\right)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left(\int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}f^{**}(t)+t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}g^{**}(t)\right)^q dt\right)^{\frac{1}{q}},
\end{aligned}$$

y como se tiene $1 < q < +\infty$, podemos aplicar la desigualdad de Minkowski usual en la integral anterior para obtener

$$\begin{aligned}
|||f+g|||_{p,q} &\leq \left(\int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}f^{**}(t)\right)^q dt\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}g^{**}(t)\right)^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq |||f|||_{p,q} + |||g|||_{p,q},
\end{aligned}$$

lo que demuestra la desigualdad triangular cuando $1 < q < +\infty$.

Cuando $q = +\infty$, utlizamos la misma estimación puntual y la subaditividad del supremo para escribir

$$\begin{aligned}
|||f+g|||_{p,\infty} &= \sup_{t>0}\left\{t^{\frac{1}{p}}(f+g)^{**}(t)\right\} \\
&\leq \sup_{t>0}\left\{t^{\frac{1}{p}}f^{**}(t)\right\} + \sup_{t>0}\left\{t^{\frac{1}{p}}g^{**}(t)\right\} \\
&\leq |||f|||_{p,\infty} + |||g|||_{p,\infty},
\end{aligned}$$

lo que termina la demostración del teorema. ■

Con este resultado y con la Proposición 1.2.13, página 79, obtenemos inmediatamente el siguiente corolario.

Corolario 1.3.3 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido no atómico. Si los índices p, q son tales que*

1) $1 < p < +\infty$ *y* $1 \le q \le +\infty$,

2) $p = q = 1$ *o* $p = q = +\infty$,

entonces los espacios de Lorentz $(L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K}), |||\cdot|||_{p,q})$ *son espacios de Banach.*

De esta manera, lejos de cerrar la puerta al estudio de las propiedades de los espacios de Lorentz, el hecho de disponer de una estructura de espacio de Banach abre muchas otras posibilidades de estudio que serán realizadas un poco más adelante.

C) Problemas de normabilidad

Los casos que no han sido tratados en el Teorema 1.3.4 -es decir en donde la caracterización basada en la función maximal no es de utilidad para obtener una estructura de espacio normado- también merecen ser estudiados pues surge naturalmente la pregunta siguiente: ¿es posible considerar *otra* funcional que caracterice a los espacios de Lorentz restantes, y que los dote de una estructura de espacio normado?

En el teorema a continuación responderemos a esta pregunta y vamos a mostrar que en estos casos los espacios de Lorentz *no* son normables, en el sentido que no existe ninguna norma equivalente que sirva para definirlos. Si bien en algunos casos la ausencia de estructura de espacio normado es relativamente natural a la luz de lo que se conoce sobre los espacios de Lebesgue (como por ejemplo los espacios $L^{p,q}$ con $0 < p < 1$), vamos a ver que hay que tener cuidado pues en otras situaciones, quizás menos naturales, ciertos espacios de Lorentz tampoco son normables.

En el teorema a continuación vamos a considerar medidas no atómicas, para dejar el caso de medidas completamente atómicas para la Sección 1.6.

Teorema 1.3.5 (Espacios de Lorentz no normables) *Sea* $(X, \mathscr{A}, \mu)$ *un espacio medido no atómico. Los espacios de Lorentz* $L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ *no son normables para los siguientes valores de los índices* p *y* q*:*

1) $0 < p < 1$ *y* $1 \le q \le +\infty$,

2) $0 < p < +\infty$ *y* $0 < q < 1$,

3) $p = 1$ *y* $1 < q \le +\infty$.

Antes de pasar a la verificación de este resultado conviene hacer unas observaciones. El punto 1) es bastante lógico, pues sabemos que el parámetro p de los espacios de Lorentz $L^{p,q}$ es en un cierto sentido el índice dominante, de tal manera que haciendo un paralelismo con lo conocido sobre los espacios de Lebesgue L^p, que no son espacios normados cuando $0 < p < 1$, podemos intuir que los espacios de Lorentz $L^{p,q}$ correspondientes tampoco serán espacios normados.

El punto 2) es un poco más sorprendente pues aquí vemos la influencia del segundo parámetro q: aún cuando se tiene $1 \leq p < +\infty$ (situación en la cual los espacios de Lebesgue son normables), si se tiene $0 < q < 1$ entonces los espacios de Lorentz $L^{p,q}$ no son normables.

Finalmente, la propiedad realmente importante tiene que ver con el punto 3), donde $p = 1$ y $1 < q \leq +\infty$, pues siguiendo el paralelismo con los espacios de Lebesgue, se esperaría disponer de una estructura de espacio normado pero vamos a ver que éste no es el caso.

Demostración. La idea general de la demostración es construir una sucesión de funciones $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tales que

$$\frac{\left\|\sum_{j=1}^{n} f_j\right\|_{L^{p,q}}}{\sum_{j=1}^{n} \|f_j\|_{L^{p,q}}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty, \tag{1.72}$$

y esto muestra que no existe ninguna norma equivalente a $\|\cdot\|_{L^{p,q}}$ pues nunca se obtendrá la desigualdad triangular. Para verificarlo vamos a exhibir contra ejemplos adaptados a cada uno de los casos considerados en el Teorema 1.3.5.

Es importante precisar que, puesto que estos espacios son invariantes por reordenamiento decreciente y dado que la medida es no atómica, es suficiente estudiar la no normabilidad cuando $X = [0,1]$ ó $X = [0,+\infty[$ (dotado de la medida de Lebesgue). En efecto, las propiedades estudiadas aquí de las funciones definidas originalmente sobre un espacio medido arbitrario $(X, \mathscr{A}, \mu)$ pueden transportarse al dominio de definición de la función de distribución y es así que se obtienen uno de estos dos casos anteriores según si la medida del conjunto X es finita o no.

Con estas observaciones preliminares pasemos ahora sí a la verificación del teorema.

1) Caso $0 < p < +\infty$ y $0 < q < 1$. Vamos a considerar la sucesión de funciones $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ definida sobre $[0,+\infty[$ por

$$f_j(x) = \begin{cases} \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}} 2^j & \text{si} \quad 0 < x < 2^{-jp}, \\ 0 & \text{sino.} \end{cases}$$

Vemos fácilmente que $\|f_j\|_{L^{p,q}} = 1$ para cada $j = 1, 2, ...$, en efecto, tenemos[24]

$$\|f_j\|_{L^{p,q}}^q = \left(\frac{q}{p}\right) 2^{jq} \int_0^{+\infty} t^{\frac{q}{p}-1} \mathbb{1}_{[0,2^{-jp}[}(t)dt = 1.$$

[24]ver también la fórmula (1.28) de la página 38.

De esta manera obtenemos que el denominador de la expresión (1.72) es igual a n.

Ocupémonos ahora del numerador, es decir de la expresión $\left\|\sum_{j=1}^{n} f_j\right\|_{L^{p,q}}$.

Para ello notamos $\psi_n(x) = \sum_{j=1}^{n} f_j$ y calculamos la función de reordenamiento decreciente $\psi_n^*(t)$. El lector puede darse cuenta sin mucho esfuerzo (al tratarse de funciones indicatrices de conjuntos) que se tiene la siguiente expresión

$$\psi_n^*(t) = \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}} \left[\mathbb{1}_{[0,2^{-np}[}(t) \left(\sum_{k=1}^{n} 2^k\right) + \sum_{j=1}^{n-1} \mathbb{1}_{[2^{-(j+1)p},2^{-jp}[}(t) \left(\sum_{k=1}^{j} 2^k\right) \right],$$

de donde se deduce el siguiente cálculo

$$\begin{aligned} \|\psi_n\|_{L^{p,q}}^q &= \left(\frac{q}{p}\right) \int_0^{2^{-np}} t^{\frac{q}{p}-1} \left(\sum_{k=1}^{n} 2^k\right)^q dt \\ &\quad + \left(\frac{q}{p}\right) \sum_{j=1}^{n-1} \int_{2^{-(j+1)p}}^{2^{-jp}} t^{\frac{q}{p}-1} \left(\sum_{k=1}^{j} 2^k\right)^q dt, \end{aligned}$$

es decir

$$\begin{aligned} \|\psi_n\|_{L^{p,q}}^q &= 2^{-nq} \left(\sum_{k=1}^{n} 2^k\right)^q + \sum_{j=1}^{n-1} 2^{-jq}(1-2^{-q}) \left(\sum_{k=1}^{j} 2^k\right)^q \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} 2^{-(n-k)}\right)^q + (1-2^{-q}) \sum_{j=1}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{j} 2^{-(j-k)}\right)^q \\ &= 2^q \left(1-2^{-n}\right)^q + (1-2^{-q}) \sum_{j=1}^{n-1} 2^q \left(1-2^{-j}\right)^q. \end{aligned}$$

Puesto que $0 < q < 1$ y que $(1-2^{-j}) < 1$ podemos escribir $(1-2^{-j}) < (1-2^{-j})^q$ y obtener

$$\begin{aligned} \|\psi_n\|_{L^{p,q}}^q &\geq 2^q \left(1-2^{-n}\right)^q + (2^q - 1) \sum_{j=1}^{n-1} \left(1-2^{-j}\right) \\ &\geq (2^q - 1) \left(n - 2 + 2^{-n+1}\right), \end{aligned}$$

y se tiene entonces la minoración

$$\|\psi_n\|_{L^{p,q}} \geq (2^q-1)^{\frac{1}{q}} (n-2+2^{-n+1})^{\frac{1}{q}}.$$

De esta manera, volviendo a la expresión (1.72) se obtiene, dado que $0 < q < 1$:

$$\frac{\left\|\sum_{j=1}^{n} f_j\right\|_{L^{p,q}}}{\sum_{j=1}^{n} \|f_j\|_{L^{p,q}}} \geq \frac{(n-2+2^{-n+1})^{\frac{1}{q}}}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

de donde se deduce que en este caso los espacios de Lorentz $L^{p,q}$ no son normables.

2) Caso $0 < p < 1$ y $1 \leq q \leq +\infty$. Supongamos primero que $q < +\infty$ y fijemos un parámetro real ε tal que $1 < \varepsilon < \frac{1}{p}$. Definimos entonces las funciones f_j sobre $[0, +\infty[$ por

$$f_j(x) = \begin{cases} \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}} j^{-\frac{1}{p}+\varepsilon} & \text{si} \quad j-1 < x < j, \\ 0 & \text{sino.} \end{cases}$$

Observemos que, para todo $j = 1, 2, ...$, se tiene $\|f_j\|_{L^{p,q}} \leq 1$ pues $1 < \varepsilon < \frac{1}{p}$. En efecto:

$$\|f_j\|^q_{L^{p,q}} = \left(\frac{q}{p}\right) \int_0^{+\infty} t^{\frac{q}{p}-1} \mathbb{1}_{[0,1[}(t) j^{-\frac{q}{p}+q\varepsilon} dt = j^{-\frac{q}{p}+q\varepsilon},$$

es decir $\|f_j\|_{L^{p,q}} = \frac{1}{j^{\frac{1}{p}-\varepsilon}} \leq 1$. Pasemos ahora al cálculo de $\left\|\sum_{j=1}^{n} f_j\right\|_{L^{p,q}}$. De la misma manera que anteriormente, escribimos

$$\psi_n(x) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x) = \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}} \sum_{j=1}^{n} j^{-\frac{1}{p}+\varepsilon} \mathbb{1}_{[j-1,j[}(x).$$

Puesto que estamos trabajando con funciones indicatrices de conjuntos no es difícil ver que se tienen la identidad $\psi_n^* = \psi_n$, por lo tanto

$$\begin{aligned} \|\psi_n\|^q_{L^{p,q}} &= \left(\frac{q}{p}\right) \int_0^{+\infty} t^{\frac{q}{p}-1} \left(\sum_{j=1}^{n} j^{-\frac{1}{p}+\varepsilon} \mathbb{1}_{[j-1,j[}(t)\right)^q dt \\ &= \sum_{j=1}^{n} j^{q\varepsilon} \left(1 - \left(\frac{j-1}{j}\right)^{\frac{q}{p}}\right). \end{aligned}$$

Ahora, como $0 < p < 1$ y $1 \leq q + \infty$ tenemos $(\frac{j-1}{j})^{\frac{q}{p}} \leq \frac{j-1}{j}$, es decir:

$$\|\psi_n\|_{L^{p,q}} \geq \left(\sum_{j=1}^{n} j^{q\varepsilon-1}\right)^{\frac{1}{q}},$$

y haciendo una comparación suma-integral obtenemos $\|\psi_n\|_{L^{p,q}} \geq Cn^{\varepsilon}$. Por lo tanto, regresando a la expresión (1.72) podemos escribir

$$\frac{\left\|\sum_{j=1}^{n} f_j\right\|_{L^{p,q}}}{\sum_{j=1}^{n} \|f_j\|_{L^{p,q}}} \geq n^{\varepsilon-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

pues habíamos fijado $1 < \varepsilon < \frac{1}{p}$, de donde se obtiene que en este caso los espacios de Lorentz no son normables.

Estudiemos ahora la situación cuando $0 < p < 1$ y $q = +\infty$. Para ello consideramos esencialmente las mismas funciones:

$$f_j(x) = \begin{cases} j^{-\frac{1}{p}+\varepsilon} & \text{si} \quad j-1 < x < j, \\ 0 & \text{sino.} \end{cases}$$

Tenemos entonces para todo $j = 1, 2, ...$ la estimación

$$\|f_j\|_{L^{p,\infty}} = \sup_{0<t<1} t^{\frac{1}{p}} f_j^*(t) \leq 1.$$

Sin embargo se tiene

$$\left\|\sum_{j=1}^n f_j\right\|_{L^{p,\infty}} = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{[j-1,j[}(t) j^{-\frac{1}{p}+\varepsilon}\right) = n^{\varepsilon},$$

por lo tanto, regresando con estas estimaciones a la expresión (1.72) obtenemos

$$\frac{\left\|\sum_{j=1}^n f_j\right\|_{L^{p,\infty}}}{\sum_{j=1}^n \|f_j\|_{L^{p,\infty}}} = n^{\varepsilon-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

y entonces el espacio de Lorentz $L^{p,\infty}$ no es normable cuando $0 < p < 1$.

3) Caso $p = 1$ y $1 < q \leq +\infty$. Empecemos con el caso $p = 1$ y $q = +\infty$. Fijemos n un entero y definamos sobre $[0, 1[$ la función

$$f_\sigma(x) = \sum_{j=1}^n \frac{n}{\sigma(j)} \mathbb{1}_{[(j-1)/n, j/n[}(x), \tag{1.73}$$

en donde $\sigma(j)$ es una permutación del conjunto $\{1, 2, ..., n\}$. Notaremos por S_n el conjunto de todas las permutaciones de este conjunto y por id la identidad (es decir que no modifica el orden del conjunto), recordamos además que el cardinal de S_n es $n!$.

Verifiquemos que se tiene $\|f_\sigma\|_{L^{1,\infty}} = 1$. Obsérvese que la función de reordenamiento decreciente f_σ^* es la misma para toda permutación σ pues por la expresión (1.73) se tiene una suma de funciones indicatrices de conjuntos disjuntos que tienen todos la misma medida, por lo tanto es suficiente tratar el caso de f_{id} para calcular $\|f_\sigma\|_{L^{1,\infty}}$. Entonces, por construcción la función f_{id} es decreciente y tenemos por lo tanto $f_{id}^* = f_{id}$. Es decir

$$f_{id}^*(t) = \sum_{j=1}^n \frac{n}{j} \mathbb{1}_{[(j-1)/n, j/n[}(t),$$

y es sencillo notar (hacer un dibujo si necesario) que se tiene

$$\|f_{id}\|_{L^{1,\infty}} = \sup_{t>0} t\, f_{id}^*(t) = 1.$$

De esta forma vemos que se tiene para toda permutación $\sigma \in S_n$ la identidad $\|f_\sigma\|_{L^{1,\infty}}$ y entonces obtenemos $\sum_{\sigma\in S_n}\|f_\sigma\|_{L^{1,\infty}} = n!$.

Definimos ahora, para todo $n \geq 1$, la función $\psi_n = \sum\limits_{\sigma\in S_n} f_\sigma$ y pasemos al cálculo de $\|\psi_n\|_{L^{1,\infty}} = \left\|\sum\limits_{\sigma\in S_n} f_\sigma\right\|_{L^{1,\infty}}$. Vemos en particular que, por definición de las funciones f_σ, se tiene la identidad

$$\psi_n(x) = \sum_{\sigma\in S_n}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{\sigma(j)}\mathbb{1}_{[(j-1)/n,j/n[}(x)\right) = \left(n!\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\right)\mathbb{1}_{[0,1[}(x),$$

por lo tanto, se obtiene sin ninguna dificultad que

$$\|\psi_n\|_{L^{1,\infty}} = \left(n!\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\right).$$

Para terminar nuestra construcción, volvemos a la expresión (1.72) y obtenemos

$$\frac{\left\|\sum_{\sigma\in S_n} f_\sigma\right\|_{L^{1,\infty}}}{\sum_{\sigma\in S_n}\|f_\sigma\|_{L^{1,\infty}}} = \frac{n!\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{j}}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

lo que muestra que en el caso $p = 1$ y $q = +\infty$, los espacios de Lorentz $L^{1,\infty}$ no son normables.

Sigamos con el caso $p = 1$ y $1 < q < +\infty$. Sea n un entero fijo y definamos, para $1 \leq j \leq n$, las funciones siguientes sobre $[0, +\infty[$:

$$f_j(x) = \sum_{i=1}^{n}\frac{n}{1+[(i+j)]mod(n)}\mathbb{1}_{[(i-1)/n,i/n[}(x).$$

Observemos para empezar que para todo $1 \leq j \leq n$ se tiene la igualdad $f_j^*(t) = f_1^*(t)$; en efecto, como para la función definida en (1.73), las funciones f_j se deducen a partir de f_1 mediante un reordenamiento especial dado por la función $mod(n)$ y esto nos permite concentrarnos en calcular únicamente la cantidad $\|f_1\|_{L^{1,q}}$. Así se obtiene

$$\begin{aligned}\|f_1\|_{L^{1,q}}^q &= \int_0^{+\infty} t^{q-1}{f_1^*}^q(t)dt = \int_0^{+\infty} t^{q-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{n}{i}\right)^q\mathbb{1}_{(i-1)/n,i/n[}(t)dt\\ &= \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{n}\left(1-\left(\frac{i-1}{i}\right)^q\right).\end{aligned}$$

Notemos que tenemos la estimación siguiente

$$\frac{1}{q}\sum_{i=1}^{n}\left(1-\left(\frac{i-1}{i}\right)^q\right) \leq \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i},$$

y para convercerse de ello el lector puede estudiar la función $g(x) = qx^{q-1} + (x-1)^q - x^q$ y verificar que esta función auxiliar es siempre positiva. Obtenemos entonces la mayoración siguiente:

$$\|f_1\|_{L^{1,q}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\right)^{\frac{1}{q}},$$

es decir:

$$\sum_{j=1}^{n} \|f_j\|_{L^{1,q}} \leq n \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.74}$$

Pasemos ahora a la segunda parte que nos interesa para la construcción de nuestro contra ejemplo. Puesto que se tiene

$$\sum_{j=1}^{n} f_j(x) = n \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i},$$

escribimos

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} f_j\right\|_{L^{1,q}} = \left(\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{q}} n \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \tag{1.75}$$

Juntando las fórmulas (1.74) y (1.75) obtenemos

$$\frac{\left\|\sum_{j=1}^{n} f_j\right\|_{L^{1,q}}}{\sum_{j=1}^{n} \|f_j\|_{L^{1,q}}} \geq \frac{\left(\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{q}} n \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}}{n \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\right)^{\frac{1}{q}}} = \left(\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\right)^{1-\frac{1}{q}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

■

Con este resultado, damos por terminada la primera parte del estudio de las propiedades estructurales de los espacios de Lorentz: en el caso general todos estos espacios son espacios métricos completos y en algunos casos es posible fortalecer esta estructura y obtener espacios normados. Sin embargo, hay que tener mucho cuidado pues los espacios $L^{1,q}$ con $1 < q < +\infty$ y $L^{1,\infty}$ *no son espacios normables*, y el único espacio de Lorentz que admite una norma en esta "familia" de espacios $L^{1,q}$, con $1 \leq q \leq +\infty$ es el espacio $L^{1,1}$ que corresponde al espacio de Lebesgue L^1.

La segunda parte del estudio de las propiedades topológicas de estos espacios se realizará posteriormente al considerar los espacios duales y las topologías asociadas.

Observación 1.13 Como anunciado, para estudiar las propiedades topológicas de los espacios de Lorentz es necesario presentar diversos puntos de vista con las funciones de distribución d_f, las funciones de reordenamiento decreciente f^* y las funciones maximales f^{**}. Si bien la presentación de estos espacios que utiliza las funciones maximales es la que más propiedades estructurales tiene, este enfoque no es necesariamente el más utilizado en la práctica y una vez que sabemos que estos espacios son normables (para los valores de los índices convenientes), basta utilizar cualquier otra caracterización equivalente.

*

En el siguiente cuadro resumimos el estudio de la normabilidad de los espacios de Lorentz $L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$, donde el espacio medido $(X, \mathscr{A}, \mu)$ es σ-finito y no atómico.

	$0 < p < 1$	$p = 1$	$1 < p < +\infty$	$p = +\infty$
$0 < q < 1$	NO	NO	NO	no definido
$q = 1$	NO	SI: $L^{1,1} = L^1$	SI	no definido
$1 < q < +\infty$	NO	NO	SI	no definido
$q = +\infty$	NO	NO	SI	SI: $L^{\infty,\infty} = L^\infty$

Figura 1.9: Normabilidad de los espacios de Lorentz $L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$.

1.4. Algunas generalizaciones

Una vez que tenemos a disposición esta primera serie de resultados estructurales sobre los espacios de Lorentz $L^{p,q}$, vamos a estudiar en las subsecciones siguientes tres puntos fundamentales en muchas aplicaciones.

Primero presentaremos las desigualdades de Hölder, que son herramientas constantemente utilizadas pues permiten controlar el producto de dos funciones y siempre es interesante disponer de una información precisa dada en términos de espacios de Lorentz.

Luego estudiaremos cuándo los espacios *de base* usuales (espacio de funciones simples integrables, espacio de funciones continuas a soporte compacto) son densos en los espacios de Lorentz. Esta propiedad es fundamental porque autoriza aproximar las funciones que pertenecen a los espacios de Lorentz por medio de funciones más simples. En particular, si podemos exhibir un espacio denso que es numerable, obtendremos que los espacios de Lorentz son separables lo cual es una propiedad muy útil al estudiar la dualidad y sus topologías asociadas como hemos podido ver en la Sección 1.4.3 del Volumen 2.

Finalmente, generalizaremos el producto de convolución a los espacios de Lorentz. Este punto es particularmente interesante pues los operadores que admiten un núcleo de convolución (ver la Sección 4.5 del Volumen 2 y los capítulos siguientes de este libro) son la base de muchos desarrollos en donde aparecen naturalmente los espacios de Lorentz.

Como hemos demostrado en las páginas anteriores que las caracterizaciones de los espacios de Lorentz por medio de la función de distribución d_f, de la función de reordenamiento decreciente f^* y de la función maximal f^{**} son todas equivalentes, utilizaremos cualquiera de estos tres puntos de vista en función del objetivo buscado.

1.4.1. Desigualdades de Hölder

En las páginas anteriores ya hemos realizado un primer estudio de estas importantes desigualdades haciendo intervenir espacios de Lorentz. En efecto, por un lado en el Teorema 1.1.3, página 26, habíamos obtenido la estimación

$$\|fg\|_{L^{p,\infty}} \leq C(p,p_1,p_2)\|f\|_{L^{p_1,\infty}}\|g\|_{L^{p_2,\infty}}, \tag{1.76}$$

en donde $f,g : X \longrightarrow \mathbb{K}$ son dos funciones tales que $f \in L^{p_1,\infty}(X,\mathscr{A},\mu,\mathbb{K})$ y $g \in L^{p_1,\infty}(X,\mathscr{A},\mu,\mathbb{K})$ y donde se tiene la relación $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$ con $0 < p,p_1,p_2 < +\infty$.

Por otro lado, en el Teorema 1.2.6 de la página 71 demostramos la mayoración

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^{p_1,q_1}}\|g\|_{L^{p_2,q_2}}, \tag{1.77}$$

en donde $f,g : X \longrightarrow \mathbb{K}$ son dos funciones tales que $f \in L^{p_1,q_1}(X,\mathscr{A},\mu,\mathbb{K})$ y $g \in L^{p_1,q_2}(X,\mathscr{A},\mu,\mathbb{K})$ y donde se tienen las relaciones $1 = \frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}$ y $1 = \frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}$ con $1 \leq p_1,p_2 < +\infty$ y $1 \leq q_1,q_2 \leq +\infty$.

Como vemos, en la desigualdad (1.76) únicamente intervienen espacios de Lorentz del tipo $L^{p,\infty}$, mientras que en la desigualdad (1.77) tenemos por un lado el espacio de Lebesgue L^1 (o si se prefiere el espacio de Lorentz $L^{1,1}$) y por otro lado dos espacios de Lorentz.

En el teorema siguiente vamos a dar un resultado más general en donde todos los espacios considerados son espacios de Lorentz.

Teorema 1.4.1 (Desigualdad de Hölder) *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido y sean $0 < p, p_1, p_2 < +\infty$ y $0 < q, q_1, q_2 \leq +\infty$ reales positivos tales que $\frac{1}{p} = \frac{1}{p}_1 + \frac{1}{p}_2$ y $\frac{1}{q} = \frac{1}{q}_1 + \frac{1}{q}_2$. Si $f, g : X \longrightarrow \mathbb{K}$ dos fuciones medibles que pertenecen a los espacios de Lorentz $L^{p_1,q_1}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ y $L^{p_2,q_2}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ respectivamente, entonces el producto fg pertenece al espacio de Lorentz $L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ y se tiene la desigualdad*

$$\|fg\|_{L^{p,q}} \leq 2^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^{p_1,q_1}} \|g\|_{L^{p_2,q_2}} \tag{1.78}$$

Demostración. Empecemos con el caso cuando $0 < q, q_1, q_2 < +\infty$. Escribimos entonces

$$\|fg\|^q_{L^{p,q}} = \int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{1}{p}}(fg)^*(t)\right)^q \frac{dt}{t},$$

utilizamos ahora la desigualdad puntual $(fg)^*(t/2 + t/2) \leq f^*(t/2)g^*(t/2)$ que ha sido demostrada en el punto 6) de la Proposición 1.2.5, página 50, para obtener

$$\|fg\|^q_{L^{p,q}} \leq 2^{\frac{q}{p}} \int_0^{+\infty} \left((t/2)^{\frac{1}{p}} f^*(t/2)g^*(t/2)\right)^q \frac{dt}{t},$$

dado que se tiene la identidad $\frac{1}{p} = \frac{1}{p}_1 + \frac{1}{p}_2$, escribimos

$$\|fg\|^q_{L^{p,q}} \leq 2^{\frac{q}{p}} \int_0^{+\infty} \left((t/2)^{\frac{1}{p_1}} f^*(t/2)(t/2)^{\frac{1}{p_2}} g^*(t/2)\right)^q \frac{dt}{t}.$$

Con un cambio de variable reescribimos la estimación anterior de esta manera

$$\|fg\|^q_{L^{p,q}} \leq 2^{\frac{q}{p}} \int_0^{+\infty} s^{\frac{q}{p_1}} f^{*q}(s)\, s^{\frac{q}{p_2}} g^{*q}(s) \frac{ds}{s}. \tag{1.79}$$

Sea ahora $\alpha = \frac{q_1}{q}$ y $\beta = \frac{q_2}{q}$, por la relación entre los índices q, q_1 y q_2 tenemos entonces $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ y aplicamos en la integral aquí arriba la desigualdad de Hölder con respecto a la medida $d\mu(s) = \frac{ds}{s}$ para obtener

$$\|fg\|^q_{L^{p,q}} \leq 2^{\frac{q}{p}} \left(\int_0^{+\infty} s^{\frac{q}{p_1}\alpha} f^{*q\alpha}(s) \frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\int_0^{+\infty} s^{\frac{q}{p_2}\beta} g^{*q\beta}(s) \frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{\beta}},$$

de manera que reemplazando los valores de α y β tenemos

$$\|fg\|^q_{L^{p,q}} \leq 2^{\frac{q}{p}} \left(\int_0^{+\infty} s^{\frac{q_1}{p_1}} f^{*q_1}(s) \frac{ds}{s}\right)^{\frac{q}{q_1}} \left(\int_0^{+\infty} s^{\frac{q_2}{p_2}} g^{*q_2}(s) \frac{ds}{s}\right)^{\frac{q}{q_2}},$$

en este punto, basta extraer la raíz q-ésima de esta estimación para obtener

$$\begin{aligned}\|fg\|_{L^{p,q}} &\leq 2^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{+\infty} s^{\frac{q_1}{p_1}} f^{*q_1}(s)\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{q_1}}\left(\int_0^{+\infty} s^{\frac{q_2}{p_2}} g^{*q_2}(s)\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{q_2}}\\ &\leq 2^{\frac{1}{p}}\|f\|_{L^{p_1,q_1}}\|g\|_{L^{p_2,q_2}},\end{aligned}$$

que es el resultado deseado cuando $0 < q, q_1, q_2 < +\infty$.

Estudiemos ahora el caso cuando $q_1 = +\infty$ o $q_2 = +\infty$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $q_2 = +\infty$, y en ese caso tenemos $q = q_1$. Volviendo a la desigualdad (1.79) escribimos

$$\begin{aligned}\|fg\|^q_{L^{p,q}} &\leq 2^{\frac{q}{p}}\int_0^{+\infty} s^{\frac{q}{p_1}} f^{*q}(s)\ s^{\frac{q}{p_2}} g^{*q}(s)\frac{ds}{s}\\ &\leq 2^{\frac{q}{p}}\sup_{s>0}\left\{s^{\frac{1}{p_2}} g^*(s)\right\}^q\int_0^{+\infty} s^{\frac{q}{p_1}} f^{*q}(s)\frac{ds}{s},\end{aligned}$$

de manera que, con la Definición 1.2.7, página 68, de los espacios $L^{p,\infty}$ que se basa en la función de reordenamiento decreciente, y extrayendo la raíz q-ésima en la expresión anterior tenemos la desigualdad buscada:

$$\|fg\|_{L^{p,q}} \leq 2^{\frac{1}{p}}\|f\|_{L^{p_1,q}}\|g\|_{L^{p_2,\infty}}.$$

El último caso corresponde cuando $q = q_1 = q_2 = +\infty$ y si bien este caso ha sido ya tratado en el Teorema 1.1.3 utilizando la definición de los espacios de Lorentz que utiliza la función de distribución, ahora vamos a dar una demostración diferente utilizando la función de reordenamiento decreciente. Tenemos entonces, con los mismos argumentos anteriores:

$$\begin{aligned}\|fg\|_{L^{p,\infty}} &= \sup_{t>0}\left\{t^{\frac{1}{p}}(fg)^*(t)\right\}\\ &\leq 2^{\frac{1}{p}}\sup_{t>0}\left\{(t/2)^{\frac{1}{p_1}} f^*(t/2)\ (t/2)^{\frac{1}{p_1}} g^*(t/2)\right\}\\ &\leq 2^{\frac{1}{p}}\sup_{t>0}\left\{(t/2)^{\frac{1}{p_1}} f^*(t/2)\right\}\ \sup_{t>0}\left\{(t/2)^{\frac{1}{p_1}} g^*(t/2)\right\}\\ &\leq 2^{\frac{1}{p}}\|f\|_{L^{p_1,\infty}}\|g\|_{L^{p_2,\infty}}.\end{aligned}$$

El lector comparará esta demostración con la verificación del Teorema 1.1.3: este es un ejemplo en donde los cálculos se simplifican considerablemente al considerar el punto de vista adecuado. ■

El caso $p = +\infty$ y $0 < q < +\infty$ no es tratado aquí, pues cuando el espacio medido es no atómico los espacios de Lorentz $L^{\infty,q}$ son triviales (ver la Observación 1.8, página 69).

Una aplicación directa de las estimaciones anteriores es la siguiente.

Corolario 1.4.1 (Desigualdad de Interpolación en espacios de Lorentz) *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido. Consideremos los parámetros reales siguientes $0 < p, p_1, p_2 < +\infty$ y $0 < q, q_1, q_2 \leq +\infty$.*

Si f es una función tal que $f \in L^{p_1,q_1}(X,\mathscr{A},\mu,\mathbb{K}) \cap L^{p_2,q_2}(X,\mathscr{A},\mu,\mathbb{K})$ entonces la función f pertenece a todos los espacios de Lorentz $L^{p,q}(X,\mathscr{A},\mu,\mathbb{K})$ intermedios, es decir con $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_1} + \frac{1-\theta}{p_2}$ y $\frac{1}{q} = \frac{\theta}{q_1} + \frac{1-\theta}{q_2}$ en donde $0<\theta<1$ es un real, y se tiene la desigualdad

$$\|f\|_{L^{p,q}} \leq 2^{\frac{1}{p}} \|f\|^{\theta}_{L^{p_1,q_1}} \|f\|^{1-\theta}_{L^{p_2,q_2}}$$

Prueba. Empecemos escribiendo $\|f\|_{L^{p,q}} = \||f|\|_{L^{p,q}} = \||f|^{\theta}|f|^{1-\theta}\|_{L^{p,q}}$ y definamos los parámetros siguientes $\alpha_1 = \frac{p_1}{\theta}$, $\beta_1 = \frac{q_1}{\theta}$ y $\alpha_2 = \frac{p_2}{(1-\theta)}$, $\beta_2 = \frac{q_1}{(1-\theta)}$. Notamos que se tiene $\frac{1}{p} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}$ y $\frac{1}{q} = \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2}$ y entonces podemos aplicar las desigualdades de Hölder (1.78) para obtener

$$\|f\|_{L^{p,q}} = \||f|^{\theta}|f|^{1-\theta}\|_{L^{p,q}} \leq 2^{\frac{1}{p}} \||f|^{\theta}\|_{L^{\alpha_1,\beta_1}} \||f|^{1-\theta}\|_{L^{\alpha_2,\beta_2}}.$$

En este punto aplicamos la Proposición 1.2.11, página 71 y podemos entonces escribir

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^{p,q}} &\leq 2^{\frac{1}{p}} \||f|^{\theta}\|_{L^{\alpha_1,\beta_1}} \||f|^{1-\theta}\|_{L^{\alpha_2,\beta_2}}\\
&\leq 2^{\frac{1}{p}} \||f|\|^{\theta}_{L^{\theta\alpha_1,\theta\beta_1}} \||f|\|^{1-\theta}_{L^{(1-\theta)\alpha_2,(1-\theta)\beta_2}}\\
&\leq 2^{\frac{1}{p}} \||f|\|^{\theta}_{L^{p_1,q_1}} \||f|\|^{1-\theta}_{L^{p_2,q_2}} = 2^{\frac{1}{p}} \|f\|^{\theta}_{L^{p_1,q_1}} \|f\|^{1-\theta}_{L^{p_2,q_2}},
\end{aligned}$$

lo que termina la demostración de estas desigualdades. ■

1.4.2. Propiedades de densidad

Recordemos que sobre un espacio medido $(X,\mathscr{A},\mu)$ toda función simple integrable se escribe de la forma $\sum_{j=0}^{n} \alpha_j \mathbb{1}_{A_j}$ en donde $(\alpha_j)_{0\leq j\leq n}$ son escalares y $(A_j)_{0\leq j\leq n}$ son conjuntos medibles tales que $0<\mu(A_j)<+\infty$.

El primer resultado de densidad que enunciamos es el siguiente.

Teorema 1.4.2 (densidad - funciones simples integrables) *Sea $(X,\mathscr{A},\mu)$ un espacio medido en donde la medida μ es no atómica. Entonces, el conjunto formado por todas las funciones simples integrables es denso en el espacio de Lorentz $L^{p,q}(X,\mathscr{A},\mu,\mathbb{K})$ para $0<p<+\infty$ y $0<q<+\infty$.*

Demostración. Para demostrar que el conjunto de funciones simples integrables es denso en el espacio $L^{p,q}(X,\mathscr{A},\mu,\mathbb{K})$ mostramos que, para toda función arbitraria f de este espacio, es posible encontrar una sucesión de funciones simples $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\|f-\varphi_j\|_{L^{p,q}} \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Dado que por la Proposición 1.2.11, página 71, se tiene $\|f\|_{L^{p,q}} = \||f|\|_{L^{p,q}}$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que la función f es a valores reales y positiva y existe por lo tanto (ver el Teorema 3.2.4 del Volumen 1) una sucesión de funciones simples integrables tales que $0\leq\varphi_j\leq f$ para todo $j\geq 1$ y $\varphi_j \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} f$ en μ-casi todas partes.

Ahora, puesto que se tiene la mayoración $(f - \varphi_j)(x) \leq f(x) + \varphi_j(x)$, por las propiedades de la función de reordenamiento decreciente explicitadas en la Proposición 1.2.5, página 50, obtenemos las desigualdades

$$(f - \varphi_j)^*(t) \leq f^*(t/2) + \varphi_j^*(t/2) \leq 2f^*(t/2),$$

y aplicamos entonces el Teorema usual de convergencia dominada de Lebesgue (ver el Teorema 3.3.3 del Volumen 1) para obtener

$$\lim_{j\to+\infty} \|f - \varphi_j\|_{L^{p,q}}^q = \lim_{j\to+\infty} \int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{1}{p}}(f - \varphi_j)^*(t)\right)^q \frac{dt}{t} = 0,$$

de donde se obtiene el resultado de densidad deseado. ■

Cuando se trabaja sobre un espacio X que posee un poco más de estructura, tenemos el resultado a continuación que nos proporciona un segundo teorema de densidad en los espacios de Lorentz.

Teorema 1.4.3 (densidad - funciones continuas de soporte compacto) *Sea X un espacio topológico separado localmente compacto a base numerable y sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido regular. Entonces el espacio de funciones continuas a soporte compacto $\mathcal{C}_c^0(X, \mathbb{K})$ es denso en el espacio de Lorentz $L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ para $0 < p < +\infty$ y $0 < q < +\infty$.*

Demostración. Siguiendo las ideas del Teorema 4.5.2 del Volumen 1, empezamos verificando que el espacio de funciones continuas a soporte compacto es denso (con respecto a la funcional $\|\cdot\|_{L^{p,q}}$) en el espacio de las funciones simples integrables.

Sin pérdida de generalidad podemos considerar el caso de funciones a valores reales, es decir $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, y concentrarnos en una función indicatriz $\mathbb{1}_A$ en donde $0 < \mu(A) < +\infty$. Como el espacio medido $(X, \mathscr{A}, \mu)$ es regular, para todo $\varepsilon > 0$ existe un conjunto cerrado F y un conjunto abierto U tales que $F \subset A \subset U$ y tales que $\mu(U \setminus F) < \varepsilon$ (ver el Teorema 2.4.2 del Volumen 1). Por el lema de Urysohn existe una función continua $\psi : X \longrightarrow [0, 1]$ tal que $\psi(F) = 1$ y $\psi(U^c) = 0$ y por lo tanto $\psi \in \mathcal{C}_c^0(X, \mathbb{R})$. Tenemos entonces $|\mathbb{1}_A(x) - \psi(x)| \leq \mathbb{1}_{U\setminus F}(x)$, de donde se deduce, utilizando las propiedades de la función de reordenamiento decreciente:

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{1}_A - \psi\|_{L^{p,q}}^q &= \int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{1}{p}}(|\mathbb{1}_A - \psi|)^*(t)\right)^q \frac{dt}{t} \leq \int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{1}{p}}(\mathbb{1}_{U\setminus F})^*(t)\right)^q \frac{dt}{t} \\
&\leq \int_0^{\varepsilon} t^{\frac{q}{p}-1} dt = \frac{p}{q}\varepsilon^{\frac{q}{p}}.
\end{aligned}$$

Obtenemos entonces que las funciones continuas a soporte compacto son densas en el espacio de funciones simples integrables que son a su vez densas en los espacios de Lorentz $L^{p,q}$, de manera que, por la transitividad de la densidad (ver la Proposición 4.5.1 del Volumen 1) se deduce el resultado deseado. ■

El hecho de que los espacios de Lorentz $L^{p,q}$ admitan subconjuntos densos es una propiedad topológica muy útil pues permite utilizar aproximaciones interesantes. Pero si los espacios de Lorentz admiten un subconjunto denso que además es numerable (es decir si son espacios *separables*), entonces podremos obtener algunas propiedades adicionales, especialmente cuando nos interesemos en estudiar las topologías duales como lo haremos en la Sección 1.5.

En este sentido conviene estudiar cuándo los espacios de Lorentz son separables y, al igual que los espacios de Lebesgue (ver la Sección 4.5 del Volumen 1), esta característica depende del espacio medido $(X, \mathscr{A}, \mu)$ sobre el cual se trabaja. En efecto, recordemos la noción de *σ-álgebra numerablemente generada*: si $\mathscr{A}$ es una σ-álgebra sobre un conjunto X, diremos que $\mathscr{A}$ es numerablemente engendrada si existe un conjunto de cardinal numerable $\mathcal{K} \in \mathscr{A}$ tal que $\sigma(\mathcal{K}) = \mathscr{A}$.

Con esta condición sobre el espacio medido, habíamos demostrado en la Sección 4.5.2 del Volumen 1 que los espacios de Lebesgue L^p con $1 \leq p < +\infty$ son separables y pasamos ahora la verificación correspondiente para los espacios de Lorentz.

Teorema 1.4.4 (Separabilidad de los espacios de Lorentz) *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido y sean p, q dos reales tales que $0 < p < +\infty$ y $0 < q < +\infty$. Si la medida μ es σ-finita y si la σ-álgebra $\mathscr{A}$ es numerablemente generada, entonces el espacio de Lorentz $L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ es separable.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer considerar $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (para el caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ basta estudiar las partes reales e imaginarias por separado). Sea entonces $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función que pertenece a los espacios de Lorentz $L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ con $0 < p < +\infty$ y $0 < q < +\infty$.

Por el Teorema 1.4.2 anterior sabemos que para todo $\varepsilon > 0$ existe una función simple integrable $g = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \mathbb{1}_{A_j}$, con $\alpha_j \in \mathbb{R}$ y $\mu(A_j) < +\infty$, tal que se tenga $\|f - g\|_{L^{p,q}} \leq \varepsilon$ y por el Teorema 1.3.3, sabemos que la funcional $|||\cdot|||_{p,q,r}^r$ definida con la fórmula (1.66), página 94, con $0 < r < p$ y $0 < r \leq q$, es una distancia equivalente sobre los espacios de Lorentz $L^{p,q}$, de manera que tenemos

$$|||f - g|||_{p,q,r}^r \leq C\varepsilon^r,$$

en donde la constante $C > 0$ proviene de la equivalencia entre las funcionales $\|\cdot\|_{L^{p,q}}$ y $|||\cdot|||_{p,q,r}$.

Podemos ahora encontrar sin problema números racionales $(q_j)_{0 \leq j \leq n}$ tales que se tenga (utilizando la subaditividad de la funcional $|||\cdot|||_{p,q,r}^r$)

$$\begin{aligned} |||g - \sum_{j=0}^{n} q_j \mathbb{1}_{A_j}|||_{p,q,r}^r &= |||\sum_{j=0}^{n} \alpha_j \mathbb{1}_{A_j} - \sum_{j=0}^{n} q_j \mathbb{1}_{A_j}|||_{p,q,r}^r \\ &\leq \sum_{j=0}^{n} |\alpha_j - q_j|^r \; |||\mathbb{1}_{A_j}|||_{p,q,r}^r \leq C\varepsilon^r. \end{aligned}$$

Finalmente, dado que la σ-álgebra es numerablemente engendrada, existe una familia numerable de conjuntos medibles $\mathcal{D} = (D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tales que para todo $\varepsilon > 0$ y para todo $A \in \mathscr{A}$, existe un conjunto D_{k_0} de esta familia tal que

$\mu(A\Delta D_{k_0}) \leq \varepsilon$ (ver los Lemas 4.5.1 y 4.5.2 del Volumen 1). Pero, como se tiene $\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{A\Delta B}$, gracias a esta familia numerable $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ podemos escribir

$$|||\sum_{j=0}^{n} q_j \mathbb{1}_{A_j} - \sum_{j=0}^{n} q_j \mathbb{1}_{D_j}|||_{p,q,r}^{r} = |||\sum_{j=0}^{n} q_j \mathbb{1}_{A_j\Delta D_j}|||_{p,q,r}^{r} \leq C\varepsilon^r.$$

Con todas estas estimaciones vamos a demostrar que el conjunto (numerable) de funciones simples integrables de la forma $\psi = \sum_{j=0}^{n} q_j \mathbb{1}_{D_j}$, en donde q_j es un número racional y los conjuntos D_j pertenecen a la familia numerable $\mathcal{D}$, es denso en los espacios de Lorentz $L^{p,q}$: en efecto, gracias a los cálculos anteriores tenemos entonces

$$\begin{aligned} |||f - \sum_{j=0}^{n} q_j \mathbb{1}_{D_j}|||_{p,q,r}^{r} \quad &\leq \quad |||f-g|||_{p,q,r}^{r} + |||g - \sum_{j=0}^{n} q_j \mathbb{1}_{A_j}|||_{p,q,r}^{r} \\ &\quad + |||\sum_{j=0}^{n} q_j \mathbb{1}_{A_j} - \sum_{j=0}^{n} q_j \mathbb{1}_{D_j}|||_{p,q,r}^{r} \leq 3C\varepsilon^r, \end{aligned}$$

y de esta manera hemos demostrado que cuando la σ-álgebra es numerablemente generada, entonces los espacios de Lorentz $L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ son separables. ■

Como por el Teorema 1.3.3 *todos* los espacios de Lorentz $L^{p,q}$ son espacios métricos, hemos privilegiado este punto de vista en la demostración anterior y hemos obtenido que estos espacios métricos son separables cuando $0 < p < +\infty$ y $0 < q < +\infty$.

Los casos $p = +\infty$ y $0 < q < +\infty$ ó $p = q = +\infty$, o no presentan interés por ser triviales al ser la medida no atómica, o ya han sido tratados en el Volumen 1, de manera que queda por estudiar el caso $0 < p < +\infty$ y $q = +\infty$ y aquí tenemos el resultado a continuación.

Teorema 1.4.5 (Problemas de densidad) *Sea* $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{K})$. *Para todo* $0 < p < +\infty$*, el conjunto de funciones simples integrables no es denso en el espacio de Lorentz* $L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{K})$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Vamos a utilizar el Corolario 1.2.6 del Volumen 2, que nos dice que un subconjunto del espacio $L^{p,\infty}$ es denso si y solo si el conjunto de todas las formas lineales continuas que se anulan sobre este subconjunto está reducido al elemento nulo: vamos pues a construir una forma lineal continua que se anula sobre todas las funciones simples integrables y que no es trivial.

Consideremos el subconjunto $\mathscr{L}$ del espacio $L^{p,\infty}$ tal que la cantidad

$$T(f) = \lim_{x\to 0} |x|^{\frac{n}{p}} f(x), \text{ es finita,}$$

es decir $\mathscr{L} = \{f \in L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{R}) : \lim_{x\to 0} |x|^{\frac{n}{p}} f(x) < +\infty\}$. Este conjunto no es vacío pues, por los cálculos realizados en la página 12, la función

$|x|^{-\frac{n}{p}}$ pertenece al espacio $L^{p,\infty}$ y al subconjunto $\mathscr{L}$.

Se verifica sin dificultad que este conjunto $\mathscr{L}$ es un espacio vectorial y además se tiene que todas las funciones simples integrables pertenecen al conjunto $\mathscr{L}$. Observamos también que para toda función simple integrable g se tiene $T(g) = 0$.

Tenemos finalmente que la aplicación T anterior es una forma lineal continua definida sobre el espacio $\mathscr{L}$: en efecto por la Proposición 1.1.4 del Volumen 2 tenemos que si la imagen por T de toda sucesión que pertenece al espacio $\mathscr{L}$ y que es convergente hacia 0 es acotada (lo cual es el caso por definición), entonces la aplicación T es continua.

En este punto aplicamos el Teorema de Hahn-Banach (ver el Teorema 1.2.2 del Volumen 2) que permite *prolongar* la aplicación lineal continua T definida inicialmente sobre el espacio $\mathscr{L}$ a todo el espacio $L^{p,\infty}$.

De esta forma hemos construido una forma lineal continua definida sobre todo el espacio de Lorentz $L^{p,\infty}$ que se anula sobre el conjunto de las funciones simples integrables y que no es trivial: se deduce que este conjunto de funciones simples integrables no es denso en el espacio de Lorentz $L^{p,\infty}$. ■

Una manera diferente de verificar este resultado consiste en comprobar que una cierta función $f \in L^{p,\infty}$ no puede ser aproximada (en el sentido de la distancia $\|\cdot\|_{L^{p,\infty}}$) por medio de funciones simples integrables. Ver el Ejercicio 1.15 para más detalles.

1.4.3. Convolución en los espacios de Lorentz

En el Teorema 1.1.5, página 32, ya hemos presentado un resultado relativo a la convolución en los espacios de Lorentz $L^{p,\infty}$ y en la fórmula (1.21) habíamos obtenido desigualdades del tipo

$$\|f * g\|_{L^{r,\infty}} \leq C(r,p,q)\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^{q,\infty}},$$

con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}, 1 \leq p < +\infty, 1 < q, r < +\infty$, en donde intervienen espacios de Lebesgue y de Lorentz.

En esta sección vamos a estudiar de manera mucho más general el producto de convolución en los espacios de Lorentz $L^{p,q}$ y veremos algunas precauciones que hay que tomar al considerar esta operación entre funciones.

Recordemos pues el marco de trabajo en el cual vamos a enunciar nuestros resultados. Sea $(\mathbb{G}, \cdot)$ un grupo topológico localmente compacto cuyo elemento neutro será notado e y la operación inversa será notada x^{-1}. Si $f : \mathbb{G} \longrightarrow \mathbb{K}$ es una función medible y si $\tau \in \mathbb{G}$, la traslación *por la izquierda* está dada por $f_\tau(x) = f(\tau \cdot x)$, la traslación *por la derecha* se define como $f^\tau(x) = f(x \cdot \tau)$ y definimos la función $\check{f}$ por medio de la expresión $\check{f}(x) = f(x^{-1})$.

Por comodidad, supondremos siempre que el grupo $(\mathbb{G}, \cdot)$ es *unimodular*, de manera que, si sobre el espacio medible $(\mathbb{G}, \mathcal{B}or(\mathbb{G}))$ consideramos una medida de Haar μ, que es σ-finita e invariante por la izquierda, entonces para todo $\tau \in \mathbb{G}$ y para toda función integrable f tenemos las identidades siguientes

$$\int_{\mathbb{G}} f(x \cdot \tau) d\mu(x) = \int_{\mathbb{G}} f(\tau \cdot x) d\mu(x) = \int_{\mathbb{G}} f(x^{-1}) d\mu(x) = \int_{\mathbb{G}} f(x) d\mu(x),$$

de donde se obtiene sin problema las identidades

$$\|f_\tau\|_{L^{p,q}} = \|f^\tau\|_{L^{p,q}} = \|\check{f}\|_{L^{p,q}} = \|f\|_{L^{p,q}},$$

con $0 < p < +\infty$ y $0 < q \leq +\infty$, pues todas estas funciones son equidistribuidas. Ver el Ejercicio 1.14 para la verificación de este punto particular y para mayores detalles sobre los grupos topológicos localmente compactos unimodulares y medidas de Haar, ver el Capítulo 4 del Volumen 2.

El *producto de convolución* entre dos funciones medibles $f, g : \mathbb{G} \longrightarrow \mathbb{K}$ es entonces una función, notada por $f * g$, que está definida por medio de la expresión general siguiente

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{G}} f(y) g(y^{-1} \cdot x) d\mu(y) = \int_{\mathbb{G}} f(x \cdot z) g(z^{-1}) d\mu(z). \tag{1.80}$$

Evidentemente, en el caso particular cuando $\mathbb{G} = \mathbb{R}^n$, tenemos la fórmula usual

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x - y) dy.$$

Indiquemos que la expresión (1.80) es por el momento puramente formal pues no disponemos de suficiente información sobre las funciones f y g para determinar si la función $f * g$ está correctamente definida: es decir que las funciones f y g pueden ser *simpáticas* y a pesar de esto tener $f * g(x) = +\infty$ para casi todo $x \in \mathbb{G}$.

En este sentido, volvemos a recordar las desigualdades de Young (ver el Teorema 4.2.2 del Volumen 2 para una demostración), que dan unas primeras condiciones sobre las funciones f y g para que el producto de convolución $f * g$ esté bien definido.

Teorema 1.4.6 (Desigualdades de Young) *sobre* $(\mathbb{G}, \mathcal{B}or(\mathbb{G}), \mu)$ *un grupo topológico localmente compacto, unimodular, dotado de una medida de Haar σ-finita invariante por la izquierda, si* $1 \leq p, q, r \leq +\infty$ *son tres reales relacionados por la fórmula*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r},$$

y si $f, g : \mathbb{G} \longrightarrow \mathbb{K}$ *son dos funciones tales que* $f \in L^p(\mathbb{G}, \mathcal{B}or(\mathbb{G}), \mu, \mathbb{K})$ *y* $g \in L^q(\mathbb{G}, \mathcal{B}or(\mathbb{G}), \mu, \mathbb{K})$, *entonces el producto de convolución* $f * g$ *pertenece al espacio* $L^r(\mathbb{G}, \mathcal{B}or(\mathbb{G}), \mu, \mathbb{K})$ *y se tiene la desigualdad*

$$\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

El objetivo de toda esta sección es entonces establecer este tipo de desigualdades considerando espacios de Lorentz generales $L^{p,q}$ en lugar de los espacios de Lebesgue y las mayoraciones así obtenidas son conocidas como las *desigualdades de Young-O'Neil.*

Antes de entrar en los detalles técnicos de las demostraciones, es interesante indicar en dónde reside la principal dificultad: en efecto, en la definición (1.80) del producto de convolución, tenemos la integral de un producto $f(y)g(y^{-1}\cdot x)$, y vamos a tener que estudiar la función de distribución, la función de reordenamiento decreciente o la función maximal (dependiendo del punto de vista adoptado) de la integral de este producto.

Lastimosamente, estas operaciones sobre las funciones que permiten definir los espacios de Lorentz no tienen un comportamiento simple con respecto a la integral de un producto (como es el caso de la convolución), y esto nos llevará a estudiar paso por paso cómo obtener desigualdades útiles para nuestros fines.

Para mayor claridad en la exposición seguiremos las etapas siguientes:

A) Desigualdades de base para funciones simples integrables,

B) Desigualdades de Young-O'Neil en $L^{p,q}$ con $1 < p < +\infty$ y $1 \leq q < +\infty$,

C) Desigualdades de Young-O'Neil en $L^{p,\infty}$ con $1 < p < +\infty$,

D) Casos donde el producto de convolución está mal definido.

E) Una aplicación: las desigualdades de Hardy-Littlewood-Sobolev.

A) Desigualdades de base para funciones simples integrables

Observemos para empezar que, sobre $(\mathbb{G}, \mathcal{B}or(\mathbb{G}), \mu)$ un grupo topológico localmente compacto, unimodular, dotado de una medida de Haar σ-finita invariante por la izquierda, si consideramos f y g dos funciones simples integrables, es decir si[25]

$$f(x) = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}(x) \quad \text{y} \quad g(x) = \sum_{j=0}^{n} \beta_j \mathbb{1}_{B_j}(x), \tag{1.81}$$

entonces el producto de convolución $f * g$ está siempre bien definido.

Dado que las funciones simples integrables pueden ser vistas como los ladrillos de base de los espacios de Lebesgue y de Lorentz, vamos en esta subsección enunciar un resultado relativo a este tipo de funciones y que servirá de soporte en todo lo que sigue.

Proposición 1.4.1 *Sea $(\mathbb{G}, \mathcal{B}or(\mathbb{G}), \mu)$ un grupo topológico localmente compacto, unimodular, dotado de una medida de Haar σ-finita invariante por la izquierda. Si $f, g : \mathbb{G} \longrightarrow \mathbb{K}$ son dos funciones simples integrables, entonces para todo $t > 0$ tenemos las desigualdades siguientes*

[25] Donde $(\alpha_i)_{0\leq i\leq m}$, $(\beta_j)_{0\leq j\leq n}$ son escalares y $(A_i)_{0\leq i\leq m}$, $(B_j)_{0\leq j\leq n}$ son conjuntos de medida positiva finita.

1) $$(f*g)^{**}(t) \leq C\left(tf^{**}(t)g^{**}(t) + \int_t^{+\infty} f^*(s)g^*(s)ds\right),$$

2) $$(f*g)^{**}(t) \leq C\int_t^{+\infty} f^{**}(s)g^{**}(s)ds.$$

Prueba.

1) Empezamos con el caso cuando $f = \mathbb{1}_A$ y $g = \mathbb{1}_B$, en donde los conjuntos A y B son de medida finita. Recordemos (ver las fórmulas (1.34) página 45 y (1.64) página 86) que en este caso se tiene

$$f^*(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } s \leq \mu(A), \\ \\ 0 & \text{si } s > \mu(A), \end{cases} \qquad f^{**}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \leq \mu(A), \\ \\ \frac{\mu(A)}{t} & \text{si } t > \mu(A), \end{cases} \tag{1.82}$$

y se tiene exactamente lo mismo para las funciones $g^*(s)$ y $g^{**}(t)$, es decir

$$g^*(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } s \leq \mu(B), \\ \\ 0 & \text{si } s > \mu(B), \end{cases} \qquad g^{**}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \leq \mu(B), \\ \\ \frac{\mu(A)}{t} & \text{si } t > \mu(B). \end{cases} \tag{1.83}$$

Sin pérdida de generalidad se puede suponer que $\mu(A) \leq \mu(B)$. Tenemos entonces tres casos:

- Si $t > \mu(B)$, entonces tenemos

$$tf^{**}(t)g^{**}(t) + \int_t^{+\infty} f^*(s)g^*(s)ds = t\frac{\mu(A)}{t}\frac{\mu(B)}{t} = \frac{\mu(A)\mu(B)}{t},$$

pero como se tiene, por la identidad $\displaystyle\int_0^{+\infty}(f*g)^*(s)ds = \|f*g\|_{L^1}$, podemos escribir

$$t(f*g)^{**}(t) = \int_0^t (f*g)^*(s)ds \leq \|f*g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1} = \mu(A)\mu(B),$$

de donde se deduce $(f*g)^{**}(t) \leq \frac{\mu(A)\mu(B)}{t}$, y por lo tanto tenemos

$$(f*g)^{**}(t) \leq tf^{**}(t)g^{**}(t) + \int_t^{+\infty} f^*(s)g^*(s)ds.$$

- Si $\mu(A) \leq t \leq \mu(B)$, se tiene la identidad

$$tf^{**}(t)g^{**}(t) + \int_t^{+\infty} f^*(s)g^*(s)ds = t\,\frac{\mu(A)}{t} = \mu(A).$$

Por otro lado, por el decrecimiento de la función $(f*g)^*$ y utilizando las desigualdades de Young (pues se trata de funciones simples integrables que pertenecen a todos los espacios de Lebesgue y de Lorentz) tenemos la estimación

$$\begin{aligned}(f*g)^{**}(t) &= \frac{1}{t}\int_0^t (f*g)^*(s)ds \\ &\leq (f*g)^*(0)\frac{1}{t}\int_0^t ds = \|f*g\|_{L^\infty} \\ &\leq \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^\infty} = \mu(A), \end{aligned} \tag{1.84}$$

de donde se obtiene sin problema

$$(f*g)^{**}(t) \leq tf^{**}(t)g^{**}(t) + \int_t^{+\infty} f^*(s)g^*(s)ds.$$

- Si $t \leq \mu(A)$, tenemos por un lado

$$tf^{**}(t)g^{**}(t) + \int_t^{+\infty} f^*(s)g^*(s)ds = t + \int_t^{\mu(A)} ds = \mu(A),$$

y por otro lado, por la misma cadena de estimaciones dada en la expresión (1.84), tenemos $(f*g)^{**}(t) \leq \mu(A)$, de donde se obtiene

$$(f*g)^{**}(t) \leq tf^{**}(t)g^{**}(t) + \int_t^{+\infty} f^*(s)g^*(s)ds.$$

Pasemos ahora al caso de funciones simples integrables *positivas*, que se escriben de la forma (1.81). Utilizamos la fórmula (1.35) de la página 46, para obtener las identidades $f^*(s) = \sum_{i=0}^{m} f_i^*(s)$, $g^*(s) = \sum_{j=0}^{n} g_j^*(s)$, y entonces escribimos, por la linealidad de la convolución

$$f*g(x) = \sum_{i,j} f_i * g_i(x),$$

de donde obtenemos, por la sublinealidad de la función maximal

$$(f*g)^{**}(t) = \left(\sum_{i,j} f_i * g_i\right)^{**}(t) \leq \sum_{i,j}(f_i*g_i)^{**}(t),$$

y aplicando las desigualdades obtenidas anteriormente podemos escribir

$$\begin{aligned}(f*g)^{**}(t) &\leq \sum_{i,j}\left(tf_i^{**}(t)g_j^{**}(t) + \int_t^{+\infty} f_i^*(s)g_j^*(s)ds\right) \\ &\leq t\sum_{i,j} f_i^{**}(t)g_j^{**}(t) + \int_t^{+\infty}\sum_{i,j} f_i^*(s)g_j^*(s)ds \\ &\leq tf^{**}(t)g^{**}(t) + \int_t^{+\infty} f^*(s)g^*(s)ds,\end{aligned}$$

lo que es el resultado buscado.

Finalmente, cuando las funciones simples integrables toman valores negativos, tenemos la descomposición $f = f^+ - f^-$, en donde las funciones f^+, f^- son positivas, de manera que tenemos

$$f * g = f^+ * g^+ - f^+ * g^- - f^- * g^+ + f^- * g^-.$$

Dado que se tiene $(f^\pm)^* \leq f^*$, por el punto 4) de la Proposición 1.2.5, página 50, entonces por las propiedades expuestas en la Proposición 1.3.1, página 87, se tiene $(f^\pm)^{**} \leq f^{**}$ y por la subaditividad de la función maximal podemos escribir

$$\begin{aligned}
(f*g)^{**} &\leq (f^+ * g^+)^{**} + (f^+ * g^-)^{**} + (f^- * g^+)^{**} + (f^- * g^-)^{**} \\
&\leq t(f^+)^{**}(t)(g^+)^{**}(t) + \int_t^{+\infty} (f^+)^*(s)(g^+)^*(s)ds \\
&\quad + t(f^+)^{**}(t)(g^-)^{**}(t) + \int_t^{+\infty} (f^+)^*(s)(g^-)^*(s)ds \\
&\quad + t(f^-)^{**}(t)(g^+)^{**}(t) + \int_t^{+\infty} (f^-)^*(s)(g^+)^*(s)ds \\
&\quad + t(f^-)^{**}(t)(g^-)^{**}(t) + \int_t^{+\infty} (f^-)^*(s)(g^-)^*(s)ds \\
&\leq 4\left(tf^{**}(t)g^{**}(t) + \int_t^{+\infty} f^*(s)g^*(s)ds\right),
\end{aligned}$$

lo que termina la prueba del punto 1).

2) Esta desigualdad se verifica de manera muy similar. En efecto, si $f = \mathbb{1}_A$ y $g = \mathbb{1}_B$ son funciones indicatrices de conjuntos, tenemos las expresiones (1.82) y (1.83), si suponemos además $\mu(A) \leq \mu(B)$, entonces:

- si $t > \mu(B)$, podemos escribir

$$\int_t^{+\infty} f^{**}(s)g^{**}(s)ds = \int_t^{+\infty} \frac{\mu(A)}{s}\frac{\mu(B)}{s}ds = \frac{\mu(A)\mu(B)}{t},$$

pero se tiene

$$t(f*g)^{**}(t) = \int_0^t (f*g)^*(s)ds \leq \|f*g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1} = \mu(A)\mu(B),$$

de donde se deduce la mayoración

$$(f*g)^{**}(t) \leq \int_t^{+\infty} f^{**}(s)g^{**}(s)ds.$$

- si $t \leq \mu(B)$, tenemos

$$\int_t^{+\infty} f^{**}(s)g^{**}(s)ds \geq \int_{\mu(B)}^{+\infty} f^{**}(s)g^{**}(s)ds = \mu(A),$$

pero como se tiene la estimación (1.84), obtenemos sin problema que

$$(f * g)^{**}(t) \leq \int_t^{+\infty} f^{**}(s)g^{**}(s)ds.$$

La generalización a las funciones simples integrables generales sigue las mismas etapas explicitadas en el punto anterior. ■

B) Desigualdades de Young-O'Neil en $L^{p,q}$ con $1 < p < +\infty$ y $1 \leq q < +\infty$

Este resultado anterior ha sido enunciado considerando funciones simples integrables, es ahora necesario extenderlo a funciones más generales lo cual nos permitirá dar algunas versiones interesantes de las desigualdades de Young en los espacios de Lorentz $L^{p,q}$.

El primer resultado en esta dirección es el siguiente.

Proposición 1.4.2 (Convolución $L^{p,q} \times L^1 \hookrightarrow L^{p,\sigma}$) *Sea $(\mathbb{G}, \mathcal{B}or(\mathbb{G}), \mu)$ un grupo topológico localmente compacto, unimodular, dotado de una medida de Haar σ-finita invariante por la izquierda. Si $f \in L^{p,q}(\mathbb{G}, \mathcal{B}or(\mathbb{G}), \mu, \mathbb{K})$ con $1 < p < +\infty$ y $1 \leq q < +\infty$ y si $g \in L^1(\mathbb{G}, \mathcal{B}or(\mathbb{G}), \mu, \mathbb{K})$, entonces el producto de convolución $f * g$ pertenece al espacio de Lorentz $L^{p,\sigma}(\mathbb{G}, \mathcal{B}or(\mathbb{G}), \mu, \mathbb{K})$ con $1 \leq q \leq \sigma < +\infty$ y además se tiene:*

1) las estimaciones puntuales

$$\begin{aligned}
(f * g)^{**}(t) &\leq C\left(tf^{**}(t)g^{**}(t) + \int_t^{+\infty} f^{*}(s)g^{*}(s)ds\right), \\
(f * g)^{**}(t) &\leq C\int_t^{+\infty} f^{**}(s)g^{**}(s)ds,
\end{aligned}$$

2) y la desigualdad

$$\|f * g\|_{L^{p,\sigma}} \leq C(p, q, \sigma)\|f\|_{L^{p,q}}\|g\|_{L^1}.$$

Prueba. Dado que si $q \leq \sigma < +\infty$, se tiene por el Teorema 1.2.9, página 75, las inclusiones $\|f * g\|_{L^{p,\sigma}} \leq C(p, q, \sigma)\|f * g\|_{L^{p,q}}$, y podemos entonces suponer sin pérdida de generalidad que $\sigma = q$ y vamos por lo tanto a estudiar la desigualdad $\|f * g\|_{L^{p,q}} \leq C\|f\|_{L^{p,q}}\|g\|_{L^1}$.

Para demostrar esta mayoración seguiremos las siguientes etapas.

- Empezamos considerando f, g dos funciones simples integrables. Entonces por la Proposición 1.4.1, tenemos las dos desigualdades puntuales anteriores, lo que demuestra directamente el punto 1) en el caso de funciones simples integrables. En este marco de trabajo, verifiquemos el punto 2): dado que la función f^* es decreciente y se tiene el control $f^*(t) \leq f^{**}(t)$, escribimos

$$\begin{aligned}(f*g)^{**}(t) &\leq C\left(tf^{**}(t)g^{**}(t)+f^{**}(t)\int_t^{+\infty}g^*(s)ds\right)\\ &\leq C\left(f^{**}(t)\int_0^t g^*(s)ds+f^{**}(t)\int_t^{+\infty}g^*(s)ds\right)\\ &\leq Cf^{**}(t)\int_0^{+\infty}g^*(s)ds=Cf^{**}(t)\|g\|_{L^1}.\end{aligned}$$

A partir de esta estimación reconstruimos la funcional $|||\cdot|||_{p,q}$ y por la equivalencia de las funcionales $|||\cdot|||_{p,q}$ y $\|\cdot\|_{L^{p,q}}$ tenemos

$$\|f*g\|_{L^{p,q}}\leq C(p,q)\|f\|_{L^{p,q}}\|g\|_{L^1}.$$

- Consideremos ahora $f\in L^{p,q}(\mathbb{G},\mathcal{B}or(\mathbb{G}),\mu,\mathbb{K})$ y fijemos g una función simple integrable.

  Sea φ una función simple integrable que pertenece al espacio de Lorentz $L^{p,q}(\mathbb{G},\mathcal{B}or(\mathbb{G}),\mu,\mathbb{K})$. Por un lado tenemos que el producto $\varphi*g$ está bien definido y tenemos la desigualdad $\|\varphi*g\|_{L^{p,q}}\leq C(p,q)\|\varphi\|_{L^{p,q}}\|g\|_{L^1}$. Por otro lado, dado que por el Teorema 1.4.2, página 115, el conjunto de funciones simples integrables es denso en el espacio de Lorentz $L^{p,q}(\mathbb{G},\mathcal{B}or(\mathbb{G}),\mu,\mathbb{K})$, podemos extender la estimación anterior para obtener la desigualdad $\|f*g\|_{L^{p,q}}\leq C(p,q)\|f\|_{L^{p,q}}\|g\|_{L^1}$, lo que demuestra el punto 2) de la proposición en este caso.

Para el punto 1), procedemos de la siguiente manera: sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones simples integrables que converge hacia la función f en el sentido de la métrica $|||\cdot|||_{p,q}$. Por la linealidad de la convolución tenemos $f*g=(f-f_n)*g+f_n*g$ y entonces, por la subaditividad de la función maximal, escribimos $(f*g)^{**}(t)\leq\big((f-f_n)*g\big)^{**}(t)+(f_n*g)^{**}(t)$, de donde se obtiene la mayoración puntual

$$(f*g)^{**}(t)-(f_n*g)^{**}(t)\leq\big((f-f_n)*g\big)^{**}(t),$$

a partir de la cual podemos obtener, reconstruyendo la funcional $|||\cdot|||_{p,q}$ la desigualdad

$$\begin{aligned}&\left(\int_0^{+\infty}\left(t^{\frac{1}{p}}\big((f*g)^{**}(t)-(f_n*g)^{**}(t)\big)\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}\leq\\ &\qquad\qquad\left(\int_0^{+\infty}\left(t^{\frac{1}{p}}\big((f-f_n)*g\big)^{**}(t)\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}\\ &\leq|||(f-f_n)*g|||_{p,q}\leq|||(f-f_n)|||_{p,q}\|g\|_{L^1},\end{aligned}$$

y esta última cantidad tiende hacia cero cuando $n\to+\infty$. De esta forma, considerando una subsucesión (ver la Proposición 1.1.5, página 17) podemos escribir, por el Teorema de convergencia monótona

$$\begin{aligned}(f*g)^{**}(t) &= \lim_{k\to+\infty}(f_{n_k}*g)^{**}(t)\\ &\leq \lim_{k\to+\infty} C\left(f_{n_k}^{**}(t)g^{**}(t)+\int_t^{+\infty} f_{n_k}^{*}(s)g^{*}(s)ds\right)\\ &\leq C\left(f^{**}(t)g^{**}(t)+\int_t^{+\infty} f^{*}(s)g^{*}(s)ds\right),\end{aligned}$$

lo que nos proporciona la primera desigualdad del punto 1) en el caso cuando $f\in L^{p,q}(\mathbb{G},\mathcal{B}or(\mathbb{G}),\mu,\mathbb{K})$ y g es una función simple. La segunda desigualdad se obtiene de exactamente la misma manera, de manera que los detalles son dejados al lector.

- El caso general, es decir cuando $f\in L^{p,q}$ y $g\in L^1$ se estudia de manera muy similar al punto anterior: fijemos esta vez $f\in L^{p,q}$ y sea φ una función simple integrable, tenemos $\|f*\varphi\|_{L^{p,q}} \leq C(p,q)\|f\|_{L^{p,q}}\|\varphi\|_{L^1}$, dado que las funciones simples integrables son densas en los espacios L^1, obtenemos sin problema el punto 2) de la proposición.

  Para la primera desigualdad del primer punto consideramos $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones simples integrables que converge hacia la función g en el sentido de la norma $\|\cdot\|_{L^1}$. Por la linealidad de la convolución y por la subatividad de la función maximal tenemos

$$(f*g)^{**}(t)-(f*g_n)^{**}(t)\leq \big(f*(g-g_n)\big)^{**}(t),$$

  y reconstruyendo la funcional $|||\cdot|||_{p,q}$ escribimos

$$\begin{aligned}&\left(\int_0^{+\infty}\left(t^{\frac{1}{p}}\left((f*g)^{**}(t)-(f*g_n)^{**}(t)\right)\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}\leq\\ &\qquad\qquad\left(\int_0^{+\infty}\left(t^{\frac{1}{p}}\big(f*(g-g_n)\big)^{**}(t)\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}\\ &\leq |||f*(g-g_n)|||_{p,q}\leq |||f|||_{p,q}\|g-g_n\|_{L^1},\end{aligned}$$

  que es una cantidad que tiende a cero si $n\to+\infty$, y entonces, por los mismos argumentos utilizados anteriormente tenemos

$$\begin{aligned}(f*g)^{**}(t) &= \lim_{k\to+\infty}(f*g_{n_k})^{**}(t)\\ &\leq \lim_{k\to+\infty} C\left(f^{**}(t)g_{n_k}^{**}(t)+\int_t^{+\infty} f^{*}(s)g_{n_k}^{*}(s)ds\right)\\ &\leq C\left(f^{**}(t)g^{**}(t)+\int_t^{+\infty} f^{*}(s)g^{*}(s)ds\right).\end{aligned}$$

  La segunda desigualdad del primer punto se obtiene de formar similar y de esta manera terminamos la prueba de la proposición. ■

Corolario 1.4.2 (Convolución $L^{p,q} \times L^1 \hookrightarrow L^{p,\infty}$) *Sea $(\mathbb{G}, \mathcal{B}or(\mathbb{G}), \mu)$ un grupo topológico localmente compacto, unimodular, dotado de una medida de Haar σ-finita invariante por la izquierda. Si $f \in L^{p,q}(\mathbb{G}, \mathcal{B}or(\mathbb{G}), \mu, \mathbb{K})$ con $1 < p < +\infty$ y $1 \leq q < +\infty$ y si $g \in L^1(\mathbb{G}, \mathcal{B}or(\mathbb{G}), \mu, \mathbb{K})$, entonces el producto de convolución $f * g$ pertenece al espacio de Lorentz $L^{p,\infty}(\mathbb{G}, \mathcal{B}or(\mathbb{G}), \mu, \mathbb{K})$ y se tiene*

$$\|f * g\|_{L^{p,\infty}} \leq C(p, q, \sigma)\|f\|_{L^{p,q}}\|g\|_{L^1}.$$

La verificación es inmediata y se deduce del resultado anterior pues por el Teorema 1.2.9, página 75, se tiene la estimación $\|f * g\|_{L^{p,\infty}} \leq \|f * g\|_{L^{p,\sigma}}$ para todo $1 \leq \sigma < +\infty$.

Veamos ahora otro resultado.

Proposición 1.4.3 (Convolución $L^{p_1,q_1} \times L^{p_2,q_2} \hookrightarrow L^{\infty}$) *Sea $(\mathbb{G}, \mathcal{B}or(\mathbb{G}), \mu)$ un grupo topológico localmente compacto, unimodular, dotado de una medida de Haar σ-finita invariante por la izquierda. Sean f, g dos funciones medibles que verifican $f \in L^{p_1,q_1}(\mathbb{G}, \mathcal{B}or(\mathbb{G}), \mu, \mathbb{K})$ con $1 < p_1 < +\infty$, $1 \leq q_1 < +\infty$, y $g \in L^{p_2,q_2}(\mathbb{G}, \mathcal{B}or(\mathbb{G}), \mu, \mathbb{K})$ con $1 < p_2 < +\infty$, $1 \leq q_2 < +\infty$.*

Si $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1$ y si $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} \geq 1$ entonces se tiene la mayoración

$$\|f * g\|_{L^{\infty}} \leq C(p_1, p_2)\|f\|_{L^{p_1,q_1}}\|g\|_{L^{p_2,q_2}}.$$

Prueba. Empecemos considerandos funciones simples. Tenemos entonces por la segunda desigualdad del primer punto de la Proposición 1.4.1:

$$(f * g)^{**}(t) \leq C\left(\int_t^{+\infty} f^{**}(s)g^{**}(s)ds\right),$$

como se tiene $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1$, podemos escribir

$$(f * g)^{**}(t) \leq C\left(\int_0^{+\infty} s^{\frac{1}{p_1}} f^{**}(s) s^{\frac{1}{p_2}} g^{**}(s)\frac{ds}{s}\right),$$

de manera que aplicando la desigualdad de Hölder con $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = 1$ se tiene

$$\begin{aligned}(f * g)^{**}(t) &\leq C\left(\int_0^{+\infty}\left(s^{\frac{1}{p_1}} f^{**}(s)\right)^{q_1}\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{q_1}}\left(\int_0^{+\infty}\left(s^{\frac{1}{p_2}} g^{**}(s)\right)^{q_2}\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{q_2}} \\ &\leq C|||f|||_{p_1,q_1}|||g|||_{p_2,q_2} \leq C(p_1, p_2)\|f\|_{L^{p_1,q_1}}\|g\|_{L^{p_2,q_2}},\end{aligned}$$

y a partir de esta estimación uniforme, con la Proposición 1.3.3, página 89, se obtiene el resultado deseado en el caso de funciones simples integrables.

Obtenemos el resultado en el caso general razonando de la misma manera que anteriormente, es decir utilizando el Teorema 1.4.2, página 115, de densidad de las funciones simples integrables en los espacios de Lorentz. ■

Vamos a generalizar ahora este tipo de desigualdades a todos los espacios de Lorentz $L^{p,q}$ con $1 < p < +\infty$ y $1 \leq q < +\infty$.

Teorema 1.4.7 (Desigualdades de Young-O'Neil - (I)) *Sea $(\mathbb{G}, \mathcal{B}or(\mathbb{G}), \mu)$ un grupo topológico localmente compacto, unimodular, dotado de una medida de Haar σ-finita invariante por la izquierda y consideremos $1 < p_1, p_2 < +\infty$ y $1 \leq q_1, q_2 < +\infty$ cuatro índices reales.*

Si $f, g : \mathbb{G} \longrightarrow \mathbb{K}$ son dos funciones tales que $f \in L^{p_1,q_1}(\mathbb{G}, \mathcal{B}or(\mathbb{G}), \mu, \mathbb{K})$ y $g \in L^{p_2,q_2}(\mathbb{G}, \mathcal{B}or(\mathbb{G}), \mu, \mathbb{K})$ y si los índices p, q verifican las condiciones

$$\begin{gathered}\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} > 1 \qquad y \qquad \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1 + \frac{1}{p}, \\ y\ si \quad q \geq 1 \quad es\ tal\ que \quad \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} \geq \frac{1}{q},\end{gathered} \tag{1.85}$$

entonces la función $f * g$, que corresponde con el producto de convolución entre f y g, pertenece al espacio de Lorentz $L^{p,q}(\mathbb{G}, \mathcal{B}or(\mathbb{G}), \mu, \mathbb{K})$ y se tiene la desigualdad

$$\|f * g\|_{L^{p,q}} \leq C(p, p_1, p_2)\|f\|_{L^{p_1,q_1}}\|g\|_{L^{p_2,q_2}}. \tag{1.86}$$

Demostración. Empezamos considerando funciones simples integrables. Escribimos entonces

$$|||f * g|||_{p,q}^q = \int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{1}{p}}(f * g)^{**}(t)\right)^q \frac{dt}{t},$$

y utilizamos la segunda estimación del punto 1) de la Proposición 1.4.1 para obtener

$$|||f * g|||_{p,q}^q = \int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{1}{p}} \int_t^{+\infty} f^{**}(s)g^{**}(s)ds\right)^q \frac{dt}{t}.$$

Haciendo el cambio de variable $t = \frac{1}{\sigma}$ y $s = \frac{1}{\rho}$ tenemos

$$\begin{aligned}|||f * g|||_{p,q}^q &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{\sigma^{\frac{1}{p}}} \int_0^{\sigma} f^{**}\left(\frac{1}{\rho}\right) g^{**}\left(\frac{1}{\rho}\right) \frac{d\rho}{\rho^2}\right)^q \frac{d\sigma}{\sigma} \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{\sigma} f^{**}\left(\frac{1}{\rho}\right) g^{**}\left(\frac{1}{\rho}\right) \frac{d\rho}{\rho^2}\right)^q \frac{d\sigma}{\sigma^{\frac{q}{p}+1}},\end{aligned}$$

de manera que aplicando las desigualdades de Hardy dadas en la Proposición 1.3.5, página 96, con $\alpha = q \geq 1$ y $\beta = \frac{q}{p} > 0$, obtenemos

$$|||f * g|||_{p,q}^q \leq p^q \int_0^{+\infty} \left(f^{**}\left(\frac{1}{s}\right) g^{**}\left(\frac{1}{s}\right)\right)^q \frac{ds}{s^{q+\frac{q}{p}+1}},$$

y con el cambio de variable $s = \frac{1}{y}$ escribimos

$$\begin{aligned}|||f * g|||_{p,q}^q &\leq p^q \int_0^{+\infty} \left(f^{**}(y)g^{**}(y)\right)^q y^{q+\frac{q}{p}} \frac{dy}{y} \\ &\leq p^q \int_0^{+\infty} \left(y^{1+\frac{1}{p}} f^{**}(y)g^{**}(y)\right)^q \frac{dy}{y}.\end{aligned} \tag{1.87}$$

Como tenemos la relación $\frac{q}{q_1}+\frac{q}{q_2}\geq 1$, existen números reales m_1 y m_2 tales que $\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}=1$ que verifican $\frac{1}{m_1}\leq\frac{q}{q_1}$, $\frac{1}{m_2}\leq\frac{q}{q_2}$, de donde se tiene que $q_1\leq qm_1$ y $q_2\leq qm_2$. Obtenemos entonces (recordando que se tiene $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}=1+\frac{1}{p}$)

$$\begin{aligned}
|||f*g|||_{p,q}^q &\leq p^q\int_0^{+\infty}\left(y^{1+\frac{1}{p}}f^{**}(y)g^{**}(y)\right)^q\frac{dy}{y}\\
&\leq p^q\int_0^{+\infty}\left(y^{\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}}f^{**}(y)g^{**}(y)\right)^q\frac{dy}{y^{\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}}}\\
&\leq p^q\int_0^{+\infty}\frac{\left(y^{\frac{1}{p_1}}f^{**}(y)\right)^q}{y^{\frac{1}{m_1}}}\frac{\left(y^{\frac{1}{p_2}}g^{**}(y)\right)^q}{\frac{1}{m_2}}dy,
\end{aligned}$$

y aplicamos la desigualdad de Hölder usual en la última integral anterior para obtener

$$|||f*g|||_{p,q}^q\leq p^q\left(\int_0^{+\infty}\left(y^{\frac{1}{p_1}}f^{**}(y)\right)^{qm_1}\frac{dy}{y}\right)^{\frac{1}{m_1}}\left(\int_0^{+\infty}\left(y^{\frac{1}{p_2}}f^{**}(y)\right)^{qm_2}\frac{dy}{y}\right)^{\frac{1}{m_2}},$$

ahora, con la definición de la funcional $|||\cdot|||_{L^{p,q}}$ tenemos

$$|||f*g|||_{p,q}^q\leq p^q|||f|||_{p_1,qm_1}^q|||g|||_{p_2,qm_2}^q,$$

pero como se tiene $q_1\leq qm_1$ y $q_2\leq qm_2$, por las propiedades de inclusión de los espacios de Lorentz (Teorema 1.2.9, página 75), podemos finalmente escribir

$$|||f*g|||_{p,q}\leq p|||f|||_{p_1,q_1}|||g|||_{p_2,q_2},$$

y una vez que tenemos estas estimaciones, podemos utilizar la equivalencia dada por la expresión (1.111) para obtener

$$\|f*g\|_{L^{p,q}}\leq C(p,p_1,p_2)\|f\|_{L^{p_1,q_1}}\|g\|_{L^{p_2,q_2}},$$

lo que termina la demostración cuando $1\leq q,q_1,q_2<+\infty$ y cuando las funciones consideradas son funciones simples integrables.

Para el caso general basta proceder por densidad tal como se lo ha hecho en la Proposición 1.4.2: se empieza generalizando la desigualdad (1.86) al caso donde $f\in L^{p_1,q_1}$ y g es una función simple integrable, lo que permite extender en este caso la segunda desigualdad del punto 1) de la Proposición 1.4.1 para luego considerar el caso $g\in L^{p_2,q_2}$. ■

C) Desigualdades de Young-O'Neil en $L^{p,q}$ con $q=+\infty$

En todos los resultados anteriores hemos estudiado el producto de convolución de funciones que pertenecen a los espacios de Lorentz $L^{p,q}$ tal que $1<p<+\infty$ y $1\leq q<+\infty$ y el método de demostración se basaba en un argumento de densidad de las funciones simples integrables en estos espacios de funciones. Lastimosamente, no es posible aplicar estos argumentos a los espacios $L^{p,\infty}$ pues por el Teorema 1.4.5, las funciones simples integrables no son densas en este caso.

Para poder tratar el caso cuando $q = +\infty$ necesitaremos razonar de otra manera y nos inspiraremos en el Teorema 1.1.4, página 28, que permite descomponer las funciones que pertenecen a los espacios de Lorentz $L^{p,\infty}$ como la suma de funciones que pertenecen a espacios de Lebesgue. En este sentido tenemos el siguiente lema.

Lema 1.4.1 *Sea $(\mathbb{G}, \mathcal{B}or(\mathbb{G}), \mu)$ un grupo topológico localmente compacto, unimodular, dotado de una medida de Haar σ-finita invariante por la izquierda y sea $f \in L^{p,\infty}(\mathbb{G}, \mathcal{B}or(\mathbb{G}), \mu, \mathbb{K})$ con $1 < p < +\infty$. Para un parámetro $0 < \lambda < +\infty$, definimos la función f^λ por medio de la expresión*

$$f^\lambda(x) = \begin{cases} f(x) & si\ |f(x)| > \lambda, \\ 0 & sino, \end{cases}$$

y definimos la función f_λ por la relación $f_\lambda(x) = f(x) - f^\lambda(x)$.

Tenemos la descomposición $f = f^\lambda + f_\lambda$ y si $1 \leq p_0 < p < p_1 < +\infty$ entonces

1) la función f^λ pertenece al espacio $f \in L^{p_0}(\mathbb{G}, \mathcal{B}or(\mathbb{G}), \mu, \mathbb{K})$,

2) la función f_λ pertenece al espacio $f \in L^{p_1}(\mathbb{G}, \mathcal{B}or(\mathbb{G}), \mu, \mathbb{K})$.

Prueba. La verificación de estos hechos siguen exactamente las mismas líneas expuestas para obtener las estimaciones (1.17) y (1.18) de la página 29. ■

Notemos que si definimos el conjunto $A_\lambda = \{x \in X : |f(x)| > \lambda\}$, entonces se tiene $f^\lambda = f\mathbb{1}_{A_\lambda}$ y $f_\lambda = f\mathbb{1}_{A_\lambda^c}$, de donde se deduce $|f^\lambda| \leq |f|$, $|f_\lambda| \leq |f|$, $(f^\lambda)^* \leq f^*$, $(f_\lambda)^* \leq f^*$ y $(f^\lambda)^{**} \leq f^{**}$, $(f_\lambda)^{**} \leq f^{**}$.

Con esta descomposición, definimos el producto de convolución entre una función $f \in L^{p,\infty}(\mathbb{G}, \mathcal{B}or(\mathbb{G}), \mu, \mathbb{K})$ con $1 < p < +\infty$ y una función simple integrable g por medio de la expresión

$$f * g = f_0 * g + f_1 * g, \tag{1.88}$$

en donde se tiene $f = f_0 + f_1$ y además $f_0 \in L^{p_0}(\mathbb{G}, \mathcal{B}or(\mathbb{G}), \mu, \mathbb{K})$ y $f_1 \in L^{p_1}(\mathbb{G}, \mathcal{B}or(\mathbb{G}), \mu, \mathbb{K})$, con $1 < p_0 < p < p_1 < +\infty$: dado que cada término está correctamente definido (ya sea por las desigualdades de Young clásicas o por los resultados de la sección anterior), de esta manera podemos extender el producto de convolución $f * g$ en donde g es una función simple integrable y f pertenece al espacio de Lorentz $L^{p,\infty}$ con $1 < p < +\infty$.

Observemos que por el Lema 1.4.1, siempre existen funciones que permiten obtener esta descomposición y por el Teorema 1.1.4 este tipo de descomposición permite caracterizar a las funciones que pertenecen a los espacios de Lorentz $L^{p,\infty}$ con $1 < p < +\infty$.

Con esta pequeña introducción, tenemos la siguiente generalización de la Proposición 1.4.1.

Proposición 1.4.4 *Sea $(\mathbb{G}, \mathcal{B}or(\mathbb{G}), \mu)$ un grupo topológico localmente compacto, unimodular, dotado de una medida de Haar σ-finita invariante por la izquierda. Si $f \in L^{p,\infty}(\mathbb{G}, \mathcal{B}or(\mathbb{G}), \mu, \mathbb{K})$ con $1 < p < +\infty$ y si g es una función simple integrable entonces para todo $t > 0$ tenemos*

1) $f * g(t) \leq C \left(t f^{**}(t) g^{**}(t) + \int_t^{+\infty} f^*(s) g^*(s) ds \right)$,

2) $f * g(t) \leq C \int_t^{+\infty} f^{**}(s) g^{**}(s) ds$.

Prueba.

1) Fijemos $0 < \lambda < +\infty$. Utilizando el Lema 1.4.1, empezamos descomponiendo la función f como la suma $f = f^\lambda + f_\lambda$ y por la subaditividad de la función maximal podemos escribir

$$(f * g)^{**}(t) \leq (f^\lambda * g)^{**}(t) + (f_\lambda * g)^{**}(t),$$

y aplicamos en cada una de estas dos partes el resultado de la Proposición 1.4.1 para obtener

$$\begin{aligned} (f * g)^{**}(t) \quad &\leq \quad C \left(t (f^\lambda)^{**}(t) g^{**}(t) + \int_t^{+\infty} (f^\lambda)^*(s) g^*(s) ds \right) \\ &\quad\quad + C \left(t (f_\lambda)^{**}(t) g^{**}(t) + \int_t^{+\infty} (f_\lambda)^*(s) g^*(s) ds \right) \end{aligned}$$

dado que se tiene $(f^\lambda)^{**}(t) \leq f^{**}(t)$ y $(f_\lambda)^{**}(t) \leq f^{**}(t)$ podemos escribir

$$(f * g)^{**}(t) \leq C \left(t f^{**}(t) g^{**}(t) + \int_t^{+\infty} f^*(s) g^*(s) ds \right).$$

2) El segundo punto sigue las mismas etapas: descomposición de la función $f \in L^{p,\infty}$ y aplicación de la Proposición 1.4.1 a cada término de esta descomposición. ■

Una vez que tenemos todos estos resultados podemos enunciar el siguiente teorema que es la contra parte del Teorema 1.4.7 cuando los segundos índices que determinan los espacios de Lorentz pueden tomar el valor $+\infty$ y de esta forma completamos el Teorema 1.1.5 presentado en la página 32.

Teorema 1.4.8 (Desigualdades de Young-O'Neil -(II)) *Sea $(\mathbb{G}, \mathcal{B}or(\mathbb{G}), \mu)$ un grupo topológico localmente compacto, unimodular, dotado de una medida de Haar σ-finita invariante por la izquierda y consideremos $1 < p_1, p_2 < +\infty$ y $1 \leq q_1, q_2 \leq +\infty$ cuatro índices reales.*

Sean $f, g : \mathbb{G} \longrightarrow \mathbb{K}$ dos funciones tales que $f \in L^{p_1,q_1}(\mathbb{G}, \mathcal{B}or(\mathbb{G}), \mu, \mathbb{K})$ y $g \in L^{p_2,q_2}(\mathbb{G}, \mathcal{B}or(\mathbb{G}), \mu, \mathbb{K})$.

1) Si $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} > 1$ y $q_1 = +\infty$, $1 \leq q_2 < +\infty$, y si los parámetros p, q verifican $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1 + \frac{1}{p}$ y $1 \leq q_2 \leq q$, entonces el producto de convolución $f * g$ está bien definido y pertenece al espacio $L^{p,q}(\mathbb{G}, \mathcal{B}or(\mathbb{G}), \mu, \mathbb{K})$ y se tiene

$$\|f * g\|_{L^{p,q}} \leq C(p, p_1, p_2) \|f\|_{L^{p_1,\infty}} \|g\|_{L^{p_2,q_2}}.$$

2) Si $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}>1$ *y* $1\leq q_1<+\infty$, $q_2=+\infty$, *y si los parámetros* p,q *verifican* $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}=1+\frac{1}{p}$ *y* $1\leq q_1\leq q$, *entonces el producto de convolución* $f*g$ *está bien definido, pertenece al espacio* $L^{p,q}(\mathbb{G},\mathcal{B}or(\mathbb{G}),\mu,\mathbb{K})$ *y además*

$$\|f*g\|_{L^{p,q}}\leq C(p,p_1,p_2)\|f\|_{L^{p_1,q_1}}\|g\|_{L^{p_2,\infty}}$$

3) Si ahora $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}>1$ *y* $q_1=q_2=+\infty$ *y si los parámetros* p,q *verifican* $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}=1+\frac{1}{p}$ *y* $q=+\infty$, *entonces el producto de convolución* $f*g$ *está bien definido, pertenece al espacio* $L^{p,\infty}(\mathbb{G},\mathcal{B}or(\mathbb{G}),\mu,\mathbb{K})$ *y tenemos la desigualdad*

$$\|f*g\|_{L^{p,\infty}}\leq C(p,p_1,p_2)\|f\|_{L^{p_1,\infty}}\|g\|_{L^{p_2,\infty}}.$$

Observación 1.14 Nótese que en el teorema anterior, se exige las condiciones $1<p_1,p_2<+\infty$ para los índices que caracterizan los espacios de Lorentz presentes en la parte derecha de estas desigualdades. Si se desea estudiar el caso en donde uno de estos dos índices es igual a 1, es necesario aplicar el Teorema 1.1.5, página 32.

Demostración.

1) Por las inclusiones entre espacios de Lorentz, tenemos la mayoración $\|f*g\|_{L^{p,q}}\leq C\|f*g\|_{L^{p,q_2}}$, de manera que podemos suponer sin pérdida de generalidad $q=q_2$. De esta manera, utilizando las desigualdades de la Proposición 1.4.4 y retomando los cáculos anteriores tenemos como punto de partida la desigualdad (1.87), es decir:

$$|||f*g|||_{p,q_2}^{q_2}\leq p^{q_2}\int_0^{+\infty}\left(t^{1+\frac{1}{p}}f^{**}(t)g^{**}(t)\right)^{q_2}\frac{dt}{t},$$

de donde se obtienen las mayoraciones siguientes

$$\begin{aligned} |||f*g|||_{p,q_2}^{q_2} &\leq p^{q_2}\sup_{t>0}\left\{t^{\frac{1}{p_1}}f^{**}(t)\right\}^{q_2}\int_0^{+\infty}\left(t^{\frac{1}{p_2}}g^{**}(t)\right)^{q_2}\frac{dt}{t}\\ &\leq p^{q_2}|||f|||_{p_1,\infty}^{q_2}|||g|||_{p_2,q_2}^{q_2}, \end{aligned}$$

a partir de las cuales se deduce el resultado deseado, es decir

$$\|f*g\|_{L^{p,q}}\leq C(p,p_1,p_2)\|f\|_{L^{p_1,\infty}}\|g\|_{L^{p_2,q_2}}.$$

2) Notemos que por simetría en los argumentos utilizados, se tiene también el caso $q_2=+\infty$ y $1\leq q_1<+\infty$.

3) Estudiemos el caso $q_1=q_2=q=+\infty$. Por el segundo punto de la Proposición 1.4.4 podemos escribir

$$\begin{aligned} t^{\frac{1}{p}}(f*g)^{**}(t) &\leq Ct^{\frac{1}{p}}\int_t^{+\infty}f^{**}(s)g^{**}(s)\big)ds\\ &\leq Ct^{\frac{1}{p}}\int_t^{+\infty}s^{-\frac{1}{p_1}}s^{-\frac{1}{p_2}}\left(s^{\frac{1}{p_1}}f^{**}(s)\right)\left(s^{\frac{1}{p_2}}g^{**}(s)\right)ds\\ &\leq C\left(\sup_{s>0}s^{\frac{1}{p_1}}f^{**}(s)\right)\left(\sup_{s>0}s^{\frac{1}{p_2}}g^{**}(s)\right)t^{\frac{1}{p}}\int_t^{+\infty}s^{-\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}}ds, \end{aligned}$$

y ahora utilizando la identidad $-\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} = -1 - \frac{1}{p}$, tenemos después de evaluar la integral anterior

$$t^{\frac{1}{p}}(f * g)^{**}(t) \leq C|||f|||_{p_1,\infty}|||g|||_{p_2,\infty},$$

de donde se obtiene el resultado deseado, es decir:

$$\|f * g\|_{L^{p,\infty}} \leq C\|f\|_{L^{p_1,\infty}}\|g\|_{L^{p_2,\infty}}.$$

■

D) Casos donde el producto de convolución está mal definido.

En las secciones anteriores hemos enunciado una serie de resultados que estudian el producto de convolución $f*g$ en diferentes situaciones, pero hay algunos casos que no están cubiertos y que corresponden a situaciones en donde el producto de convolución está *mal definido.*

Algunas de estas situaciones ya fueron mostradas en la página 34, pero es necesario hacer un estudio más sistemático y mostraremos en el siguiente resultado ejemplos concretos en donde no se puede considerar el producto de convolución entre funciones que pertenecen a espacios de Lorentz generales.

Para mayor simplicidad de la exposición consideraremos como marco de trabajo el espacio $\mathbb{R}$ pues estos ejemplos pueden generalizarse sin problema a $\mathbb{R}^n$.

Teorema 1.4.9 *Sea $\mathbb{R}$ dotado de su estructura natural de espacio medido. Sean $1 < p_1, p_2 < +\infty$ y $1 \leq q_1, q_2 \leq +\infty$ cuatro índices. Si se tienen los casos siguientes*

1) $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} < 1$, *o*

2) $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1$ *y* $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} < 1$,

entonces existen funciones $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $f \in L^{p_1,q_1}(\mathbb{R}, \mathcal{B}or(\mathbb{R}), dx, \mathbb{R})$ y $g \in L^{p_2,q_2}(\mathbb{R}, \mathcal{B}or(\mathbb{R}), dx, \mathbb{R})$, pero tales que el producto de convolución $f * g$ está mal definido, es decir que se tiene $f * g(x) = +\infty$ para casi todo $x \in \mathbb{R}$.

Demostración.

1) Si $1 < p_1, p_2 < +\infty$ son tales que $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} < 1$, definimos el parámetro $\alpha > 1$ tal que se tenga $\alpha\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}\right) = 1$ y consideremos las funciones

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq 1, \\ |x|^{-\frac{\alpha}{p_1}} & \text{si } |x| > 1, \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq 1, \\ |x|^{-\frac{\alpha}{p_2}} & \text{si } |x| > 1. \end{cases}$$

Un cálculo directo muestra sin problema que se tiene $\|f\|_{L^{p_1,q_1}} < +\infty$ y $\|f\|_{L^{p_2,q_2}} < +\infty$ para todo $1 \leq q_1, q_2 \leq +\infty$.

Por simetría podemos suponer sin pérdida de generalidad que $x \geq 0$ y se tiene entonces

$$\begin{aligned} f * g(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy \geq \int_{1+x}^{+\infty} |x-y|^{-\frac{\alpha}{p_1}} |y|^{-\frac{\alpha}{p_2}} dy \\ &\geq \int_{1+x}^{+\infty} y^{-1} dy = +\infty. \end{aligned}$$

2) Ahora tenemos $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1$ y $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} < 1$. Para mostrar que el producto de convolución está mal definido tendremos que utilizar las funciones definidas con la expresión (1.60) página 77. En efecto, fijemos dos parámetros α, β por las condiciones $0 < \alpha < q_1$, $0 < \beta < q_2$ y $0 < \frac{1}{q_1 - \alpha} + \frac{1}{q_2 - \beta} < 1$, y consideremos sobre el intervalo $]0, 1[$ las funciones

$$f(x) = \frac{1}{x^{\frac{1}{p_1}} |\ln(x)|^{\frac{1}{q_1 - \alpha}}} \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{1}{x^{\frac{1}{p_2}} |\ln(x)|^{\frac{1}{q_2 - \beta}}}.$$

Por los cálculos realizados en la página 77, tenemos que $f \in L^{p_1, q_1}$ y $g \in L^{p_2, q_2}$, pero se tiene

$$\begin{aligned} f * g(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy \\ &\geq \int_{1+x}^{+\infty} |x-y|^{-\frac{1}{p_1}} |y|^{-\frac{1}{p_2}} |\ln(x-y)|^{-\frac{1}{q_1-\alpha}} |\ln(y)|^{-\frac{1}{q_2-\beta}} dy \\ &\geq \int_{1+x}^{+\infty} |y|^{-1} |\ln(y)|^{-\frac{1}{q_1-\alpha} + \frac{1}{q_2-\beta}} dy = +\infty. \end{aligned}$$

■

E) Una aplicación: las desigualdades de Hardy-Littlewood-Sobolev.

Las desigualdades de Sobolev son una herramienta muy poderosa en el análisis de las ecuaciones en derivadas parciales pues permiten controlar el tamaño de una función (medido en términos de espacios de Lebesgue) por medio del tamaño de las derivadas de la misma función.

Existen muchas demostraciones de estas desigualdades y en esta sección vamos a presentar unas desigualdades *equivalentes*, llamadas las desigualdades de Hardy-Littlewood-Sobolev, en donde los espacios de Lorentz juegan un papel interesante. En toda esta sección consideramos el espacio $\mathbb{R}^n$ dotado de su estructura natural.

Para enunciar el resultado principal necesitamos una definición.

Definición 1.4.1 (Potencial de Riesz) *Sea $\alpha > 0$ un real. Para una función medible suficientemente regular $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$ definimos el* potencial de Riesz de orden α *como el operador I_α dado por la expresión*

$$I_\alpha(f)(x) = C(n, \alpha) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x-y)}{|y|^{n-\alpha}} dy, \tag{1.89}$$

en donde $C(n,\alpha) > 0$ es una constante de normalización.

Explicaremos un poco más adelante el rol jugado por esta constante. Notemos que la definición anterior es en realidad muy ambigua y es necesario precisar lo que se entiende por "suficientemente regular" y en ese sentido tenemos el resultado a continuación.

Teorema 1.4.10 (Desigualdades de Hardy-Littlewood-Sobolev) *Sea n la dimensión del espacio $\mathbb{R}^n$ y sea $0 < \alpha < \frac{n}{p}$ un real. Si $1 \leq p < q < +\infty$ son dos índices reales que verifican la relación*

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n}, \tag{1.90}$$

entonces

1) Si $1 < p < q < +\infty$, existe una constante universal $C(n,\alpha,p,q) > 0$ tal que para toda función $f \in L^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{R})$ se tiene la desigualdad

$$\|I_\alpha(f)\|_{L^{q,p}} \leq C(n,\alpha,p,q)\|f\|_{L^p}. \tag{1.91}$$

2) Si $p = 1$ y $1 < q < +\infty$, existe una constante universal $C(n,\alpha,q) > 0$ tal que para toda función $f \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{R})$ se tiene la mayoración

$$\|I_\alpha(f)\|_{L^{q,\infty}} \leq C(n,\alpha,q)\|f\|_{L^1}. \tag{1.92}$$

Como vemos con este teorema, tenemos que el potencial de Riesz de orden α está *bien definido* (en el sentido de la norma L^q) cuando la función a la cual se lo aplica es suficientemente regular, es decir que pertenece a un espacio de Lebesgue L^p.

Antes de pasar a la demostración, es importante indicar el rol de la relación (1.90) entre los índices p, q y α (por simplicidad nos concentramos en el primer punto del teorema). En efecto si aplicamos el potencial de Riesz I_α a la función $f_\lambda(x) = f(\lambda x)$ con $\lambda > 0$ en donde $f \in L^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{R})$, con un cambio de variable obtenemos la identidad

$$\begin{aligned} I_\alpha(f_\lambda)(x) &= C(n,\alpha)\int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(\lambda x - \lambda y)}{|y|^{n-\alpha}}dy = \lambda^{-\alpha}C(n,\alpha)\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(\lambda x - z)}{|z|^{n-\alpha}}dz \\ &= \lambda^{-\alpha}I_\alpha(f)(\lambda x), \end{aligned}$$

y junto con las propiedades de homogeneidad de los espacios de Lebesgue (ver también la Proposición 1.2.3, página 43) tenemos por un lado la identidad $\|I_\alpha(f_\lambda)\|_{L^{q,p}} = \lambda^{-\alpha-\frac{n}{q}}\|I_\alpha(f)\|_{L^{q,p}}$ y por otro lado $\|f_\lambda\|_{L^p} = \lambda^{-\frac{n}{p}}\|f\|_{L^p}$, de manera que reemplazando estas expresiones en las desigualdades de Hardy-Littlewood-Sobolev tenemos:

$$\lambda^{-\alpha-\frac{n}{q}}\|I_\alpha(f)\|_{L^{q,p}} \leq \lambda^{-\frac{n}{p}}C(n,\alpha,q)\|f\|_{L^p}.$$

Si se tiene $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} > \frac{\alpha}{n}$, entonces reescribimos la estimación anterior como

$$\lambda^{\frac{n}{p}-\frac{n}{q}-\alpha}\|I_\alpha(f)\|_{L^{q,p}} \leq C(n,\alpha,q)\|f\|_{L^p},$$

y al hacer tender $\lambda \to +\infty$ obtenemos entonces que $\|f\|_{L^p} = +\infty$, contradiciendo el hecho $f \in L^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{R})$. Si se tiene en cambio $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} < \frac{\alpha}{n}$, hacemos tender $\lambda \to 0$ en la expresión anterior para obtener el mismo tipo de contradicción.

Gracias a este simple argumento de *homogeneidad*, vemos que es indispensable tener la relación (1.90) entre los índices p, q y α si se desea obtener las desigualdades buscadas.

Demostración. Para empezar observemos que el potencial de Riesz I_α se escribe como un producto de convolución

$$I_\alpha(f) = K_\alpha * f,$$

en donde el núcleo[26] de convolución está dado por la función $K_\alpha = \frac{1}{|x|^{n-\alpha}}$.

En este punto recordamos que las funciones de tipo $\frac{1}{|x|^{n-\alpha}}$ pertenecen a los espacios de Lorentz $L^{r,\infty}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{R})$ cuando $r = \frac{n}{n-\alpha}$ (ver la Observación 1.2, página 12). Tenemos entonces:

1) Si $1 < p < q < +\infty$, utilizando las desigualdades de Young-O'Neil dadas en el primer punto del Teorema 1.4.8, podemos escribir

$$\|I_\alpha(f)\|_{L^{q,p}} = \|K_\alpha * f\|_{L^{q,p}} \leq \|K_\alpha\|_{L^{r,\infty}} \|f\|_{L^{p,p}},$$

en donde los índices q, r y p deben verificar $\frac{1}{r} + \frac{1}{p} = 1 + \frac{1}{q}$, de esta manera si $r = \frac{n}{n-\alpha}$, se tiene por un lado $\|K_\alpha\|_{L^{r,\infty}} \leq C(n, \alpha, p, q)$ y por otro se tiene la relación (1.90), y obtenemos de esta manera la desigualdad buscada.

2) En el caso $p = 1$ no podemos aplicar el Teorema 1.4.8 (ver la Observación 1.14), de manera que vamos a utilizar el Teorema 1.1.5, página 32. En efecto, si $1 < q < +\infty$ y por los mismos argumentos anteriores podemos escribir

$$\|I_\alpha(f)\|_{L^{q,\infty}} = \|K_\alpha * f\|_{L^{q,\infty}} \leq C\|K_\alpha\|_{L^{r,\infty}} \|f\|_{L^1},$$

en donde esta vez los índices q, r verifican $1 < q, r < +\infty$ y $1 + \frac{1}{r} = 1 + \frac{1}{q}$. Pero como $r = \frac{n}{n-\alpha}$, se tiene $\|K_\alpha\|_{L^{r,\infty}} \leq C(n, \alpha, q)$ y $1 - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n}$, de donde se deduce la mayoración deseada. ■

Tendremos la oportunidad de exponer varias demostraciones de este teorema en donde diferentes herramientas serán utilizadas. Una ventaja de la demostración anterior es que es muy *directa* pues se basa únicamente en desigualdades de convolución.

Observación 1.15 Dado que el potencial de Riesz I_α es un operador definido por una convolución, se tiene inmediatamente que es un operador lineal, es

[26] Ver también la Sección 4.5.1 del Volumen 2.

decir $I_\alpha(f+g) = I_\alpha(f) + I_\alpha(g)$. Entonces, bajo la relación (1.90) entre los índices p, q y α, con las desigualdades (1.91) y (1.92), se obtiene que

$$I_\alpha : L^p \longmapsto L^{q,p},$$

es un operador lineal continuo de L^p en $L^{q,p}$ y que

$$I_\alpha : L^1 \longmapsto L^{q,\infty},$$

es un operador lineal continuo de L^1 en $L^{q,\infty}$. En los capítulos siguientes veremos algunas consecuencias y aplicaciones de estos hechos.

Expliquemos ahora muy rápidamente el rol de la constante de normalización que aparece en la fórmula (1.89). Esta constante está relacionada con la transformada de Fourier y se puede demostrar que se tiene la identidad

$$\widehat{I_\alpha(f)}(\xi) = |\xi|^{-\alpha}\widehat{f}(\xi), \tag{1.93}$$

y la constante $C(n,\alpha)$ está calibrada para obtener esta igualdad al nivel de la variable de Fourier.

* * *

En las líneas que siguen vamos a hacer una pequeña digresión y explicar cómo se relacionan las desigualdades de Hardy-Littlewood-Sobolev con las desigualdades de Sobolev usuales. Consideraremos únicamente el caso $1 < p < +\infty$.

Recordemos que si $\Delta = \sum\limits_{j=1}^{n} \partial^2_{x_j}$ es el operador Laplaciano, entonces para una función $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$ suficientemente regular se tiene la identidad al nivel de la variable de Fourier $\widehat{\Delta f}(\xi) = -|\xi|^2\widehat{f}(\xi)$, que reescribimos de la siguiente manera

$$\widehat{(-\Delta)}f(\xi) = |\xi|^2\widehat{f}(\xi).$$

Vemos entonces que las dos derivadas que provienen del operador Laplaciano $(-\Delta)$ se transforman al nivel de Fourier en la multiplicación por el peso $|\xi|^2$. Ahora, para $\alpha > 0$, podemos definir (al menos formalmente) la *potencia fraccionaria* α-ésima $(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}$ del operador Laplaciano por medio de la expresión

$$\widehat{(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}}f(\xi) = |\xi|^{\alpha}\widehat{f}(\xi),$$

y simétricamente podemos considerar expresiones del tipo

$$\widehat{(-\Delta)^{-\frac{\alpha}{2}}}f(\xi) = |\xi|^{-\alpha}\widehat{f}(\xi).$$

De esta manera, como se tiene la expresión (1.93), tenemos que el potencial de Riesz de orden α se puede reescribir de la forma $I_\alpha = (-\Delta)^{-\frac{\alpha}{2}}$. Nótese además que estas dos fórmulas anteriores son muy intuitivas y en particular nos permiten escribir la identidad

$$I_\alpha\big((-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}f\big) = (-\Delta)^{-\frac{\alpha}{2}}(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}f = f. \tag{1.94}$$

Con estos preliminares, podemos regresar a las desigualdades de Hardy-Littlewood-Sobolev (1.91) y si las aplicamos a una función $f = (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}\varphi$ tenemos por un lado

$$\|I_\alpha(f)\|_{L^{q,p}} = \|I_\alpha\big((-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}\varphi\big)\|_{L^{q,p}} \leq C\|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}\varphi\|_{L^p},$$

con $1 < p < q < +\infty$, $0 < \alpha < n$ y $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n}$.

Por otro lado, por las fórmulas anteriores tenemos

$$\|I_\alpha(f)\|_{L^{q,p}} = \|(-\Delta)^{-\frac{\alpha}{2}}(f)\|_{L^{q,p}} = \|(-\Delta)^{-\frac{\alpha}{2}}(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}\varphi\|_{L^{q,p}} = \|\varphi\|_{L^{q,p}},$$

de donde se deducen entonces las desigualdades de Sobolev

Teorema 1.4.11 (Desigualdades de Sobolev en espacios de Lorentz) *Sean $1 < p < q < +\infty$, $0 < \alpha < \frac{n}{p}$ tres reales relacionados por la condición $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n}$. Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función suficientemente regular tal que $(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} f \in L^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{R})$, entonces tenemos la desigualdad*

$$\|f\|_{L^{q,p}} \leq C\|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} f\|_{L^p}. \tag{1.95}$$

Observación 1.16 Dado que $1 < p < q < +\infty$, se tiene por el Teorema 1.2.9, página 75, la inclusión de espacios $L^{q,p} \subset L^{q,q}$, lo que nos permite obtener las desigualdades de Sobolev clásicas, es decir en donde únicamente intervienen espacios de Lebesgue:

$$\|f\|_{L^q} \leq C\|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} f\|_{L^p}. \tag{1.96}$$

Insistamos en que los cálculos y las identidades entre las expresiones (1.93) y (1.94) que nos han llevado a las desigualdades de Sobolev a partir de las desigualdades de Hardy-Littlewood-Sobolev son puramente *formales* y para volverlos rigurosos es necesario desarrollar un poco más de teoría (esencialmente relacionada con la transformada de Fourier) que por falta de espacio no puede ser expuesta en estas páginas. Rogamos al lector consultar los libros [14] y [27] para el valor exacto de la constante $C(n, \alpha)$ que aparece en la fórmula (1.89) así como para mayores detalles sobre las desigualdades de Sobolev.

Veamos ahora un ejemplo de aplicación de todos estos resultados.

Teorema 1.4.12 (Desigualdades de Hardy) *Sean $1 < p < +\infty$ y $0 < \alpha < \frac{n}{p}$ dos reales. Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función suficientemente regular tal que $(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} f \in L^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{R})$, entonces tenemos la desigualdad*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|^p}{|x|^{\alpha p}} dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} f\|_{L^p}.$$

Demostración. Empecemos aplicando las desigualdades de Hölder dadas en el Teorema 1.4.1, página 113, con $a = \frac{n}{\alpha p} > 1$ y $b = \frac{n}{n-\alpha p} > 1$ (que verifican $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$), tenemos entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|^p}{|x|^{\alpha p}} dx \leq C \left\| \frac{1}{|x|^{\alpha p}} \right\|_{L^{a,\infty}} \||f|^p\|_{L^{b,1}}.$$

Por la Observación 1.2, página 12, tenemos que la función $\frac{1}{|x|^{\alpha p}}$ pertenece al espacio $L^{a,\infty}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{R})$ y por la Proposición 1.2.11, página 71, tenemos la identidad $\||f|^p\|_{L^{b,1}} = \|f\|^p_{L^{pb,p}}$, lo que nos permite escribir (remplazando b por el valor $\frac{n}{n-\alpha p}$)

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|^p}{|x|^{\alpha p}} dx \leq C\|f\|^p_{L^{\frac{np}{n-\alpha p},p}}.$$

En este punto, por las relaciones entre los índices α, p y n podemos aplicar las desigualdades de Sobolev en los espacios de Lorentz (1.95) para obtener

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|^p}{|x|^{\alpha p}} dx \leq C\|f\|^p_{L^{\frac{np}{n-\alpha p},p}} \leq C\|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} f\|^p_{L^p},$$

basta entonces extraer la raíz p-ésima de esta estimación anterior para obtener el resultado deseado. ■

Observación 1.17 Es importante notar que la demostración que acabamos de presentar para obtener las desigualdades de Hardy se basa en las desigualdades de Sobolev en los espacios de Lorentz (1.95) y que las desigualdades de Sobolev clásicas (1.96) que hacen intervenir únicamente espacios de Lebesgue no son suficientes para concluir: esto muestra la utilidad de pasar por los espacios de Lorentz.

1.5. Dualidad en los espacios de Lorentz $L^{p,q}$

En las secciones anteriores hemos estudiado principalmente las propiedades estructurales de los espacios de Lorentz $L^{p,q}$ con $0 < p < +\infty$ y $0 < q \leq +\infty$ y hemos obtenido que todos estos espacios son espacios métricos completos (ver la Observación 1.12, página 102). Sin embargo, el hecho de disponer de una estructura de espacio métrico completo no es suficiente para estudiar en detalle todas las características de estos espacios de funciones y, en ciertos casos, disponemos de más estructura pues por el Teorema 1.3.4 de la página 102, cuando se tienen las condiciones $1 < p < +\infty$ y $1 \leq q \leq +\infty$ o $p = q = 1$ y $p = q = +\infty$, sabemos que los espacios de Lorentz $L^{p,q}$ son espacios de Banach.

Estas dos estructuras que acabamos de mencionar (la de espacio métrico completo y de espacio de Banach) proporcionan a los espacios de Lorentz de una topología inicial o *fuerte*. Pero considerando todos los resultados expuestos en el primer capítulo del Volumen 2, sabemos que al estudiar el conjunto de formas lineales (es decir el espacio dual) podemos obtener una *segunda* estructura topológica (la topología débil) y en caso de disponer de un espacio predual, se tiene una *tercera* estructura topológica (la topología débil-$*$).

El hecho de disponer de todas estas estructuras topológicas es absolutamente fundamental en muchísimas aplicaciones y para poder estudiar estas topologías seguiremos las etapas descritas al final del primer capítulo del Volumen 2, a saber: establecer una aplicación bilineal entre los espacios que se desea estudiar, verificar su continuidad fuerte, comprobar que se tiene un isomorfismo y, finalmente, obtener la sobreyectividad de este isomorfismo. De esta manera obtendremos la correspondencia buscada entre los espacios de Lorentz y sus espacios duales.

En todo lo que sigue trabajaremos sobre un espacio medido $(X, \mathscr{A}, \mu)$ que es σ-finito y cuya medida es no atómica y para mayor claridad en la exposición dividimos nuestra presentación en función de los valores de los parámetros que caracterizan los espacios de Lorentz.

Notación: Si E es un espacio funcional, denotamos por $(E', \|\cdot\|_{E'})$ el espacio de Banach conformado por todas las formas lineales continuas definidas sobre E. Si $(F, \|\cdot\|_F)$ es otro espacio de Banach, notaremos

$$E' \simeq F$$

para indicar que estos espacios son equivalentes y que se tiene un *isomorfismo isométrico* entre ellos, es decir $\|\cdot\|_{E'} = \|\cdot\|_F$. Por otro lado, si existen constantes positivas C_1, C_2 tales que $C_1\|\cdot\|_F \leq \|\cdot\|_{E'} \leq C_2\|\cdot\|_F$, notaremos

$$E' \sim F$$

para indicar que estos espacios son equivalentes y que se tiene un *isomorfismo* (no necesariamente isométrico) entre ellos.

Recordemos finalmente que al trabajar con funciones que pertenecen a los espacios de Lorentz, tenemos que razonar *en μ-casi todas partes*, y de esta manera debemos tener en mente que estamos considerando *clases* de funciones.

1.5.1. Caso cuando $0 < p < 1$ y $0 < q \leq +\infty$.

En el Volumen 2 estudiamos únicamente la dualidad de los espacios de Lebesgue L^p cuando $1 \leq p \leq +\infty$ y ahora vamos a completar este estudio considerando los espacios de Lorentz $L^{p,q}$ cuando $0 < p < 1$ pues sabemos que cuando $p = q$ se tiene la identificación de espacios $L^{p,p} = L^p$.

Teorema 1.5.1 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido σ-finito y no atómico. Si los índices p, q que determinan los espacios de Lorentz $L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ verifican $0 < p < 1$ y $0 < q \leq +\infty$, entonces el espacio dual correspondiente está reducido al elemento nulo. Dicho de otra manera se tiene*

$$(L^{p,q})' = \{0\}.$$

Demostración. Sobre el espacio $(X, \mathscr{A}, \mu)$ consideremos $f(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbb{1}_{A_j}(x)$ una función simple integrable en donde los conjuntos $(A_j)_{1\leq j\leq n}$ son disjuntos. Dado que el espacio medido es no atómico, podemos descomponer cada conjunto $(A_j)_{1\leq j\leq n}$ como la unión de N conjuntos disjuntos $(A_{j,k})_{1\leq k\leq N}$ cada uno de medida $\frac{1}{N}\mu(A_j)$ y definimos entonces las funciones $f_k(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbb{1}_{A_{j,k}}(x)$, nótese aquí que se tiene $f = \sum_{k=1}^{N} f_k$. Calculemos ahora la cantidad $\|f_k\|_{L^{p,q}}$. Dado que todos los conjuntos $A_{j,k}$ son disjuntos podemos escribir

$$\|f_k\|_{L^{p,q}} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \|\mathbb{1}_{A_{j,k}}\|_{L^{p,q}},$$

y utilizando la fórmula (1.28) de la página 38 así como la definición de los conjuntos $(A_{j,k})_{1\leq k\leq N}$ tenemos

$$\begin{aligned}\|f_k\|_{L^{p,q}} &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{q}} \mu(A_{j,k})^{\frac{1}{p}} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{N}\mu(A_j)\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{q}} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(A_j)^{\frac{1}{p}} = N^{\frac{-1}{p}} \|f\|_{L^{p,q}}.\end{aligned}$$

Supongamos ahora que T es una forma lineal continua definida sobre el espacio $L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ y si evaluamos T en la función f anterior obtenemos

$$|T(f)| \leq \sum_{k=1}^{N} |T(f_k)| \leq \|T\|_{(L^{p,q})'} \sum_{k=1}^{N} \|f_k\|_{L^{p,q}} \leq \|T\|_{(L^{p,q})'} N^{1-\frac{1}{p}} \|f\|_{L^{p,q}},$$

si hacemos ahora tender $N \to +\infty$, como $0 < p < 1$, se tiene que la parte de la derecha de la estimación anterior tiende a 0, de donde se deduce que $T = 0$. De esta manera vemos que el conjunto de formas lineales definidas sobre el espacio de Lorentz $L^{p,q}$ cuando $0 < p < 1$ y $0 < q \leq +\infty$ está reducido al elemento 0, lo que termina la demostración del teorema. ■

Es interesante notar aquí el rol preponderante del primer índice p que caracteriza a los espacios de Lorentz $L^{p,q}$: una vez que se tiene $0 < p < 1$ entonces el espacio dual $(L^{p,q})'$ está reducido al elemento cero sin importar el valor del segundo índice q. En particular, como hemos dicho en la página anterior, al tener la identificación de espacios $L^{p,p} = L^p$ el espacio dual $(L^p)'$ de este espacio de Lebesgue también está reducido al elemento cero.

1.5.2. Caso cuando $p = 1$ y $0 < q \leq +\infty$.

En esta situación, y contrariamente al caso anterior, vamos a ver que el segundo parámetro juega un rol interesante pues dependiendo de sus valores obtendremos un comportamiento completamente diferente y por esta razón necesitamos descomponer nuestra exposición en función de los valores de este segundo parámetro q que caracteriza los espacios de Lorentz.

A) Caso cuando $p = 1$ y $0 < q \leq 1$.

Teorema 1.5.2 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido σ-finito y no atómico. Si los índices p, q que determinan los espacios de Lorentz $L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ verifican*

$p = 1$ y $0 < q \leq 1$, entonces el espacio dual correspondiente se identifica con el espacio de Lebesgue $L^\infty(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$, es decir que se tiene

$$(L^{1,q})' \sim L^\infty.$$

Demostración. Recordemos que el caso $p = q = 1$ corresponde con el espacio de Lebesgue L^1 que ya ha sido tratado en el Volumen 2, de manera que nos concentramos el caso cuando $0 < q < 1$. Consideremos la siguiente aplicación:

$$\begin{array}{rcl} \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^{1,q}\times L^\infty} : L^{1,q} \times L^\infty & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (f, g) & \longmapsto & \displaystyle\int_X f(x)g(x)d\mu(x). \end{array} \tag{1.97}$$

Por las propiedades de la integral de Lebesgue, vemos sin problema que la aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^{1,q}\times L^\infty}$ es una forma bilineal.

1) Continuidad fuerte. Recordemos que por el Teorema 1.2.9, página 75, se tiene la inclusión $L^{1,q} \subset L^1$. Empecemos considerando f una función simple y g una función que pertenece al espacio L^∞. Tenemos entonces la estimación

$$|\langle f, g\rangle_{L^{1,q}\times L^\infty}| = \left| \int_X f(x)g(x)d\mu(x) \right| \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^{1,q}} \|g\|_{L^\infty},$$

que se generaliza por densidad a todo el espacio $L^{1,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ y obtenemos de esta manera que para toda función $g \in L^\infty(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ podemos construir formas lineales continuas sobre el espacio $L^{1,q}$ utilizando la expresión

$$\begin{array}{rcl} T_g : L^{1,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ f & \longmapsto & T_g(f) = \displaystyle\int_X f(x)g(x)d\mu(x), \end{array} \tag{1.98}$$

pues se tiene $|T_g(f)| \leq C_{T_g} \|f\|_{L^{1,q}}$, en donde $C_{T_g} = \|g\|_{L^\infty}$.

2) Isomorfismo. Verifiquemos que la funcional T_g definida por medio de la expresión (1.98) y la función $g \in L^\infty(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ proporcionan información equivalente. Sabemos por los cálculos anteriores que para toda función $f \in L^{1,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ se tiene la estimación $|T_g(f)| \leq \|g\|_{L^\infty} \|f\|_{L^{1,q}}$, de donde se deduce $\|T_g\|_{(L^{1,q})'} = \sup\limits_{\|f\|_{L^{1,q}} \leq 1} |T_g(f)| \leq \|g\|_{L^\infty}$.

Para la desigualdad recíproca procedemos de la siguiente manera: sea $g \in L^\infty(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$, sea $\varepsilon > 0$ un real arbitrario y consideremos el conjunto $\{x \in X : |g(x)| > \|g\|_{L^\infty} - \varepsilon\}$ que no es, por construcción, de μ-medida nula. Existe entonces un conjunto A de μ-medida finita y tal que el conjunto

$$B = A \cap \{x \in X : |g(x)| > \|g\|_{L^\infty} - \varepsilon\},$$

sea de medida finita. Definimos ahora la función $f(x) = \overline{sign(g)}(x)\mathbb{1}_B(x)$ y se tiene que esta función pertenece al espacio $L^{1,q}$ pues $|f(x)| \leq \mathbb{1}_B$ y entonces $\|f\|_{L^{1,q}} \leq \|\mathbb{1}_B\|_{L^{1,q}} = \left(\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{q}} \mu(B) < +\infty$.

Si calculamos $T_g(f)$ tenemos:

$$\begin{aligned} T_g(f) &= \int_X \left(\overline{sign(g)}(x)\mathbb{1}_B(x)\right) g(x)d\mu(x) = \int_X |g(x)|\mathbb{1}_B(x)d\mu(x) \\ &\geq (\|g\|_{L^\infty} - \varepsilon)\,\mu(B), \end{aligned}$$

de donde se obtiene, al ser todas estas cantidades positivas, la mayoración $|T_g(f)| \geq (\|g\|_{L^\infty} - \varepsilon)\,\mu(B)$. Por otro lado, por los cálculos anteriores tenemos $|T_g(f)| \leq \|T_g\|_{(L^{1,q})'}\|f\|_{L^{1,q}} = \left(\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{q}} \|T_g\|_{(L^{1,q})'}\mu(B)$, a partir de lo cual podemos escribir

$$\|g\|_{L^\infty} - \varepsilon \leq \left(\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{q}} \|T_g\|_{(L^{1,q})'}.$$

Finalmente, como el real $\varepsilon > 0$ era arbitrario se obtiene la equivalencia buscada.

3) Sobreyectividad. Debemos ahora verificar que *toda* forma lineal continua T definida sobre el espacio $L^{1,q}$ se puede representar por medio de la expresión (1.98) en donde $g \in L^\infty$.

Consideremos por un momento que la medida total del conjunto X es finita, entonces si $T \in (L^{p,q})'$ es una forma lineal continua, podemos considerar la aplicación $\nu(A) = T(\mathbb{1}_A)$, para todo $A \in \mathscr{A}$. Por el Teorema 1.2.8 de convergencia dominada en los espacios de Lorentz, si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos medibles disjuntos tales que $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, podemos escribir (recordar que todos estos conjuntos son de medida finita):

$$\lim_{n\to+\infty} \left\| \mathbb{1}_A - \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{A_n} \right\|_{L^{1,q}} = 0,$$

de donde se deduce, por la continuidad de la forma lineal T la identidad

$$T(\mathbb{1}_A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{A_n},$$

que se transmite a la aplicación ν y que nos proporciona la propiedad de σ-aditividad para ν. Como se tiene

$$|\nu(A)| \leq \|T\|_{(L^{p,q})'}\|\mathbb{1}_A\|_{L^{p,q}} = C(p,q)\|T\|_{(L^{p,q})'}\mu(A)^{\frac{1}{p}},$$

deducimos sin problema que la medida ν es absolutamente continua (ver la Definición 2.2.2 del Volumen 2) con respecto a la medida μ y podemos entonces aplicar el Teorema de Radon-Nikodym (ver el Teorema 2.2.2 del Volumen 2), para obtener una función integrable $g : X \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que

$$\sigma(A) = T(\mathbb{1}_A) = \int_X \mathbb{1}_A g(x)d\mu(x).$$

Vamos a verificar que esta función g pertenece al espacio $L^\infty(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ y para todo $n \geq 1$ consideramos ahora los conjuntos $E_n = \{x \in X : |g(x)| \leq n\}$, de manera que las funciones $g(x)\mathbb{1}_{E_n}$ son funciones acotadas que pertenecen al espacio $L^\infty(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ pues hemos supuesto que la medida μ es finita. Ahora si $A \in \mathscr{A}$ y si $f = \mathbb{1}_A$, entonces podemos escribir

$$T(f\mathbb{1}_{E_n}) = \int_X f(x)g(x)\mathbb{1}_{E_n} d\mu(x).$$

Por linealidad y continuidad de la aplicación T y utilizando el hecho que las funciones simples son densas en el espacio $L^{1,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ podemos generalizar la expresión anterior a toda función $L^{1,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$. Ahora, por el isomorfismo verificado en el punto 2) anterior tenemos la estimación

$$\|g\mathbb{1}_{E_n}\|_{L^\infty} \leq \left(\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{q}} \|T\|_{(L^{1,q})'},$$

y a partir de esta estimación uniforme, aplicando el Lema 3.2.2 del Volumen 2, se obtiene que la función g es acotada.

Este procedimiento se generaliza sin mayor problema al caso de un espacio medido σ-finito: basta considerar una sucesión de conjuntos medibles disjuntos $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de μ-medida finita tales que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ y aplicar por separado los puntos anteriores a cada conjunto B_n para luego recomponer todo el espacio X. De esta manera se obtiene que toda forma lineal T definida sobre el espacio de Lorentz $L^{1,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ se escribe de la forma $T(f) = \displaystyle\int_X f(x)g(x)d\mu(x)$ en donde g es una función que pertenece al espacio $L^\infty(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$. ■

Observación 1.18 Con este resultado podemos ver que el espacio L^∞ posee *muchos* espacios pre-duales.

B) Caso cuando $p = 1$ y $1 < q < +\infty$.

En claro contraste con la sección anterior, en este caso el espacio dual del espacio de Lorentz $L^{1,q}$ tiene un comportamiento completamente diferente como nos lo indica el siguiente resultado.

Teorema 1.5.3 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido σ-finito y no atómico. Si los índices p, q que determinan los espacios de Lorentz $L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ verifican $p = 1$ y $1 < q < +\infty$, entonces su espacio dual topológico está reducido al elemento cero. Es decir*

$$\left(L^{1,q}\right)' = \{0\}.$$

Demostración. Supongamos que T es una forma lineal continua definida sobre el espacio $L^{1,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ con $1 < q < +\infty$. Lo primero que vamos a hacer es representar esta forma lineal continua por medio de una integral. Procediendo como en el punto 3) de la demostración del Teorema 1.5.2 (es decir, empezando considerando que la medida total $\mu(X)$ es finita y usando la hipótesis de σ-finitud, para luego pasar al caso de espacios generales), podemos definir una nueva medida por medio de la expresión $\nu(A) = T(\mathbb{1}_A)$, para todo $A \in \mathscr{A}$ y como se tienen las mayoraciones

$$|\nu(A)| \leq \|T\|_{(L^{p,q})'} \|\mathbb{1}_A\|_{L^{p,q}} = C(p,q)\|T\|_{(L^{p,q})'} \mu(A)^{\frac{1}{p}},$$

deducimos sin problema que la medida ν es absolutamente continua (ver la Definición 2.2.2 del Volumen 2) con respecto a la medida μ. Podemos entonces aplicar el Teorema de Radon-Nikodym (ver el Teorema 2.2.2 del Volumen 2), para obtener una función integrable $g : X \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que

$$\sigma(A) = T(\mathbb{1}_A) = \int_X \mathbb{1}_A g(x) d\mu(x).$$

La linealidad de esta expresión permite considerar una expresión del tipo

$$T(f) = \int_X f(x)g(x)d\mu(x),$$

en donde f es una función simple integrable. Finalmente, por la continuidad de la aplicación T y por densidad de las funciones simples integrables, obtenemos que *toda* aplicación lineal continua T se escribe de esta forma.

Una vez que hemos obtenido esta caracterización de las formas lineales continuas, vamos a demostrar que la función g que interviene en la expresión anterior es necesariamente nula. En efecto, supongamos que esta función g es tal que $|g(x)| > \delta > 0$ sobre un conjunto medible A_0, tal que $0 < \mu(A_0) < +\infty$. Consideremos entonces la función f por medio de la fórmula $f(x) = \overline{sign(g)}\mathbb{1}_{A_0}h(x)$, en donde $h(x) \geq 0$ es una función medible. Tenemos por un lado

$$\begin{aligned} |T(f)| &= \left| \int_X \overline{sign(g)} \mathbb{1}_{A_0} h(x)g(x)d\mu(x) \right| = \left| \int_{A_0} |g(x)|h(x)d\mu(x) \right| \\ &\geq \delta \int_{A_0} |h(x)|d\mu(x) = \delta \|h\|_{L^1(A_0)}, \end{aligned}$$

mientras que por otro lado tenemos

$$|T(f)| \leq \|T\|_{(L^{1,q})'} \|f\|_{L^{1,q}} = \|T\|_{(L^{1,q})'} \|h\|_{L^{1,q}(A_0)},$$

y a partir de estas estimaciones obtenemos

$$\|h\|_{L^1(A_0)} \leq \delta^{-1} \|T\|_{(L^{1,q})'} \|h\|_{L^{1,q}(A_0)},$$

pero dado que estamos trabajando en un espacio no atómico y que consideramos el rango de valores $1 < q < +\infty$, entonces se tiene la inclusión de espacios $L^1 \subset L^{1,q}$ demostrada en el Teorema 1.2.9, de la página 75, de manera que no se puede tener en toda generalidad la desigualdad anterior, a menos que $\|T\|_{(L^{1,q})'}$ sea idénticamente nula. ■

C) Caso cuando $p = 1$ y $q = +\infty$.

En esta situación tenemos el resultado siguiente.

Teorema 1.5.4 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido σ-finito y no atómico. Si los índices p, q que determinan los espacios de Lorentz $L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ verifican $p = 1$ y $q = +\infty$, entonces su espacio dual topológico $(L^{1,\infty})'$ no es trivial. Es decir*

$$(L^{1,\infty})' \neq \{0\}.$$

Demostración. La verificación de este hecho se basa en el Lema 1.2.3 y la Proposición 1.2.1 del Volumen 2 que nos aseguran lo siguiente: Si E es un espacio vectorial separado dotado de una estructura topológica inicial, si $x_0 \in E$ es un vector y si p es una semi-norma definida sobre E que es continua con respecto a esta estructura inicial, entonces existe una forma lineal continua $T \in E'$ tal que $T(x_0) \neq 0$.

De esta manera es suficiente exhibir una semi-norma continua con respecto a la estructura topológica inicial del espacio $L^{1,\infty}$ para obtener la existencia (lo cual es en realidad una consecuencia del Teorema de Hahn-Banach) de una forma lineal continua que no es trivial.

Empezamos considerando el espacio de Lorentz definido sobre el intervalo $[0, +\infty[$: $L^{1,\infty}([0, +\infty[, \mathscr{B}or([0, +\infty[), dx, \mathbb{K})$. Dado que este espacio es resonante, tenemos por la Proposición 1.3.4, página 90, la caracterización siguiente de la función maximal

$$f_r^{**}(t) = \sup_{\mu(A)=t} \left(\frac{1}{\mu(A)} \int_A |f(x)|^r d\mu(x) \right)^{\frac{1}{r}}.$$

En particular, si consideramos $t < 1$ tenemos para dos funciones medibles f, g la desigualdad

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\mu(A)} \int_A |f+g|^{1-t} d\mu \right)^{\frac{1}{1-t}} \quad &\leq \quad 2^{\frac{t}{1-t}} \left[\left(\frac{1}{\mu(A)} \int_A |f|^{1-t} d\mu \right)^{\frac{1}{1-t}} \right. \\ &\qquad \left. + \left(\frac{1}{\mu(A)} \int_A |g|^{1-t} d\mu \right)^{\frac{1}{1-t}} \right], \end{aligned}$$

de donde se deduce la mayoración

$$(f+g)_{1-t}^{**}(t) \leq 2^{\frac{t}{1-t}} \left[f_{1-t}^{**}(t) + g_{1-t}^{**}(t) \right],$$

y entonces tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{t \to 0} t^2 (f+g)_{1-t}^{**}(t) \quad &\leq \quad \lim_{t \to 0} 2^{\frac{t}{1-t}} \left[t^2 f_{1-t}^{**}(t) + t^2 g_{1-t}^{**}(t) \right], \\ &\leq \quad \lim_{t \to 0} t^2 f_{1-t}^{**}(t) + \lim_{t \to 0} t^2 g_{1-t}^{**}(t). \end{aligned}$$

De esta manera, si consideramos la funcional N_0 definida por medio de la expresión

$$N_0(f) = \lim_{t \to 0} t^2 f_{1-t}^{**}(t),$$

observamos que se tiene la desigualdad triangular $N_0(f+g) \leq N_0(f) + N_0(g)$. Además si $\lambda \in \mathbb{K}$, tenemos por el punto 2) de la Proposición 1.3.1, página 87, la propiedad de homogeneidad

$$N_0(\lambda f) = \lim_{t\to 0} t^2 |\lambda| f^{**}_{1-t}(t) = |\lambda| N_0(f),$$

de manera que obtenemos que la funcional N_0 es una semi-norma. En particular, gracias a la fórmula (1.64), página 86, que calcula f^{**}_r cuando $f = \mathbb{1}_A$ es una función indicatriz de un conjunto medible A, vemos sin mayor problema que se tiene $N_0(\mathbb{1}_A) = 0$. Observemos además que esta semi-norma no es trivial puesto que se tiene $N_0(1/x) = 1$.

Lo único que queda por verificar es que esta semi-norma es continua con respecto a la estructura inicial del espacio $L^{1,\infty}$, caracterizada por la funcional $\|\cdot\|_{L^{1,\infty}}$. Para ello notamos que se tienen las estimaciones

$$\begin{aligned} t^2 f^{**}_{1-t}(t) &= t^2 \left(\frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)^{1-t} ds\right)^{\frac{1}{1-t}} \\ &\leq \sup_{s>0}\{\, s\, f^*(s)\}\, t^2 \left(\frac{1}{t}\int_0^t s^{t-1} ds\right)^{\frac{1}{1-t}} \\ &\leq \|f\|_{L^{1,\infty}} t^{-\frac{t}{1-t}}, \end{aligned}$$

de manera que se tiene

$$N_0(f) = \lim_{t\to 0} t^2 f^{**}_{1-t}(t) \leq \lim_{t\to 0} t^{-\frac{t}{1-t}} \|f\|_{L^{1,\infty}} = \|f\|_{L^{1,\infty}},$$

de donde deducimos que la semi-norma N_0 es continua con respecto a la funcional $\|\cdot\|_{L^{1,\infty}}$ que determina la topología inicial del espacio de Lorentz $L^{1,\infty}$ y a partir de este hecho obtenemos la existencia de una forma lineal continua no trivial definida sobre el espacio $L^{1,\infty}([0,+\infty[, \mathcal{B}or([0,+\infty[), dx, \mathbb{K})$.

El caso de un espacio medido σ-finito $(X, \mathscr{A}, \mu)$ general sigue esencialmente los mismos pasos y son dejados al lector en el Ejercicio 1.16. ■

Es necesario hacer aquí la siguiente observación: sabemos que $(L^{1,q})' = \{0\}$ para todo $1 < q < +\infty$ y dado que se tiene la inclusión de espacios $L^{1,q} \subset L^{1,\infty}$, con $1 < q < +\infty$, entonces toda forma lineal continua definida sobre el espacio $L^{1,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ se anula sobre las funciones simples.

Notemos finalmente que, si bien el espacio dual del espacio $L^{1,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ no es trivial (no está reducido al elmento cero), no estamos en capacidad de dar una caracterización simple de este espacio dual.

1.5.3. Caso cuando $1 < p < +\infty$ y $0 < q \leq +\infty$.

De la misma manera que en toda la sección anterior, es necesario descomponer nuestra exposición en función de los valores del segundo parámetro q, pues veremos que obtenemos resultados diferentes que conviene presentar por separado.

A) Caso cuando $1 < p < +\infty$ **y** $0 < q \leq 1$**.**

Teorema 1.5.5 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido σ-finito y no atómico. Si los parámetros reales p, q verifican $1 < p < +\infty$ y $0 < q \leq 1$, entonces el espacio dual topológico del espacio de Lorentz $L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ es isomorfo al espacio de Lorentz $L^{p',\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Dicho de otra manera se tiene la identificación*

$$\left(L^{p,q}\right)' \sim L^{p',\infty}.$$

Demostración. Consideremos la aplicación bilineal siguiente entre los espacios $L^{p,q}$ y $L^{p',\infty}$:

$$\begin{array}{rcl} \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^{p,q} \times L^{p',\infty}} : L^{p,q} \times L^{p',\infty} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (f, g) & \longmapsto & \displaystyle\int_X f(x)g(x)d\mu(x), \end{array}$$

y apliquemos el programa usual para estudiar la dualidad.

1) Continuidad fuerte. Si $f \in L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ y si $g \in L^{p',\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ tenemos la mayoración

$$|\langle f, g \rangle_{L^{p,q} \times L^{p',\infty}}| \leq \int_X |f(x)||g(x)|d\mu(x),$$

y por el Teorema de Hardy-Littlewood 1.2.3, página 57, tenemos

$$|\langle f, g \rangle_{L^{p,q} \times L^{p',\infty}}| \leq \int_X |f(x)||g(x)|d\mu(x) \leq \int_0^{+\infty} f^*(t)g^*(t)dt,$$

y como se tiene la relación $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, podemos escribir

$$\begin{array}{rcl} |\langle f, g \rangle_{L^{p,q} \times L^{p',\infty}}| & \leq & \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\, t^{\frac{1}{p'}} g^*(t) \frac{dt}{t} \\ & \leq & \displaystyle\sup_{t>0} \left\{ t^{\frac{1}{p'}} g^*(t) \right\} \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \frac{dt}{t} \\ & \leq & \|g\|_{L^{p',\infty}} \|f\|_{L^{p,1}}, \end{array}$$

pero dado que se tiene la inclusión de espacios $L^{p,q} \subset L^{p,1}$ para todo $0 < q \leq 1$, se tiene la desigualdad

$$|\langle f, g \rangle_{L^{p,q} \times L^{p',\infty}}| \leq C\|g\|_{L^{p',\infty}} \|f\|_{L^{p,q}},$$

de donde se deduce la continuidad fuerte de esta aplicación bilineal. De esta manera podemos construir, a partir de toda función $g \in L^{p',\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$, una forma lineal continua T_g por medio de la expresión

$$T_g(f) = \int_X f(x)g(x)d\mu(x).$$

2) Isomorfismo. Necesitamos verificar que los objetos $g \in L^{p',\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ y T_g determinan el mismo tipo de información. Sabemos que se tiene

siempre $|T_g(f)| \leq \|T_g\|_{(L^{p,q})'}\|f\|_{L^{p,q}}$, pero también tenemos la desigualdad $|T_g(f)| \leq C\|g\|_{L^{p',\infty}}\|f\|_{L^{p,q}}$, de donde por definición de la norma de una forma lineal continua se obtiene $\|T_g\|_{(L^{p,q})'} \leq C\|g\|_{L^{p',\infty}}$.

Para obtener la desigualdad reciproca consideremos una función $g \in L^{p',\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$, entonces, para un cierto parámetro $0 < \beta < +\infty$ tal que $d_g(\beta) < +\infty$, definimos la función $f_\beta(x) = \overline{sign(g)}\mathbb{1}_{\{|g|>\beta\}}$ y se tiene $f_\beta \in L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$: en efecto, por un cálculo directo podemos escribir

$$d_{f_\beta}(\alpha) = \begin{cases} d_g(\beta) & \text{si } 0 < \alpha < 1, \\ 0 & \text{sino,} \end{cases}$$

de donde tenemos, utilizando la primera definición de los espacios de Lorentz dada con la expresión (1.25) de la página 36:

$$\begin{aligned} \|f_\beta\|_{L^{p,q}} &= p^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^{+\infty} \left(\alpha \, d_{f_\beta}(\alpha)^{\frac{1}{p}} \right)^q \frac{d\alpha}{\alpha} \right)^{\frac{1}{q}} = p^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 \alpha^{q-1} \, d_g(\beta)^{\frac{q}{p}} d\alpha \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= C(p,q) \; d_g(\beta)^{\frac{1}{p}} < +\infty. \end{aligned}$$

De esta manera tenemos la mayoración

$$|T_g(f_\beta)| \leq \|T_g\|_{(L^{p,q})'}\|f_\beta\|_{L^{p,q}} = C(p,q)\|T_g\|_{(L^{p,q})'} d_g(\beta)^{\frac{1}{p}}.$$

Ahora, por otro lado tenemos

$$\begin{aligned} |T_g(f_\beta)| &= \left| \int_X f_\beta(x) g(x) d\mu(x) \right| = \left| \int_X \overline{sign(g)} \mathbb{1}_{\{|g|>\beta\}} g(x) d\mu(x) \right| \\ &= \left| \int_X |g(x)| \mathbb{1}_{\{|g|>\beta\}} d\mu(x) \right| \geq \beta \left| \int_X \mathbb{1}_{\{|g|>\beta\}} d\mu(x) \right| \\ &\geq \beta d_g(\beta). \end{aligned}$$

Juntando las dos estimaciones (por arriba y por abajo) que acabamos de obtener en las expresiones anteriores de la cantidad $|T_g(f_\beta)|$ podemos escribir

$$\beta d_g(\beta) \leq |T_g(f_\beta)| \leq C(p,q)\|T_g\|_{(L^{p,q})'} d_g(\beta)^{\frac{1}{p}},$$

de donde se deduce la mayoración

$$\beta d_g(\beta)^{\frac{1}{p'}} \leq C(p,q)\|T_g\|_{(L^{p,q})'},$$

es decir $\|g\|_{L^{p',\infty}} \leq C(p,q)\|T_g\|_{(L^{p,q})'}$ y de esta manera se obtiene el isomorfismo buscado.

3) Sobreyectividad. Verifiquemos ahora que *toda* forma lineal continua definida sobre el espacio de Lorentz $L^{p,q}$ puede representarse por medio de la expresión

$$T(f) = \int_X f(x) g(x) d\mu(x),$$

para alguna función $g \in L^{p',\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$. Empezamos suponiendo que la medida del conjunto X es finita y con los mismos argumentos utilizados anteriormente (es decir, σ-finitud del espacio $(X, \mathscr{A}, \mu)$, continuidad de la aplicación T y teorema de convergencia dominada), al definir una aplicación de conjuntos ν por medio de la expresión $\nu(A) = T(\mathbb{1}_A)$ se obtiene una medida. Como además se tiene la mayoración

$$|\nu(A)| \leq \|T\|_{(L^{p,q})'} \|\mathbb{1}_A\|_{L^{p,q}} = C(p,q)\|T\|_{(L^{p,q})'} \mu(A)^{\frac{1}{p}},$$

obtenemos que la medida ν es absolutamente continua con respecto a la medida μ. Podemos entonces aplicar el Teorema de Radon-Nikodym, para obtener una función integrable $g : X \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que

$$\sigma(A) = T(\mathbb{1}_A) = \int_X \mathbb{1}_A g(x) d\mu(x).$$

La linealidad de esta expresión permite considerar una expresión del tipo

$$T(f) = \int_X f(x)g(x)d\mu(x),$$

en donde f es una función simple integrable. Si definimos ahora el conjunto $E_n = \{x \in X : |g(x)| \leq n\}$, tenemos que la función $g\mathbb{1}_{E_n}$ es acotada y pertenece al espacio de Lorentz $L^{p',\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ puesto que estamos trabajando sobre un conjunto de medida finita. Si consideramos ahora $T(f\mathbb{1}_{E_n}) = \displaystyle\int_X f(x)g(x)\mathbb{1}_{E_n} d\mu(x)$, tenemos la estimación

$$|T(f\mathbb{1}_{E_n})| \leq \|f\|_{L^{p,q}} \|g\mathbb{1}_{E_n}\|_{L^{p',\infty}},$$

pero por el punto 2) anterior sabemos que se tiene la desigualdad uniforme

$$\|g\mathbb{1}_{E_n}\|_{L^{p',\infty}} \leq C(p,q)\|T\|_{(L^{p,q})'},$$

de manera que por el Lema de Fatou (ver el Teorema 1.2.7, página 73), obtenemos que la función g pertenece al espacio $L^{p',\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$. Por la continuidad de la forma lineal T y por densidad de las funciones simples integrables en el espacio $L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$, se deduce la representación integral deseada para la aplicación T.

El caso de un espacio medido σ-finito general se deduce de manera totalmente similar: efecto, gracias a la hipótesis de σ-finitud tenemos que el conjunto X se descompone como $X = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ en donde cada conjunto X_n es de μ-medida finita y entonces es posible aplicar el razonamiento anterior a cada uno de estos conjuntos. ■

B) Caso cuando $1 < p < +\infty$ y $1 < q < +\infty$.

En esta situación es la que posee el mayo número de propiedades como vamos a verlo en las páginas que siguen.

Teorema 1.5.6 (Dualidad) *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido σ-finito y no atómico. Si los parámetros reales p, q verifican $1 < p < +\infty$ y $1 < q < +\infty$, y si los índices p', q' verifican las relaciones*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \qquad y \qquad \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1,$$

entonces el espacio dual topológico del espacio de Lorentz $L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ es isomorfo al espacio de Lorentz $L^{p',q'}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$. Dicho de otra manera se tiene la identificación

$$\left(L^{p,q}\right)' \sim L^{p',q'}.$$

Demostración. Notemos que si $p = q$, entonces $1 < p < +\infty$ y se tiene la identificación de espacios $L^{p,p} = L^p$, además por el Teorema 3.1.1 del Volumen 2 sabemos que se tiene la relación de dualidad $(L^p)' \simeq L^{p'}$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, de manera que podemos concentrarnos únicamente en el caso $p \neq q$.

Supongamos pues que se tiene $1 < p, q < +\infty$ con $p \neq q$ y consideremos la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^{p,q} \times L^{p',q'}} : L^{p,q} \times L^{p',q'} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (f, g) &\longmapsto \int_X f(x)g(x)d\mu(x). \end{aligned} \tag{1.99}$$

Por las propiedades de la integral de Lebesgue, vemos sin problema que la aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^{p,q} \times L^{p',q'}}$ es una forma bilineal.

1) Continuidad fuerte. Tenemos, utilizando el Teorema de Hardy-Littlewood (ver el Teorema 1.2.3 página 57) y la estimación $f^* \leq f^{**}$ (ver la Proposición 1.3.2 página 89):

$$\begin{aligned} |\langle f, g \rangle_{L^{p,q} \times L^{p',q'}}| &= \left| \int_X f(x)g(x)d\mu(x) \right| \leq \int_X |f(x)||g(x)|d\mu(x) \\ &\leq \int_0^{+\infty} f^*(t)g^*(t)dt \leq \int_0^{+\infty} f^{**}(t)g^{**}(t)dt, \end{aligned}$$

de manera que utilizando la relación $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ podemos escribir

$$|\langle f, g \rangle_{L^{p,q} \times L^{p',q'}}| \leq \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t)\, t^{\frac{1}{p'}} g^{**}(t) \frac{dt}{t},$$

y como $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$, podemos aplicar la desigualdad de Hölder usual (pero con respecto a la medida $\frac{dt}{t}$) en la integral anterior para obtener la mayoración

$$\begin{aligned} |\langle f, g \rangle_{L^{p,q} \times L^{p',q'}}| &\leq \left(\int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\quad \times \left(\int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{1}{p'}} g^{**}(t) \right)^{q'} \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q'}} \\ &\leq |||f|||_{p,q} |||g|||_{p',q'} \end{aligned}$$

de donde se obtiene sin problema que esta aplicación bilineal es continua.

Gracias a este resultado, podemos definir formas lineales sobre los espacios de Lorentz $L^{p,q}(X,\mathscr{A},\mu,\mathbb{K})$ de la siguiente manera: si g es una función cualquiera que pertenece al espacio $L^{p',q'}(X,\mathscr{A},\mu,\mathbb{K})$ con $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ y $\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$, construimos una aplicación T_g por medio de la expresión

$$\begin{array}{rcl} T_g : L^{p,q}(X,\mathscr{A},\mu,\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ f & \longmapsto & T_g(f)=\displaystyle\int_X f(x)g(x)d\mu(x), \end{array} \tag{1.100}$$

vemos entonces sin ningún problema que esta aplicación T_g es lineal y que es continua pues $|T_g(f)|\leq C_{T_g}|||f|||_{p,q}$, en donde $C_{T_g}=|||g|||_{p',q'}$.

Por medio de esta aplicación T_g definida en (1.100) vemos que *todo* elemento $g\in L^{p',q'}(X,\mathscr{A},\mu,\mathbb{K})$ permite construir una forma lineal continua sobre el espacio de Lorentz $L^{p,q}(X,\mathscr{A},\mu,\mathbb{K})$, de esta manera si notamos

$$F=\{T_g : L^{p,q}\longrightarrow\mathbb{K} : g\in L^{p',q'}\},$$

entonces se tiene $F\subset(L^{p,q})'$.

2) Isomorfismo. Mostremos ahora que la forma lineal T_g y la función g pueden ser identificadas en el sentido que describen una información equivalente. Por los cálculos anteriores tenemos

$$\begin{array}{rcl} \|T_g\|_{(L^{p,q})'} & = & \displaystyle\sup_{|||f|||_{p,q}\leq 1}|T_g(f)|\leq |||f|||_{p,q}|||g|||_{p',q'} \\ & \leq & |||g|||_{p',q'}, \end{array}$$

así que nos concentramos en estudiar la estimación recíproca.

Para ello consideramos g una función que pertenece al espacio $L^{p',q'}(X,\mathscr{A},\mu,\mathbb{K})$ y sea la función f definida por medio de la expresión

$$f^*(t)=\int_{\frac{t}{2}}^{+\infty}s^{\frac{q'}{p'}-1}g^*(s)^{q'-1}\frac{ds}{s}, \tag{1.101}$$

nótese que esta función f^* es continua por la derecha, decreciente y además $f\in L^{p,q}(X,\mathscr{A},\mu,\mathbb{K})$: en efecto

$$\begin{array}{rcl} \|f\|_{L^{p,q}} & = & \left(\displaystyle\int_0^{+\infty}t^{\frac{q}{p}}f^*(t)^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \\ & = & \left(\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\int_{\frac{t}{2}}^{+\infty}s^{\frac{q'}{p'}-1}g^*(s)^{q'-1}\frac{ds}{s}\right)^q\frac{dt}{t^{1-\frac{q}{p}}}\right)^{\frac{1}{q}}, \end{array}$$

aplicando la desigualdad de Hardy (1.69) dada en la página 96 tenemos

$$\|f\|_{L^{p,q}}\leq C\left(\int_0^{+\infty}s^{(\frac{q'}{p'}-1)q}g^*(s)^{(q'-1)q}\frac{ds}{s^{1-\frac{q}{p}}}\right)^{\frac{1}{q}},$$

y recordando que se tienen las relaciones $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$, la estimación anterior se reescribe como

$$\|f\|_{L^{p,q}} \leq C\left(\int_0^{+\infty} s^{\frac{q'}{p'}} g^*(s)^{q'}\frac{ds}{s}\right)^{\frac{q'-1}{q'}} = C\|g\|_{L^{p',q'}}^{q'-1} < +\infty,$$

de donde se obtiene que $f \in L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$.

Recordemos ahora que por construcción tenemos que la forma lineal T_g está dada por la integral (1.100) y para toda función $f \in L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ se tiene la mayoración

$$\left|\int_X f(x)g(x)d\mu(x)\right| = |T_g(f)| \leq \|T_g\|_{(L^{p,q})'}|||f|||_{p,q}.$$

Nótese que esta estimación es uniforme con respecto a toda función $\tilde{f}$ que es equidistribuida con f y se tiene entonces

$$\sup_{\tilde{f}:d_{\tilde{f}}=d_f}\left|\int_X \tilde{f}(x)g(x)d\mu(x)\right| \leq \|T_g\|_{(L^{p,q})'}|||f|||_{p,q},$$

ahora, dado que estamos trabajando sobre un espacio medido no atómico σ-finito, sabemos por el Teorema 1.2.5, página 67, que se trata de un espacio resonante y por la Observación 1.6 página 59 tenemos la mayoración general

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} f^*(t)g^*(t)dt &= \sup_{\tilde{f}:d_{\tilde{f}}=d_f}\left|\int_X \tilde{f}(x)g(x)d\mu(x)\right| \\ &\leq \|T_g\|_{(L^{p,q})'}|||f|||_{p,q},\end{aligned}$$

de manera que si consideramos en esta desigualdad la función f definida en la expresión (1.101) tenemos

$$\int_0^{+\infty}\left(\int_{\frac{t}{2}}^{+\infty} s^{\frac{q'}{p'}-1} g^*(s)^{q'-1}\frac{ds}{s}\right) g^*(t)dt \leq C\|T_g\|_{(L^{p,q})'}\|g\|_{L^{p',q'}}^{q'-1}. \quad (1.102)$$

Estudiamos ahora la parte de la izquierda de esta estimación y tenemos

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} f^*(t)g^*(t)dt &= \int_0^{+\infty}\left(\int_{\frac{t}{2}}^{+\infty} s^{\frac{q'}{p'}-1} g^*(s)^{q'-1}\frac{ds}{s}\right) g^*(t)dt \\ &\geq \int_0^{+\infty}\left(\int_{\frac{t}{2}}^{t} s^{\frac{q'}{p'}-1} g^*(s)^{q'-1}\frac{ds}{s}\right) g^*(t)dt,\end{aligned}$$

y dado que la función g^* es decreciente podemos escribir

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} f^*(t)g^*(t)dt &\geq \int_0^{+\infty} g^*(t)^{q'-1}\left(\int_{\frac{t}{2}}^{t} s^{\frac{q'}{p'}-1}\frac{ds}{s}\right) g^*(t)dt \\ &\geq C\|g\|_{L^{p',q'}}^{q'}.\end{aligned}$$

Con esta estimación volvemos a la desigualdad (1.102) y tenemos

$$C\|g\|^{q'}_{L^{p',q'}} \leq \int_0^{+\infty} f^*(t)g^*(t)dt \leq C\|T_g\|_{(L^{p,q})'}\|g\|^{q'-1}_{L^{p',q'}},$$

es decir

$$C\|g\|_{L^{p',q'}} \leq \|T_g\|_{(L^{p,q})'},$$

y esto muestra que la información dada por la función $g \in L^{p',q'}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ y la forma lineal T_g es equivalente.

3) Sobreyectividad. Lo único que queda por verificar es que toda forma lineal continua definida sobre $L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ puede representarse por medio de la expresión (1.100).

Empecemos suponiendo que se tiene $\mu(X) < +\infty$. Utilizando los mismos argumentos utilizados en los Teoremas 1.5.2 y 1.5.5, si T es una forma lineal continua definida sobre el espacio $L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$, podemos definir una medida por medio de la expresión $\nu(A) = T(\mathbb{1}_A)$, para todo $A \in \mathscr{A}$ y como se tiene

$$|\nu(A)| \leq \|T\|_{(L^{p,q})'}\|\mathbb{1}_A\|_{L^{p,q}} = C(p,q)\|T\|_{(L^{p,q})'}\mu(A)^{\frac{1}{p}},$$

deducimos que la medida ν es absolutamente continua con respecto a la medida μ, entonces aplicando el Teorema de Radon-Nikodym obtenemos una función integrable $g : X \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que

$$\sigma(A) = T(\mathbb{1}_A) = \int_X \mathbb{1}_A g(x)d\mu(x).$$

La linealidad de esta expresión permite considerar una expresión del tipo

$$T(f) = \int_X f(x)g(x)d\mu(x),$$

en donde f es una función simple integrable.

Mostremos ahora que la función g anterior pertenece al espacio de Lorentz $L^{p',q'}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$. Consideremos pues el conjunto $E_n = \{x \in X : |g(x)| \leq n\}$, tenemos entonces que la función $g\mathbb{1}_{E_n}$ es acotada y pertenece al espacio de Lorentz $L^{p',q'}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ puesto que estamos trabajando sobre un conjunto X de medida finita. Si consideramos ahora $T(f\mathbb{1}_{E_n}) = \displaystyle\int_X f(x)g(x)\mathbb{1}_{E_n}d\mu(x)$, tenemos la estimación

$$|T(f\mathbb{1}_{E_n})| \leq \|f\|_{L^{p,q}}\|g\mathbb{1}_{E_n}\|_{L^{p',q'}},$$

pero por el punto 2) anterior sabemos que se tiene la desigualdad uniforme

$$\|g\mathbb{1}_{E_n}\|_{L^{p',q'}} \leq C(p,q)\|T\|_{(L^{p,q})'},$$

de manera que por el Lema de Fatou (ver el Teorema 1.2.7, página 73), obtenemos que la función g pertenece al espacio $L^{p',q'}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$. Por la continuidad de la forma lineal T y por densidad de las funciones simples integrables en el espacio $L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$, se deduce la representación integral deseada para la aplicación T. Por la continuidad de la aplicación T y por densidad de las funciones simples integrables, obtenemos que se tiene esta representación para toda función $f \in L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ y para toda aplicación lineal continua $T \in (L^{p,q})'$.

Si la medida del conjunto X no es finita, utilizamos la hipótesis de σ-finitud para poder razonar localmente sobre conjuntos de medida finita que recubren todo el espacio X y obtener de esta manera funciones g_n que proporcionan (localmente) la representación integral deseada. Ahora, dado que se tiene la estimación uniforme $\|g_n\|_{L^{p',q'}} \leq C(p,q)\|T\|_{(L^{p,q})'}$, podemos reconstruir todo el espacio X y obtener de esta manera una función $g \in L^{p',q'}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ que nos permite escribir, para toda función $f \in L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ la expresión integral buscada. ■

Una vez que hemos identificado el espacio dual de estos espacios de Lorentz $L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$, tenemos una serie de corolarios interesantes que se deducen directamente a partir de toda la teoría desarrollada en el primer capítulo del Volumen 2.

En particular tenemos los dos resultados a continuación.

Corolario 1.5.1 (Reflexividad) *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido σ-finito y no atómico. Si los parámetros reales p, q verifican $1 < p < +\infty$ y $1 < q < +\infty$, y si p', q' verifican las relaciones*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \qquad y \qquad \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1,$$

entonces los espacios de Lorentz $L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ son reflexivos.

Este resultado es inmediato por las relaciones entre los índices que caracterizan los espacios de Lorentz, y obtenemos entonces que es posible identificar el espacio de Lorentz $L^{p,q}$ con su espacio bidual $(L^{p,q})''$. Una consecuencia importante de esta identificación es que la topología débil y débil-$*$ coinciden y de esta manera tenemos a nuestra disposición todos los resultados expuestos en la Sección 1.4.3 del Volumen 2.

Finalmente, presentamos una cuarta forma de definir a los espacios de Lorentz: en efecto, utilizando la dualidad tenemos:

Corolario 1.5.2 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido σ-finito y no atómico. Si $1 < p, q < +\infty$ y si $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$, entonces tenemos la caracterización siguiente:*

1) $\displaystyle \|f\|_{L^{p,q}} = \sup_{\|g\|_{L^{p',q'}} \leq 1} \left| \int_X f(x)g(x)d\mu(x) \right|,$

2) simétricamente se tiene $\displaystyle \|g\|_{L^{p',q'}} = \sup_{\|f\|_{L^{p,q}} \leq 1} \left| \int_X f(x)g(x)d\mu(x) \right|.$

C) Caso cuando $1 < p < +\infty$ y $q = +\infty$.

A la luz de los teoremas anteriores, se puede pensar que se tiene la relación de dualidad $(L^{p,\infty})' \simeq L^{p',1}$ en donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Sin embargo tenemos el resultado siguiente.

Teorema 1.5.7 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido σ-finito y no atómico. Si $1 < p, p' < +\infty$ son dos parámetros que verifican $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ entonces no se puede identificar el espacio dual $(L^{p,\infty})'$ con el espacio de Lorentz $L^{p',1}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$. Dicho de otra manera se tiene*

$$(L^{p,\infty})' \neq L^{p',1}.$$

Demostración. Por simplicidad, trabajaremos sobre el conjunto $X = [0, +\infty[$ dotado de su estructura de espacio medido natural. Sea ahora A un intervalo tal que $0 < |A| < +\infty$ y para una función $f \in L^{p,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ definimos la funcional

$$N(f) = \limsup_{t \to 0} t^{\frac{2}{p}} (f \mathbb{1}_A)^{**}_{p(1-t)}(t).$$

Si $0 < t < 1 - \frac{1}{p}$, entonces $1 < p(1-t)$ y por el Corolario 1.3.1, página 91, se tiene que la cantidad $t^{\frac{2}{p}} (f \mathbb{1}_A)^{**}_{p(1-t)}(t)$ es subaditiva, de manera que si f, g son dos funciones que pertenecen al espacio $L^{p,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ se tiene

$$N(f + g) \leq N(f) + N(g),$$

nótese además que por el segundo punto de la Proposición 1.3.1, página 87, se tiene para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ la identidad $N(\lambda f) = |\lambda| N(f)$ y gracias a estas dos propiedades tenemos que la funcional N definida sobre el espacio $L^{p,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ es una semi-norma. Verifiquemos ahora que esta semi-norma es continua con respecto a la topología inicial de este espacio de Lorentz. En efecto, por definición de función maximal y por la defínción de la funcional $\| \cdot \|_{L^{p,\infty}}$ dada en la fórmula (1.54), página 68, se tiene

$$\begin{aligned}
t^{\frac{2}{p}} (f \mathbb{1}_A)^{**}_{p(1-t)}(t) &= t^{\frac{2}{p}} \left(\frac{1}{t} \int_0^t ((f \mathbb{1}_A(s))^*)^{p(1-t)} \, ds \right)^{\frac{1}{p(1-t)}} \\
&\leq t^{\frac{2}{p}} \left(\frac{1}{t} \int_0^t (f^*(s))^{p(1-t)} \, ds \right)^{\frac{1}{p(1-t)}} \\
&\leq \sup_{s > 0} \{ s^{\frac{1}{p}} f^*(s) \} \, t^{\frac{2}{p}} \left(\frac{1}{t} \int_0^t s^{-(1-t)} ds \right)^{\frac{1}{p(1-t)}} \\
&\leq \|f\|_{L^{p,\infty}} \, t^{-\frac{t}{p(1-t)}},
\end{aligned}$$

de manera que al pasar al límite $t \to 0$ se tiene la mayoración $N(f) \leq \|f\|_{L^{p,\infty}}$ de donde se obtiene la continuidad deseada. Nótese finalmente que esta semi-norma N no es trivial, pues por los mismos cálculos anteriores se tiene $N(f) \geq 1$, para toda función que verifica $(x^{-\frac{1}{p}})^* \leq f^*$.

Con estos preliminares, vamos a verificar ahora que esta semi-norma N permite construir una forma lineal continua T sobre el espacio $L^{p,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$

que no se puede representar de la forma $T(f) = \int_X f(x)g(x)d\mu(x)$ para alguna función $g \in L^{p',1}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$. Sea pues T una forma lineal no nula que verifica $T(f) \leq N(f)$ para todo $f \in L^{p,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ (la existencia de esta forma lineal es una consecuencia del Teorema de Hahn-Banach, ver el Lema 1.2.3 del Volumen 2) y que se representa por medio de esta formulación integral con una cierta función (no nula) g. Para un cierto $\varepsilon > 0$ consideremos el conjunto $A_\varepsilon = \{x \in X : |g(x)| > \varepsilon\}$, dado que la función g pertenece al espacio $L^{p',1}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$, se tiene que este conjunto es de medida finita, de manera que si definimos una función $f(x) = \mathbb{1}_{A_\varepsilon}\overline{sign(g)}$ vemos sin problema por un lado que se tiene $f \in L^{p,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ y por otro lado que

$$T(f) = \int_X f(x)g(x)d\mu(x) = \int_{A_\varepsilon} |g(x)|d\mu(x).$$

Pero un cálculo directo muestra que $N(f) = 0$ y como $T(f) \leq N(f) = 0$, esto implica que la medida del conjunto A_ε debe ser nula, lo que a su vez implica (al ser $\varepsilon > 0$ arbitrario) que la función g debe ser nula en casi todas partes, obteniendo de esta manera una contradicción. Hemos demostrado entonces que los espacios $L^{p,\infty}$ y $L^{p',1}$ no puede ser puestos en dualidad. ■

Una vez que tenemos este hecho, es interesante preguntarse qué forma tiene el espacio dual del espacio de Lorentz $L^{p,\infty}$ cuando $1 < p < +\infty$. Contrariamente al caso $L^{1,\infty}$, aquí podemos ser un poco más explícitos sobre la estructura de este espacio dual y para estudiar con un poco más de detalle este caso, necesitamos introducir algunos conceptos adicionales. Si $(X, \mathscr{A}, \mu)$ es un espacio medido σ-finito no atómico, definimos sobre el espacio de Lorentz $L^{p,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ las funcionales siguientes

$$N_0(f) = \limsup_{t\to 0} t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) \qquad \text{y} \qquad N_\infty(f) = \limsup_{t\to +\infty} t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t).$$

Por las propiedades de la función maximal, vemos sin mayor dificultad que estas funcionales verifican los puntos siguientes donde $f, g \in L^{p,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$:

- $N_0(\alpha f) = |\alpha| N_0(f)$ y $N_\infty(\alpha f) = |\alpha| N_\infty(f)$, para todo $\alpha \in \mathbb{K}$,
- $N_0(f+g) \leq N_0(f) + N_0(g)$ y $N_\infty(f+g) \leq N_\infty(f) + N_\infty(g)$,

y de esta manera N_0 y N_∞ determinan semi-normas sobre el espacio de Lorentz $L^{p,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ (para ver que no se tiene el axioma de separación basta considerar la función $\mathbb{1}_A$ donde $\mu(A) < +\infty$ y se obtiene $N_0(\mathbb{1}_A) = N_\infty(\mathbb{1}_A) = 0$).

Consideramos ahora el conjunto de todas las formas lineales continuas T definidas sobre el espacio $L^{p,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ y sobre este espacio definimos los conjuntos $S_0, S_\infty \subset (L^{p,\infty})'$ por medio de las expresiones

$$S_0 = \{T \in (L^{p,\infty})' : |T(f)| \leq CN_0(f)\},$$

para todo $f \in L^{p,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ y para alguna constante $C > 0$ y simétricamente

$$S_\infty = \{T \in (L^{p,\infty})' : |T(f)| \leq CN_\infty(f)\},$$

para todo $f \in L^{p,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ y para alguna constante $C > 0$.

Con estas definiciones podemos enunciar el resultado de dualidad.

Teorema 1.5.8 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido σ-finito y no atómico. Si los parámetros reales p, q verifican $1 < p < +\infty$ y $q = +\infty$, y si p' verifica la relación*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

entonces el espacio dual topológico del espacio de Lorentz $L^{p,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ es isomorfo al espacio $L^{p',1}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K}) \oplus S_0 \oplus S_\infty$. Se tiene entonces la identificación

$$\left(L^{p,\infty}\right)' \sim L^{p',1} \oplus S_0 \oplus S_\infty.$$

La demostración de este resultado queda fuera del alcance de este libro, el lector interesado en todos los detalles técnicos puede consultar el artículo [11].

*

En el siguiente cuadro resumimos el estudio de los espacios duales en los espacios de Lorentz $L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$, donde el espacio medido $(X, \mathscr{A}, \mu)$ es σ-finito y no atómico.

	$0 < p < 1$	$p = 1$	$1 < p < +\infty$	$p = +\infty$
$0 < q < 1$	$(L^{p,q})' = \{0\}$	$(L^{1,q})' \sim L^\infty$	$(L^{p,q})' \sim L^{p',\infty}$	no definido
$q = 1$	$(L^{p,1})' = \{0\}$	$(L^{1,1})' \simeq L^\infty$	$(L^{p,1})' \sim L^{p',\infty}$	no definido
$1 < q < +\infty$	$(L^{p,q})' = \{0\}$	$(L^{1,q})' = \{0\}$	$(L^{p,q})' \sim L^{p',q'}$	no definido
$q = +\infty$	$(L^{p,\infty})' = \{0\}$	$(L^{1,\infty})' \neq \{0\}$ no trivial	$(L^{p,\infty})' \sim L^{p',1} \oplus S_0 \oplus S_\infty$	$(L^{\infty,\infty})' \simeq \mathscr{E}$

Figura 1.10: Espacios duales $L^{p,q}$ (con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ y $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$).

1.6. Los espacios de Lorentz discretos $\ell^{p,q}$

En todos los resultados y propiedades expuestos anteriormente sobre los espacios de Lorentz $L^{p,q}$, hemos considerado espacios medidos generales o espacios medidos no atómicos y en esta sección vamos a concentrarnos exclusivamente en espacios medidos completamente atómicos (en el sentido de la Definición 1.2.6, página 62) en donde cada átomo es de igual medida.

En realidad, vamos a ser más precisos en cuanto a nuestro marco de trabajo pues vamos a considerar aquí únicamente el espacio de enteros naturales $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$ y trabajaremos con el espacio medido $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*), Card)$, en donde $Card$ es la medida de conteo.

De esta manera vamos a trabajar en todo lo que sigue con espacios de *sucesiones* $a = (a_n)_{n\geq 1}$, es decir en aplicaciones del tipo

$$\begin{aligned} a : \mathbb{N}^* &\longrightarrow \mathbb{K} \\ n &\longmapsto a_n, \end{aligned}$$

en "contraste" con los espacios de funciones tratados en las páginas anteriores.

Como es de esperarse, los espacios de Lorentz de sucesiones (que notaremos $\ell^{p,q}$ con $0 < p, q \leq +\infty$) poseen esencialmente las mismas propiedades que los espacios de Lorentz de funciones $L^{p,q}$ puesto que por el Teorema 1.2.5, página 67, tenemos que el espacio medido $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*), Card)$ es *resonante*: es decir que podemos aplicar sin problema toda una serie de resultados obtenidos en las secciones previas.

Sin embargo, existen algunas diferencias importantes entre todas estas similitudes: veremos en particular que el hecho de utilizar una medida atómica introduce algunos cambios interesantes que conviene estudiar en detalle pues en estos casos el comportamiento de los espacios $\ell^{p,q}$ difiere completamente de el de sus homólogos continuos $L^{p,q}$.

Para llevar a cabo este estudio dividiremos nuestra exposición en tres secciones. En la Sección 1.6.1 fijaremos unas notaciones específicas al marco discreto, las diferentes caracterizaciones de los espacios de Lorentz de sucesiones $\ell^{p,q}$ y algunas propiedades generales. En la Sección 1.6.2 expondremos las relaciones de inclusión entre los espacios de Lorentz $\ell^{p,q}$ y podremos evidenciar las modificaciones que surgen al considerar espacios medidos completamente atómicos, veremos además algunos casos interesantes que no habían sido tomados en cuenta anteriormente. Finalmente, en la Sección 1.6.3 estudiaremos la dualidad en estos espacios de sucesiones.

1.6.1. Definiciones generales

Empezamos exponiendo la contraparte discreta de las herramientas utilizadas para la descripción de los espacios de Lorentz en el caso continuo.

Sea pues $a = (a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión a valores en $\mathbb{K}$ y sea $\varphi : \mathbb{N}^* \longmapsto \mathbb{N}^*$ una permutación del conjunto de los números naturales. Definimos el *reordenamiento* a' de la sucesión a escribiendo $(a'_n)_{n\geq 1} = (a_{\varphi(n)})_{n\geq 1}$.

En caso de que tengamos que trabajar simultáneamente con una sucesión a y con un cierto reordenamiento a_φ, para mayor claridad (siempre y cuando sea posible) utilizaremos los índices $n \geq 1$ para designar a los elementos de la sucesión original y los índices $k \geq 1$ para designar los elementos de la sucesión reordenada.

Definición 1.6.1 (Reordenamiento decreciente) *Si $a = (a_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión a valores en $\mathbb{K}$, entonces definimos el* reordenamiento decreciente *de la sucesión a, que notaremos $a^* = (a^*_k)_{k\geq 1}$, a la sucesión $(|a_n|)_{n\geq 1}$ reordenada de manera decreciente: para $k = 1, 2, ...$ se tiene*

$$a^*_1 \geq a^*_2 \geq a^*_3 \geq ... \geq 0.$$

Observación 1.19

1) La sucesión $a^* = (a^*_k)_{k\geq 1}$ está totalmente determinada por la sucesión inicial $(a_n)_{n\geq 1}$. Sin embargo, cuando los valores de esta sucesión inicial no son todos distintos, hay que tener en mente que la manera de obtener la sucesión a^* es ambigua pues dos permutaciones distintas pueden generar el mismo resultado[27], que es esencialmente único, lo cual es más que suficiente para nuestros fines.

2) Por construcción, la sucesión a^* codifica la misma información que la sucesión $(|a_n|)_{n\geq 1}$.

Notemos que también podemos definir el reordenamiento decreciente de una sucesión de la misma manera que para una función, en efecto tenemos para todo $k \geq 1$

$$a^*_k = \inf_{\alpha > 0} \{\alpha : Card\,(\{n \in \mathbb{N}^* : |a_n| > \alpha\}) \leq k - 1\}, \tag{1.103}$$

pero dado que en el caso de sucesiones podemos razonar por medio de permutaciones, privilegiaremos por lo general -aunque no siempre- este punto de vista que es más natural.

Aquí algunas propiedades inmediatas del reordenamiento decreciente de sucesiones.

Proposición 1.6.1 *Sea $a = (a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión a valores en $\mathbb{K}$, entonces*

1) *Se tiene la identidad $a^* = (|a|)^*$.*

2) *Si la sucesión inicial a es positiva y decreciente se tiene $a^* = a$.*

3) *Si $\lambda > 0$ un escalar se tiene $(\lambda a)^* = |\lambda| a^*$.*

[27]Pensar por ejemplo en una sucesión constante.

4) Si $0 < p < +\infty$*, entonces* $(|a|^p)^* = (a^*)^p$*.*

La verificación de estos puntos no es difícil de manera que se lo deja a cargo del lector.

Definición 1.6.2 (Sucesiones equidistribuidas) *Si* $a = (a_n)_{n\geq 1}$ *y* $b = (b_n)_{n\geq 1}$ *son dos sucesiones a valores en* $\mathbb{K}$*, diremos que* a *y* b *son* equidistribuidas *si al reordenarles decrecientemente se obtiene la misma sucesión, es decir si* $a^* = b^*$*.*

Recordemos ahora la desigualdad de Hardy-Littlewood y algunas implicaciones de esta desigualdad en el caso de espacios de sucesiones.

Teorema 1.6.1 (Hardy-Littlewood) *Si* $a = (a_n)_{n\geq 1}$ *y* $b = (b_n)_{n\geq 1}$ *son dos sucesiones a valores en* $\mathbb{K}$*, entonces se tiene la desigualdad*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n b_n| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} a_k^* b_k^*. \tag{1.104}$$

Este resultado indica que la suma del producto de dos sucesiones es siempre mayorada por la suma del producto de los reordenamientos decrecientes de las sucesiones respectivas. La verificación de este hecho sigue exactamente las mismas etapas expuestas en el Teorema 1.2.3, página 57, de manera que los detalles quedan a cargo del lector.

Finalmente, dado que el espacio medido $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*), Card)$ es resonante, tenemos el resultado siguiente.

Proposición 1.6.2 *Sean* $a = (a_n)_{n\geq 1}$ *y* $b = (b_n)_{n\geq 1}$ *dos sucesiones a valores en* $\mathbb{K}$*. Entonces se tiene la identidad*

$$\sup_{\tilde{b}} \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n \tilde{b}_n| = \sum_{n=1}^{+\infty} a_k^* b_k^*,$$

en donde el supremo corre sobre todas las sucesiones $\tilde{b}$ *que son equidistribuidas con la sucesión* b*.*

La verificación de esta proposición es inmediata por el Teorema 1.2.4 página 66.

Una vez que hemos sentado estas notaciones, y para mayor claridad en nuestra exposición, vamos a descomponer nuestro estudio de la manera siguiente.

A) Primera caracterización de los espacios de Lorentz $\ell^{p,q}$,

B) Distancias, normas y propiedades topológicas,

C) Segunda caracterización de los espacios de Lorentz $\ell^{p,q}$,

D) Desigualdades de Hölder.

A) Primera caracterización de los espacios de Lorentz $\ell^{p,q}$

Dado que cuando se trabaja con sucesiones, la noción de reordenamiento decreciente es muy *natural* y *directa* (en el sentido que basta considerar una permutación adecuada para obtener el resultado deseado), entonces no es indispensable pasar por la función de distribución para dar una primera caracterización de los espacios de Lorentz discretos y tenemos directamente la siguiente definición:

Definición 1.6.3 (Espacios $\ell^{p,q}$) *Sean $0 < p \leq +\infty$ y $0 < q < +\infty$ dos índices reales y sea $a = (a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión a valores en $\mathbb{K}$. Diremos que esta sucesión pertenece al espacio de Lorentz $\ell^{p,q}(\mathbb{N}^*)$ si la cantidad siguiente es finita*

$$\|a\|_{\ell^{p,q}} = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} k^{\frac{q}{p}-1} a_k^{*\,q}\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.105}$$

Si $q = +\infty$ y si $0 < p \leq +\infty$ escribiremos

$$\|a\|_{\ell^{p,\infty}} = \sup_{k\geq 1} \left\{k^{\frac{1}{p}} a_k^*\right\}. \tag{1.106}$$

Recordemos que la notación $\|\cdot\|_{\ell^{p,q}}$ es ligeramente abusiva pues esta funcional no es necesariamente una *norma* como tendremos la oportunidad de verlo un poco más adelante.

Se tienen las siguientes identificaciones de espacios:

- Si $0 < p = q < +\infty$ entonces el espacio de Lorentz discreto $\ell^{p,p}(\mathbb{N}^*)$ no es más que el espacio de Lebesgue de sucesiones $\ell^p(\mathbb{N}^*)$. En efecto tenemos

$$\|a\|_{\ell^{p,p}} = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} a_k^{*\,p}\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|a\|_{\ell^p},$$

  puesto que la suma global no se afecta al considerar una permutación (Para la estabilidad de esta funcional con respecto a las permutaciones ver el Ejercicio 1.18 al final de este capítulo).

- En el caso $p = q = +\infty$ tenemos

$$\|a\|_{\ell^{\infty,\infty}} = \sup_{k\geq 1} a_k^* = \sup_{n\geq 1} |a_n| = \|a\|_{\ell^\infty},$$

  de donde se obtiene la identificación de espacios $\ell^{\infty,\infty}(\mathbb{N}^*) = \ell^p(\mathbb{N}^*)$.

A la luz de los cálculos realizados en la páginas anteriores, no es muy dificil exhibir sucesiones que pertenecen a los espacios de Lorentz $\ell^{p,q}$: por ejemplo toda sucesión que tiene un numero *finito* de valores no nulos pertenece a cada uno de estos espacios.

Notemos ahora que una primera gran diferencia que aparece al trabajar con medidas completamente atómicas está dada al considerar el espacio de Lorentz discreto $\ell^{\infty,q}(\mathbb{N}^*)$ con $0 < q < +\infty$ pues contrariamente a su homólogo $L^{\infty,q}$, el espacio $\ell^{\infty,q}$ no está reducido al elemento nulo (ver la Observación 1.8, página 69) puesto que por la definición (1.105) se tiene

$$\|a\|_{\ell^{\infty,q}} = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} k^{-1} a_k^{*\,q}\right)^{\frac{1}{q}}, \qquad 0 < q < +\infty,$$

y existen sucesiones no triviales que verifican $\|a\|_{\ell^{\infty,q}} < +\infty$: basta por ejemplo considerar la sucesión $a_n = n^{-\frac{1}{q}}$, para $n \geq 1$, de manera que $a_k^{*\,q} = k^{-1}$ y entonces

$$\|a\|_{\ell^{\infty,q}} = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} k^{-1} a_k^{*\,q}\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} k^{-2}\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\frac{\pi^2}{6}\right)^{\frac{1}{q}} < +\infty.$$

Esta observación muestra que cuando $p = +\infty$ existe una diferencia fundamental entre los espacios de Lorentz discretos $\ell^{p,q}$ y los espacios $L^{p,q}$. Tendremos la oportunidad de ver otras diferencias posteriormente.

B) Distancias, normas y primeras propiedades topológicas

En este párrafo nos interesamos en el estudio de algunas propiedades relativas a la normabilidad de estos espacios $\ell^{p,q}(\mathbb{N}^*)$ tal como han sido caracterizados en la sección anterior y, de igual manera que sus homólogos continuos, estas características dependerán de los valores de los índices p y q.

Tenemos un primer resultado.

Proposición 1.6.3 *Sean $0 < p \leq +\infty$ y $0 < q \leq +\infty$ dos índices reales y sea $a = (a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión a valores en $\mathbb{K}$.*

1) Si $\|a\|_{\ell^{p,q}} = 0$, entonces $a = 0$.

2) Si $\lambda > 0$ es un escalar, entonces se tiene $\|\lambda a\|_{\ell^{p,q}} = |\lambda|\|a\|_{\ell^{p,q}}$.

Prueba. El primer punto se deduce directamente a partir de las expresiones (1.105) y (1.106): si estas cantidades son nulas, entonces $a_k^* = 0$ para todo $k \geq 1$, y dado que esta sucesión no es más que una permutación del valor absoluto de la sucesión original, se obtiene que $a = 0$. El segundo punto se obtiene sin problema a partir de la Proposición 1.6.1 anterior. ■

Como vemos, el único punto que falta verificar para que la funcional $\|\cdot\|_{\ell^{p,q}}$ sea una verdadera norma es la desigualdad triangular y nuestro estudio se concentrará en este punto particular: empezaremos viendo que todos estos espacios son cuasi-normados para luego ir poco a poco aumentando la estructura hasta llegar a la noción de espacio de Banach.

Necesitaremos el siguiente lema.

Lema 1.6.1 *Sean $(a_n)_{n\geq 1}$ y $(b_n)_{n\geq 1}$ dos sucesiones a valores en $\mathbb{K}$. Notaremos $([a+b]^*_k)_{k\geq 1}$ el reordenamiento decreciente de la sucesión $(|a_n+b_n|)_{n\geq 1}$. Tenemos entonces, para todo entero $k\geq 1$, las desigualdades*

$$[a+b]^*_{2k} \leq [a+b]^*_{2k-1} \leq a^*_k + b^*_k.$$

Prueba. La primera estimación es evidente puesto que hemos reordenado decrecientemente a la sucesión $(|a_n+b_n|)_{n\geq 1}$. Pasemos a la segunda desigualdad: dado que para $k>1$ se tiene la inclusión de conjuntos

$$\{n\geq 1:\ |a_n+b_n| > a^*_k + b^*_k\} \subset \{n\geq 1:\ |a_n| > a^*_k\} \cup \{n\geq 1:\ |b_n| > b^*_k\},$$

obtenemos la mayoración

$$\begin{aligned} Card\{|a_n+b_n| > a^*_k + b^*_k\} &\leq Card\{|a_n| > a^*_k\} + Card\{|b_n| > b^*_k\} \\ &\leq 2(k-1). \end{aligned}$$

Pero por la expresión (1.103) tenemos

$$[a+b]^*_{2k-1} = \inf_{\alpha>0}\{\alpha : Card\,(\{n\in\mathbb{N}^* : |a_n+b_n| > \alpha\}) \leq 2(k-1)\},$$

de donde se deduce la mayoración $[a+b]^*_{2k-1} \leq a^*_k + b^*_k$. ■

El teorema a continuación nos indica qué estructura general se dispone sobre los espacios de Lorentz $\ell^{p,q}$ donde $0<p<q\leq +\infty$.

Teorema 1.6.2 *Si $0<p<q\leq+\infty$, el espacio $(\ell^{p,q}(\mathbb{N}^*), \|\cdot\|_{\ell^{p,q}})$ es un espacio de cuasi-Banach y se tiene, para todo par de sucesiones $a=(a_n)_{n\geq 1}$ y $b=(b_n)_{n\geq 1}$ pertenecientes a $\ell^{p,q}(\mathbb{N}^*)$, la estimación*

$$\|a+b\|_{\ell^{p,q}} \leq 2^\alpha \left(\|a\|_{\ell^{p,q}} + \|b\|_{\ell^{p,q}}\right) \tag{1.107}$$

en donde $\alpha = \frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1$ si $0<q<1$, $\alpha=\frac{1}{p}$ si $1\leq q<+\infty$ y $\alpha=\frac{1}{p}+1$ si $q=+\infty$.

Se tiene esencialmente el mismo resultado cuando $0<q<p\leq+\infty$, pero reemplazando la constante 2^α en la estimación (1.107) por las constantes $3^{\frac{1}{q}}2^{\frac{1}{p}-1}$ si $0<q<1$ y $3^{\frac{1}{q}}2^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$ si $1\leq q<+\infty$.

Veremos en las páginas siguientes cuándo es posible fortalecer este resultado: la ventaja de este teorema es que proporciona una estructura *común* a todos los espacios de Lorentz $\ell^{p,q}$.

Demostración. Empecemos suponiendo que se tiene $0<p<q<+\infty$. Por la expresión (1.105) tenemos entonces que estudiar la cantidad

$$\|a+b\|^q_{\ell^{p,q}} = \sum_{k=1}^{+\infty} k^{\frac{q}{p}-1}\left([a+b]^*_k\right)^q,$$

que descomponemos de la siguiente manera

$$\|a+b\|^q_{\ell^{p,q}} = \sum_{k=1}^{+\infty}(2k-1)^{\frac{q}{p}-1}\left([a+b]^*_{2k-1}\right)^q + (2k)^{\frac{q}{p}-1}\left([a+b]^*_k\right)^q.$$

Aplicamos ahora el Lema 1.6.1 y obtenemos

$$\begin{aligned} \|a+b\|^q_{\ell^{p,q}} &\leq \sum_{k=1}^{+\infty}(2k-1)^{\frac{q}{p}-1}(a^*_k+b^*_k)^q + (2k)^{\frac{q}{p}-1}(a^*_k+b^*_k)^q \\ &\leq \sum_{k=1}^{+\infty}\left((2k-1)^{\frac{q}{p}-1}+(2k)^{\frac{q}{p}-1}\right)(a^*_k+b^*_k)^q \\ &\leq \sum_{k=1}^{+\infty}(2k)^{\frac{q}{p}-1}\left(\frac{(2k-1)^{\frac{q}{p}-1}}{(2k)^{\frac{q}{p}-1}}+1\right)(a^*_k+b^*_k)^q, \end{aligned} \tag{1.108}$$

y como $0<p<q<+\infty$, podemos escribir

$$\|a+b\|^q_{\ell^{p,q}} \leq 2^{\frac{q}{p}}\sum_{k=1}^{+\infty}k^{\frac{q}{p}-1}(a^*_k+b^*_k)^q.$$

Extrayendo la raíz q-ésima en la fórmula anterior se tiene

$$\|a+b\|_{\ell^{p,q}} \leq 2^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\left(k^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}a^*_k + k^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}b^*_k\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Si $q\geq 1$ se concluye fácilmente por la desigualdad de Minkowski usual, si en cambio $0<q<1$ se obtiene la mayoración

$$\|a+b\|_{\ell^{p,q}} \leq 2^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1}\left(\|a\|_{\ell^{p,q}}+\|b\|_{\ell^{p,q}}\right),$$

y junto con la Proposición 1.6.3, obtenemos que la funcional $\|\cdot\|_{\ell^{p,q}}$ es una cuasi-norma en el caso $0<p<q<+\infty$.

Pasemos al caso $0<p<q=+\infty$, con la ayuda del Lema 1.6.1 estudiamos la cantidad

$$\begin{aligned} \|a+b\|_{\ell^{p,\infty}} &= \sup_{k\geq 1} k^{\frac{1}{p}}[a+b]^*_k \\ &\leq \sup_{k\geq 1}(2k-1)^{\frac{1}{p}}[a+b]^*_{2k-1} + \sup_{k\geq 1}(2k)^{\frac{1}{p}}[a+b]^*_{2k} \\ &\leq \sup_{k\geq 1}(2k-1)^{\frac{1}{p}}(a^*_k+b^*_k) + \sup_{k\geq 1}(2k)^{\frac{1}{p}}(a^*_k+b^*_k) \\ &\leq 2^{\frac{1}{p}+1}\sup_{k\geq 1}k^{\frac{1}{p}}(a^*_k+b^*_k) \leq 2^{\frac{1}{p}+1}\left(\|a\|_{\ell^{p,\infty}}+\|b\|_{\ell^{p,\infty}}\right), \end{aligned}$$

y obtenemos que en este caso tambíen la funcional $\|\cdot\|_{\ell^{p,\infty}}$ es una cuasi-norma.

Para el caso cuando $0 < q < p \leq +\infty$, basta observar que en la fórmula (1.108) se tiene $\left(\frac{(2k-1)^{\frac{q}{p}-1}}{(2k)^{\frac{q}{p}-1}} + 1\right) < 3$.

El hecho de ver que los espacios $(\ell^{p,q}(\mathbb{N}^*), \|\cdot\|_{\ell^{p,q}})$ son completos se deduce de manera totalmente similar que los espacios ℓ^p (ver el Teorema 4.6.1 del Volumen 1), de manera que los detalles son dejados al lector. ■

Algunos casos tratados en este resultado anterior no pueden ser fortalecidos para obtener una verdadera norma como nos lo explica la proposición a continuación.

Proposición 1.6.4 *Si $0 < p < q \leq +\infty$ entonces la funcional $\|\cdot\|_{\ell^{p,q}}$ definida sobre el espacio $\ell^{p,q}(\mathbb{N}^*)$ y dada en la Definición 1.6.3 no determina una norma. En particular no se tiene en toda generalidad la desigualdad triangular.*

Prueba. Suponemos primero que $0 < p < q < +\infty$. Fijemos dos reales positivos α y β tales que $1 < \frac{\alpha}{\beta} < (2^{\frac{q}{p}-1})^{1/(q-1)}$. Utilizando el Teorema del valor medio, podemos ver que existen dos reales positivos δ_1 y δ_2 tales que

$$q\delta_1^{q-1} = \frac{\left(\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^q - \beta^q\right)}{\frac{(\alpha-\beta)}{2}}, \qquad q\delta_2^{q-1} = \frac{\left(\alpha^q - \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^q\right)}{\frac{(\alpha-\beta)}{2}},$$

y que verifican las desigualdades $\beta < \delta_1 < \frac{\alpha+\beta}{2} < \delta_2 < \alpha$. A partir de estos hechos obtenemos

$$\frac{\left(\alpha^q - \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^q\right)}{\left(\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^q - \beta^q\right)} = \left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)^{q-1} \leq \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{q-1} \leq 2^{\frac{q}{p}-1},$$

y por lo tanto se tiene la mayoración

$$\alpha^q + 2^{\frac{q}{p}-1}\beta^q < \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^q + 2^{\frac{q}{p}-1}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^q. \tag{1.109}$$

Con estos cálculos preliminares podemos construir el contra ejemplo deseado considerando las sucesiones

$$a = (\alpha, \beta, 0, 0, 0, ...) \quad \text{y} \quad b = (\beta, \alpha, 0, 0, 0, ...),$$

el lector observará sin problema que gracias a la desigualdad (1.109) se obtiene la estimación

$$\begin{aligned} \|a\|_{\ell^{p,q}} + \|b\|_{\ell^{p,q}} = 2(\alpha^q + 2^{\frac{q}{p}-1}\beta^q)^{\frac{1}{q}} &< \left((\alpha+\beta)^q + 2^{\frac{q}{p}-1}(\alpha+\beta)^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \|a_n + b_n\|_{\ell^{p,q}}; \end{aligned}$$

lo que invalida la desigualdad triangular y esto implica que la funcional $\|\cdot\|_{\ell^{p,q}}$ no es una norma para estos valores de p y q.

Pasemos ahora al caso cuando $q = +\infty$. Con lo expuesto en las líneas precedentes es suficiente fijar dos reales α y β tales que $1 < \alpha/\beta < 2^{\frac{1}{p}}$. En efecto, como el lector puede verificar fácilmente por medio de un cálculo sencillo, tenemos por un lado que $\|a\|_{\ell^{p,\infty}} = \|b\|_{\ell^{p,\infty}} = 2^{\frac{1}{p}}\beta$ mientras que por otro lado $\|a+b\|_{\ell^{p,\infty}} = 2^{\frac{1}{p}}(\alpha+\beta)$ de modo que se tiene

$$\|a\|_{\ell^{p,\infty}} + \|b\|_{\ell^{p,\infty}} < \|a+b\|_{\ell^{p,\infty}},$$

lo que termina la demostración de la proposición. ■

El hecho que la cantidad $\|\cdot\|_{\ell^{p,q}}$ no sea una norma cuando $1 < p < q \leq +\infty$, puede ser contornado en ciertos casos considerando una funcional *equivalente* como tendremos la oportunidad de verlo en las páginas que siguen. En el caso cuando $1 \leq q \leq p \leq +\infty$ tenemos en cambio el resultado a continuación.

Teorema 1.6.3 (Normabilidad $\ell^{p,q}$ - I) *Si $1 \leq q \leq p \leq +\infty$ entonces el espacio $(\ell^{p,q}(\mathbb{N}^*), \|\cdot\|_{\ell^{p,q}})$ es un espacio de normado completo, es por lo tanto un espacio de Banach.*

Demostración. Por la Proposición 1.6.3, debemos concentrarnos en obtener la desigualdad triangular para la funcional $\|\cdot\|_{\ell^{p,q}}$.

En el caso cuando $1 \leq q \leq p < +\infty$ y dado que el espacio $\mathbb{N}^*$ es resonante, basta entonces repetir los argumentos utilizados en la demostración del Teorema 1.2.10 presentado en la página 82 (es decir usar esencialmente la Proposición 1.6.2 de la página 162) para obtener la desigualdad triangular.

El caso $p = +\infty$ y $1 \leq q < +\infty$ puede ser tratado de forma similar, en efecto, si $a = (a_n)_{n\geq 1}$ y $b = (b_n)_{n\geq 1}$ son dos sucesiones que pertenecen al espacio $\ell^{\infty,q}(\mathbb{N}^*)$ con $1 \leq q < +\infty$ entonces, utilizando el hecho que el espacio medido de base es resonante, podemos escribir por la Proposición 1.6.2:

$$\|a+b\|_{\ell^{\infty,q}} = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} k^{-1}\left([a+b]_k^*\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sup \sum_{n=1}^{+\infty} c_n|a_n+b_n|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

en donde el supremo corre sobre todas las sucesiones $(c_n)_{n\geq 1}$ cuyo reordenamiento decreciente es igual a la sucesión k^{-1} para $k \geq 1$. Ahora utilizando la desigualdad triangular usual tenemos

$$\|a+b\|_{\ell^{\infty,q}} \leq \sup\left(\sum_{n=1}^{+\infty} c_n|a_n|^q\right)^{\frac{1}{q}} + \sup\left(\sum_{n=1}^{+\infty} c_n|b_n|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

pero dado que el reordenamiento decreciente de la sucesión n^{-1} es k^{-1} y utilizando una vez más el hecho que el espacio medido de base es resonante tenemos

$$\begin{aligned}\|a+b\|_{\ell^{\infty,q}} &\leq \left(\sum_{k=1}^{+\infty} k^{-1}a_k^{*\,q}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{k=1}^{+\infty} k^{-1}b_k^{*\,q}\right)^{\frac{1}{q}}\\ &\leq \|a\|_{\ell^{\infty,q}} + \|b\|_{\ell^{\infty,q}}.\end{aligned}$$

Finalmente, en el caso $q = p = +\infty$, tenemos la identificación de espacios $\ell^{\infty,\infty} = \ell^{\infty}$, de donde se obtiene directamente que es un espacio normado.

Una vez que hemos obtenido que la funcional $\|\cdot\|_{\ell^{p,q}}$ es una norma, el hecho de verificar que el espacio $(\ell^{p,q}(\mathbb{N}^*), \|\cdot\|_{\ell^{p,q}})$ es completo con respecto a esta norma sigue las mismas etapas detalladas en el Teorema 4.6.1 del Volumen 1, de manera que los detalles quedan a cargo del lector. ■

C) Segunda caracterización de los espacios de Lorentz $\ell^{p,q}$

El objetivo de esta sección es presentar otra funcional (equivalente a la funcional $\|\cdot\|_{\ell^{p,q}}$ dada en la Definición 1.6.3) que verifique la desigualdad triangular y que permita definir a los espacios de Lorentz de sucesiones $\ell^{p,q}$. Esta funcional equivalente se expresa por medio de la noción de función maximal cuya contra parte discreta definimos a continuación.

Definición 1.6.4 (Sucesión Maximal) *Si $a = (a_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión, definimos la* sucesión maximal *$a^{**} = (a_k^{**})_{k\geq 1}$ asociada por la expresión*

$$a_k^{**} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} a_i^*.$$

La sucesión maximal posee algunas propiedades muy interesantes, en particular disponemos de la minoración a continuación.

Proposición 1.6.5 *Sea $a = (a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión y sean a_k^* y a_k^{**} su sucesión reordenada de manera decreciente y su función maximal asociada. Entonces tenemos la mayoración*

$$a_k^{**} \geq a_k^*.$$

Prueba. En efecto, puesto que la sucesión a_k^* es decreciente podemos escribir

$$a_k^{**} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} a_i^* \geq a_k^* \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} = a_k^*,$$

de donde se obtiene el resultado buscado. ■

Pero sin duda, la propiedad más importante de las sucesiones maximales, y es lo que justifica su uso, es que se tiene una desigualdad triangular puntual en el sentido siguiente.

Proposición 1.6.6 *Si $a = (a_n)_{n\geq 1}$ y $b = (b_n)_{n\geq 1}$ son dos sucesiones, entonces se tiene la desigualdad triangular siguiente*

$$[a+b]_k^{**} \leq a_k^{**} + b_k^{**},$$

para todo $k \geq 1$.

Prueba. La verificación de esta desigualdad sigue los mismos pasos que los del Corolario 1.3.1 presentado en la página 91, puesto que el espacio medido sobre el cual estamos trabajando es un espacio medido resonante. ■

Con esta importante desigualdad puntual, podemos considerar ahora la funcional a continuación.

Definición 1.6.5 *Si $1 < p < +\infty$ y si $1 \leq q < +\infty$ definimos la funcional $|||\cdot|||_{p,q}$ por medio de la expresión*

$$|||a|||_{p,q} = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} k^{\frac{q}{p}-1} a_k^{**\,q}\right)^{\frac{1}{q}} \tag{1.110}$$

Nótese que por la proposición anterior disponemos para esta funcional de la desigualdad triangular: si a, b son dos sucesiones y si $1 \leq q < +\infty$

$$\begin{aligned} |||a+b|||_{p,q} &= \left(\sum_{k=1}^{+\infty} k^{\frac{q}{p}-1} [a+b]_k^{**\,q}\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{k=1}^{+\infty} k^{\frac{q}{p}-1} \left(a_k^{**\,q} + a_k^{**\,q}\right)\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{+\infty} k^{\frac{q}{p}-1} a_k^{**\,q}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{k=1}^{+\infty} k^{\frac{q}{p}-1} b_k^{**\,q}\right)^{\frac{1}{q}} = |||a|||_{p,q} + |||b|||_{p,q}, \end{aligned}$$

y de esta manera, para dotar a los espacios de sucesiones $\ell^{p,q}$ con una norma cuando $1 < p < +\infty$ y $1 \leq q < +\infty$, solo debemos verificar que las funcionales $\|\cdot\|_{p,q}$ y $|||\cdot|||_{p,q}$ son equivalentes.

Teorema 1.6.4 (Caracterización equivalente) *Sean p, q dos índices reales tales que*

$$1 < p < +\infty \ \text{y} \ 1 \leq q \leq +\infty.$$

Para toda sucesión $a = (a_n)_{n\geq 1}$ que pertenece al espacio de Lorentz $\ell^{p,q}(\mathbb{N}^*)$ tenemos las desigualdades

$$\|a\|_{\ell^{p,q}} \leq |||a|||_{p,q} \leq \frac{p}{p-1}\|a\|_{\ell^{p,q}}. \tag{1.111}$$

Es decir que las cantidades $\|\cdot\|_{\ell^{p,q}}$ y $|||\cdot|||_{p,q}$ definen espacios equivalentes.

Demostración. La verificación sigue las mismas etapas presentadas en la demostración del Teorema 1.3.2 página 98. De manera que los detalles son dejados al lector. ■

Con esta caracterización equivalente y recopilando las informaciones anteriores obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 1.6.1 (Normabilidad $\ell^{p,q}$ - II) *En los siguientes casos el espacio $\ell^{p,q}(\mathbb{N}^*)$ puede ser dotado de una norma tal que sea un espacio de Banach:*

1) Si $1 < p < +\infty$ y $1 \leq q \leq +\infty$, *2) Si $p = +\infty$ y $1 \leq q < +\infty$*

3) Si $p = q = 1$ o $p = q = +\infty$.

Prueba. El primer punto no es más que el Teorema 1.6.4 anterior, mientras que el segundo punto está dado en el Teorema 1.6.3. Finalmente, el tercer punto se deduce directamente a partir de la identificación $\ell^{1,1} = \ell^1$ y $\ell^{\infty,\infty} = \ell^\infty$ entre espacios de Lorentz y de Lebesgue. ■

D) Desigualdades de Hölder

En esta sección estudiamos diferentes versiones de las desigualdades de Hölder en los espacios de Lorentz de sucesiones. Estas desigualdades permiten controlar el producto de dos sucesiones y son una herramienta muy importante al estudiar la dualidad.

El primer resultado que presentamos es totalmente clásico.

Proposición 1.6.7 (Desigualdad de Hölder - I) *Sean $a = (a_n)_{n\geq 1}$ y $b = (b_n)_{n\geq 1}$ dos sucesiones que pertenecen a los espacios de Lorentz $\ell^{p,q}(\mathbb{N}^*)$ y $\ell^{p',q'}(\mathbb{N}^*)$ respectivamente, en donde los índices $1 < p, p', q, q' < +\infty$ verifican las relaciones $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$. Tenemos entonces la siguiente desigualdad*

$$\|ab\|_{\ell^1} \leq \|a\|_{\ell^{p,q}} \|b\|_{\ell^{p',q'}}.$$

Prueba. Utilizando la desigualdad de Hardy-Littlewood (1.104) podemos escribir

$$\|ab\|_{\ell^1} = \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n b_n| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} a_k^* b_k^* = \sum_{k=1}^{+\infty} k^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} a_k^* k^{\frac{1}{p'}-\frac{1}{q'}} b_k^*,$$

aplicamos ahora la desigualdad de Hölder usual para obtener la mayoración

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} k^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} a_k^* k^{\frac{1}{p'}-\frac{1}{q'}} b_k^* &\leq \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \left(k^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} a_k^*\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \left(k^{\frac{1}{p'}-\frac{1}{q'}} b_k^*\right)^{q'}\right)^{\frac{1}{q'}} \\ &\leq \|a\|_{\ell^{p,q}} \|b\|_{\ell^{p',q'}}. \end{aligned}$$

■

Cuando consideramos los casos extremos $q = 1$ y $q' = +\infty$ tenemos el resultado a continuación.

Proposición 1.6.8 (Desigualdad de Hölder - II) *Sean $a = (a_n)_{n\geq 1}$ y $b = (b_n)_{n\geq 1}$ dos sucesiones que pertenecen a los espacios de Lorentz $\ell^{p,1}(\mathbb{N}^*)$ y $\ell^{p',\infty}(\mathbb{N}^*)$ respectivamente, en donde los índices $1 \leq p, p' \leq +\infty$ verifican la relación $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Entonces tenemos la desigualdad*

$$\|ab\|_{\ell^1} \leq \|a\|_{\ell^{p,1}} \|a\|_{\ell^{p',\infty}}.$$

Prueba. Supongamos para empezar que $1 < p, p' < +\infty$, entonces por la desigualdad de Hardy-Littlewood (1.104) tenemos

$$\begin{aligned}\|ab\|_{\ell^1} &= \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n b_n| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} a_k^* b_k^* = \sum_{k=1}^{+\infty} k^{\frac{1}{p}-1}\, a_k^*\, k^{\frac{1}{p'}} b_k^* \\ &\leq \sup_{k\geq 1}\left\{k^{\frac{1}{p'}} b_k^*\right\} \sum_{k=1}^{+\infty} k^{\frac{1}{p}-1} a_k^* = \|a\|_{\ell^{p,1}} \|b\|_{\ell^{p',\infty}}.\end{aligned}$$

En el caso cuando $p = +\infty$ y $p' = 1$ escribimos

$$\begin{aligned}\|ab\|_{\ell^1} &= \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n b_n| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} a_k^* b_k^* = \sum_{k=1}^{+\infty} k^{-1}\, a_k^*\, k b_k^* \\ &\leq \sup_{k\geq 1}\{k b_k^*\} \sum_{k=1}^{+\infty} k^{-1} a_k^* = \|a\|_{\ell^{\infty,1}} \|b\|_{\ell^{1,\infty}}.\end{aligned}$$

■

Notemos que en la estimación anterior interviene el espacio $\ell^{\infty,1}$ que no es trivial en el caso de espacios de sucesiones. Recordemos que este espacio está reducido al elemento $\{0\}$ en el caso de los espacios de funciones como nos lo indica la Observación 1.8, página 69.

1.6.2. Relaciones de inclusión

En esta sección estudiamos las relaciones existentes entre los diferentes espacios de Lorentz discretos $\ell^{p,q}$ en función de los parámetros p y q. Si bien algunos resultados de inclusión que vamos a presentar no son difíciles de intuir, en el sentido que siguen lo ya expuesto en el caso continuo, las Proposiciones 1.6.10 y 1.6.11 nos presentan nuevas relaciones que son propias al caso discreto.

Empezamos con un lema.

Lema 1.6.2 *Sean p, q dos índices reales tales que $0 < p, q < +\infty$. Si $a \in \ell^{p,q}(\mathbb{N}^*)$, entonces para todo $k \in \mathbb{N}^*$ tenemos:*

1) $a_k^* \leq k^{-\frac{1}{p}} \|a\|_{\ell^{p,q}}$ si $0 < q \leq p < +\infty$,

2) $a_k^* \leq (\frac{q}{p})^{\frac{1}{q}}\, k^{-\frac{1}{p}} \|a\|_{\ell^{p,q}}$ si $0 < p < q < +\infty$,

3) Además si $p = +\infty$ y $0 < q \leq +\infty$ se tiene la desigualdad siguiente para todo $k \in \mathbb{N}^*$:
$$a_k^* \leq \|a\|_{\ell^{\infty,q}}.$$

Prueba. Por definición y usando el hecho que la sucesión a^* es decreciente, tenemos

$$\|a\|_{\ell^{p,q}}^q = \sum_{j=1}^{+\infty} j^{\frac{q}{p}-1} a_j^{*\,q} \quad \geq \quad \sum_{j=1}^{k} j^{\frac{q}{p}-1} a_j^{*\,q} \geq a_k^{*\,q} \sum_{j=1}^{k} j^{\frac{q}{p}-1}. \tag{1.112}$$

Luego si $q = p$ o si $q < p$ obtenemos fácilmente el primer punto del lema.

Para el caso $p < q$, observando que $(\frac{q}{p})\, j^{\frac{q}{p}-1} \geq j^{\frac{q}{p}} - (j-1)^{\frac{q}{p}}$, se concluye a partir de la estimación (1.112) el segundo punto del lema.

La última parte del lema es evidente si $p = q = +\infty$ pues $\ell^{\infty,\infty} = \ell^{\infty}$. Suponemos entonces que $0 < q < +\infty$ y utilizamos la mayoración (1.112) para obtener

$$\|a\|^q_{\ell^{\infty,q}} = \sum_{j=1}^{+\infty} j^{-1} a_j^{*\,q} \geq a_k^{*\,q} \sum_{j=1}^{k} j^{-1} \geq a_k^{*\,q}.$$

■

El primer resultado de inclusión entre los espacios de Lorentz de sucesiones que exponemos nos indica que estos espacios son *crecientes* con respecto al segundo parámetro que sirve para caracterizarlos, más precisamente tenemos:

Proposición 1.6.9 (Inclusiones de espacios con el primer índice p fijo) *Sea $0 < p \leq +\infty$ un índice fijo y sean q_1, q_2 dos parámetros reales tales que $0 < q_1 < q_2 \leq +\infty$. Entonces tenemos la inclusión*

$$\ell^{p,q_1}(\mathbb{N}^*) \subset \ell^{p,q_2}(\mathbb{N}^*).$$

Más precisamente se tienen las siguientes estimaciones

$$\|a\|_{\ell^{p,q_2}} \leq C(p, q_1, q_2)\|a\|_{\ell^{p,q_1}} \qquad si \quad p < q_1, \tag{1.113}$$

$$\|a\|_{\ell^{p,q_2}} \leq \|a\|_{\ell^{p,q_1}} \qquad si \quad p \geq q_1, \tag{1.114}$$

en donde $C(p, q_1, q_2) = (q_1/p)^{\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2}}$.

Prueba. Empezamos con el caso $0 < q_2 < +\infty$ y $0 < p < q_1 < +\infty$. Tenemos entonces

$$\|a\|^{q_2}_{\ell^{p,q_2}} = \sum_{k=1}^{+\infty} k^{\frac{q_2}{p}-1} a_k^{q_2} = \sum_{k=1}^{+\infty} k^{\frac{q_2}{p}-1} a_k^{*\,q_2 - q_1} a_n^{*\,q_1},$$

y utilizando la estimación $a_k^{*\,q_2-q_1} \leq \left(\frac{q_1}{p}\right)^{\frac{(q_2-q_1)}{q_1}} k^{-\frac{(q_2-q_1)}{p}} \|a\|^{q_2-q_1}_{\ell^{p,q_1}}$ que está dada por el segundo punto del Lema 1.6.2, podemos escribir

$$\begin{aligned}
\|a\|^{q_2}_{\ell^{p,q_2}} &\leq \left(\frac{q_1}{p}\right)^{\frac{(q_2-q_1)}{q_1}} \|a\|^{q_2-q_1}_{\ell^{p,q_1}} \sum_{k=1}^{+\infty} k^{\frac{q_2}{p}-1} k^{-\frac{(q_2-q_1)}{p}} a_k^{*\,q_1} \\
&\leq \left(\frac{q_1}{p}\right)^{\frac{(q_2-q_1)}{q_1}} \|a\|^{q_2-q_1}_{\ell^{p,q_1}} \sum_{k=1}^{+\infty} k^{\frac{q_1}{p}-1} a_k^{*\,q_1} \\
&\leq \left(\frac{q_1}{p}\right)^{\frac{(q_2-q_1)}{q_1}} \|a\|^{q_2-q_1}_{\ell^{p,q_1}} \|a\|^{q_1}_{\ell^{p,q_1}} = \left(\frac{q_1}{p}\right)^{\frac{(q_2-q_1)}{q_1}} \|a\|^{q_2}_{\ell^{p,q_1}},
\end{aligned}$$

de donde se obtiene la estimación

$$\|a\|_{\ell^{p,q_2}} \leq \left(\frac{q_1}{p}\right)^{\frac{1}{q}_1 - \frac{1}{q}_2} \|a\|_{\ell^{p,q_1}},$$

lo que concluye la demostración de la desigualdad (1.113). Cuando $0 < q_2 < +\infty$ y $0 < q_1 \leq p < +\infty$, la desigualdad (1.114) se deduce exactamente de la misma forma a partir de la primera parte del Lema 1.6.2 y es por lo tanto dejada al lector.

Si $q_2 = +\infty$, la verificación de la inclusión $\ell^{p,q_1} \subset \ell^{p,\infty}$ es sencilla gracias al Lema 1.6.2. En efecto se tiene

$$\|a\|_{\ell^{p,\infty}} = \sup_{k\geq 1} k^{\frac{1}{p}} a_k^* \leq C\|a\|_{\ell^{p,q_1}}$$

en donde $C = 1$ si $q_1 \leq p$ o $C = (\frac{q}{p})^{\frac{1}{q}}$ si $p < q_1$.

Finalmente, el caso cuando $p = +\infty$ se obtiene de manera similar y dejamos los detalles al lector. ■

Observación 1.20 Estas inclusiones entre espacios de sucesiones $\ell^{p,q}$ son las mismas que se observan en los espacios de funciones $L^{p,q}$ como nos lo indicaba el Teorema 1.2.9, página 75.

Consideremos ahora otro tipo de inclusiones. Esta vez fijamos el índice q, hacemos variar el parámetro p y obtenemos el resultado a continuación.

Proposición 1.6.10 (Inclusiones de espacios con el segundo índice q fijo) *Sean $0 < p_1 < p_2 \leq +\infty$ dos parámetros y sea $0 < q \leq +\infty$ un índice fijo. Entonces tenemos las inclusiones de espacios*

$$\ell^{p_1,q}(\mathbb{N}^*) \subset \ell^{p_2,q}(\mathbb{N}^*).$$

Prueba. Supongamos primero que $0 < p_2 < +\infty$. En el caso $0 < q < +\infty$, dado que se tiene $\frac{q}{p}_2 \leq \frac{q}{p}_1$ lo que implica $k^{\frac{q}{p_2}-1} \leq k^{\frac{q}{p_1}-1}$, entonces basta escribir

$$\|a\|^q_{\ell^{p_2,q}} = \sum_{k=1}^{+\infty} k^{\frac{q}{p_2}-1} a_k^{*\,q} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} k^{\frac{q}{p_1}-1} a_k^{*\,q} = \|a\|^q_{\ell^{p_1,q}}.$$

Para el caso $q = +\infty$, el razonamiento es muy similar, en efecto se tiene directamente

$$\|a\|_{\ell^{p_2,\infty}} = \sup_{k\geq 1} k^{\frac{1}{p_2}} a_k^* \leq \sup_{k\geq 1} k^{\frac{1}{p_1}} a_k^* = \|a\|_{\ell^{p_1,\infty}}.$$

Si suponemos ahora que $p_2 = +\infty$, tenemos si $0 < q < +\infty$

$$\|a\|^q_{\ell^{\infty,q}} = \sum_{k=1}^{+\infty} k^{-1} a_k^{*\,q} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} k^{\frac{q}{p_1}-1} a_k^{*\,q} = \|a\|^q_{\ell^{p_1,q}},$$

mientras que si $q = +\infty$ tenemos

$$\|a\|_{\ell^{\infty,\infty}} = \sup_{k\geq 1} a_k^* \leq \sup_{k\geq 1} k^{\frac{1}{p_1}} a_k^* = \|a\|_{\ell^{p_1,\infty}}$$

■

Como podemos ver, los espacios de Lorentz de sucesiones también son crecientes cuando se hace variar el primer parámetro que sirve para definirlos.

Observación 1.21 Es muy importante recalcar que estas inclusiones entre espacios de sucesiones $\ell^{p,q}$ *no son válidas* en los espacios de funciones $L^{p,q}$ y este es otro ejemplo de las diferencias notables que existen en el caso discreto con respecto al caso continuo.

Presentamos otro tipo de inclusiones que son propias al caso discreto.

Proposición 1.6.11 *Sean $0 < p_1 < p_2 \leq +\infty$, $0 < q < +\infty$ tres parámetros reales, entonces tenemos la inclusión de espacios*

$$\ell^{p_1,\infty}(\mathbb{N}^*) \subset \ell^{p_2,q}(\mathbb{N}^*),$$

y tenemos la desigualdad

$$\|a\|_{\ell^{p_2,q}} \leq C\|a\|_{\ell^{p_1,\infty}},$$

en donde $C = \left(\frac{p_1 p_2}{q(p_2-p_1)}\right)^{\frac{1}{q}}$ si $0 < p_2 < +\infty$ o $C = \left(\frac{p_1}{q}\right)^{\frac{1}{q}}$ si $p_2 = +\infty$.

Prueba. Fijemos para empezar $0 < p_2 < +\infty$. La verificación es entonces directa y es suficiente escribir

$$\begin{aligned}\|a\|_{\ell^{p_2,q}}^q = \sum_{k=1}^{+\infty} k^{\frac{q}{p_2}-1} a_k^{*\,q} &= \sum_{k=1}^{+\infty} k^{\frac{q}{p_2}-1} k^{-\frac{q}{p_1}} k^{\frac{q}{p_1}} a_k^{*\,q} \\ &\leq \sup_{k\geq 1} \left(k^{\frac{1}{p_1}} a_k^*\right)^q \sum_{k=1}^{+\infty} k^{-q(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2})-1},\end{aligned}$$

pero puesto que se tiene $q(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}) > 0$, la suma entre paréntesis converge y así obtenemos la estimación

$$\|a\|_{\ell^{p_2,q}}^q \leq C(q, p_1, p_2)\|a\|_{\ell^{p_1,\infty}}^q,$$

lo que termina la prueba en este caso. Obsérvese que la idea de la demostración no varía en lo más mínimo si consideramos el caso $p_2 = +\infty$. ■

En el siguiente gráfico ilustramos las inclusiones existentes de los espacios de Lorentz $\ell^{p,q}$, en donde los parámetros reales p_0, p_1, q, r verifican $0 < p_0 < 1$, $1 < p_1 < +\infty$, $0 < r < 1$ y $1 < q < +\infty$.

$$
\begin{array}{ccccccc}
p=p_0 & & p=1 & & p=p_1 & & p=+\infty \\
\hline
\ell^{p_0,r} & \subset & \ell^{1,r} & \subset & \ell^{p_1,r} & \subset & \ell^{\infty,r} \\
\cap & & \cap & & \cap & & \cap \\
\ell^{p_0,1} & \subset & \ell^{1,1}=\ell^1 & \subset & \ell^{p_1,1} & \subset & \ell^{\infty,1} \\
\cap & & \cap & & \cap & & \cap \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\cap & & \cap & & \cap & & \cap \\
\ell^{p_0,q} & \subset & \ell^{1,q} & \subset & \ell^{p_1,q} & \subset & \ell^{\infty,q} \\
\cap & & \cap & & \cap & & \cap \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\cap & & \cap & & \cap & & \cap \\
\ell^{p_0,r} & \subset & \ell^{1,\infty} & \subset & \ell^{p_1,\infty} & \subset & \ell^{\infty,\infty}=\ell^\infty
\end{array}
$$

Figura 1.11: Relaciones entre espacios de Lorentz discretos $\ell^{p,q}$

Observación 1.22 De igual manera que para los espacios de Lorentz continuos $L^{p,q}$, tenemos las inclusiones indicadas en las columnas. Pero la situación cambia radicalmente en el caso de los espacios de Lorentz discretos $\ell^{p,q}$ pues se dispone *también* de inclusiones *entre* las diferentes columnas. Nótese finalmente que todos estos espacios de sucesiones están incluidos en el espacio ℓ^∞.

1.6.3. Dualidad en los espacios de Lorentz $\ell^{p,q}$

Estudiamos ahora la dualidad en los espacios de Lorentz de sucesiones $\ell^{p,q}$ y vamos a evidenciar nuevamente que existen diferencias notables entre estos espacios discretos y sus homólogos continuos. Evidentemente, en los casos "normales" en donde los índices p, q verifican $1 < p, q < +\infty$, el comportamiento de los espacios $\ell^{p,q}$ es totalmente similar al de los espacios $L^{p,q}$, de manera que las diferencias surgen al considerar los otros casos.

Vamos a ver en particular que para establecer la dualidad entre espacios de sucesiones conviene reescribir la funcional $\|\cdot\|_{\ell^{p,q}}$ de forma ligeramente diferente pues algunos casos pueden ser estudiados de manera sistemática por medio de resultados generales. Tenemos entonces

$$\|a\|_{\ell^{p,q}}^q = \sum_{k=1}^{+\infty} k^{\frac{q}{p}-1} a_k^{*\,q} = \sum_{k=1}^{+\infty} \omega_k a_k^{*\,q},$$

en donde $\omega_k = k^{\frac{q}{p}-1}$: la generalización anunciada consiste en considerar sucesiones $\omega = (\omega_k)_{k\geq 1}$ que no son necesariamente de la forma anterior, sino que verifican cierto tipo de propiedades. Consideraremos pues el siguiente espacio de sucesiones

$$d(\omega, q) = \left\{ a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K} : \sum_{k=1}^{+\infty} \omega_k a_k^{*\,q} < +\infty \right\}.$$

Teorema 1.6.5 *Si $0 < q < 1$ es un índice real y si ω es una sucesión decreciente tal que $1 \geq \omega_1 \geq \omega_2 \geq \cdots \geq 0$, entonces:*

1) Si $d(\omega, q) \subset \ell^1$, entonces se tiene la relación de dualidad $\big(d(\omega, q)\big)' \sim \ell^\infty$.

2) Si $d(\omega, q) \not\subset \ell^1$, entonces $\big(d(\omega, q)\big)' \subset c_0$.

Por razones de espacio, no exponemos la demostración de este resultado. El lector puede consultar [2] y [24] para más detalles.

Teorema 1.6.6 *Si $0 < q \leq 1$ es un índice real y si ω es una sucesión creciente entonces $\big(d(\omega, q)\big)' \sim \ell^\infty$.*

Teorema 1.6.7 *Si $1 < q < +\infty$ es un índice real y si ω es una sucesión creciente entonces se tiene la relación de dualidad $\big(d(\omega, q)\big)' \sim d(\omega^{-\frac{q'}{q}}, q')$, en donde $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$ y donde la sucesión $\omega^{-\frac{q'}{q}}$ está determinada por $\omega^{-\frac{q'}{q}} = (\omega_k^{-\frac{q'}{q}})_{k \geq 1}$.*

El lector puede consultar una demostración de estos dos resultados en [3].

Con estos resultados generales podemos estudiar la dualidad en los espacios de Lorentz de sucesiones $\ell^{p,q}$ y dividimos nuestra presentación en función de los valores de los parámetros p, q que terminan estos espacios.

A) Caso cuando $0 < p < 1$ y $0 < q < +\infty$.

- Caso cuando $0 < p < 1$ y $0 < q < 1$, entonces $(\ell^{p,q})' \sim \ell^\infty$.

  En efecto, si la sucesión $\omega_k = k^{\frac{q}{p}-1}$ es decreciente (es decir si $0 < q < p$) y como se tiene la inclusión $\ell^{p,q} \subset \ell^1$ entonces podemos aplicar el Teorema 1.6.5 para obtener el resultado de dualidad $(\ell^{p,q})' \sim \ell^\infty$. Si por el contrario el peso $k^{\frac{q}{p}-1}$ es creciente (es decir $0 < p < q$), utilizamos el Teorema 1.6.6 para obtener el resultado deseado.

- Caso cuando $0 < p < 1$ y $q = 1$, entonces $(\ell^{p,1})' \sim \ell^\infty$

  En esta situación la sucesión $\omega_k = k^{\frac{1}{p}-1}$ es creciente y basta aplicar el Teorema 1.6.6 para deducir la relación de dualidad buscada.

- Caso cuando $0 < p < 1$ y $1 < q < +\infty$, entonces $(\ell^{p,q})' \sim d(\omega^{-\frac{q'}{q}}, q')$.

  Aquí la sucesión $\omega_k = k^{\frac{q}{p}-1}$ es creciente y podemos aplicar el Teorema 1.6.7 para obtener que el espacio dual de $\ell^{p,q}$ es el espacio $d(\omega^{-\frac{q'}{q}}, q')$. La sucesión $\omega^{-\frac{q'}{q}}$ se escribe entonces $k^{\frac{q'}{p'}-1}$ en donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, pero como $0 < p < 1$ se tiene que $p' < 0$, de manera que el espacio dual resultante no es un espacio de Lorentz de tipo $\ell^{p,q}$.

B) Caso cuando $p = 1$ y $0 < q < +\infty$.

- Caso cuando $p = 1$ y $0 < q < 1$, entonces $(\ell^{1,q})' \sim \ell^\infty$.

  La sucesión $\omega_k = k^{q-1}$ es decreciente y además se tiene la inclusión $\ell^{p,q} \subset \ell^1$, de modo que gracias al Teorema 1.6.5 se deduce el resultado.

- Caso cuando $p = 1$ y $q = 1$, entonces $(\ell^1)' = \ell^\infty$.

  Este caso, que corresponde al espacio de Lebesgue ℓ^1 fue tratado en el Volumen 2.

- Caso cuando $p = 1$ y $1 < q < +\infty$, entonces $(\ell^{1,q})' \sim \ell^{\infty,q'}$.

  Observamos que la sucesión $\omega_k = k^{q-1}$ es creciente, entonces aplicando el Teorema 1.6.7 obtenemos la relación de dualidad $(\ell^{p,q})' \sim d(\omega^{-\frac{q'}{q}}, q')$ y dado que $\frac{q'}{q} = \frac{1}{q-1}$, podemos identificar al espacio $d(\omega^{-\frac{q'}{q}}, q')$ con el espacio de Lorentz $\ell^{\infty,q'}$.

C) Caso cuando $1 < p < +\infty$ y $0 < q < +\infty$.

- Caso cuando $1 < p < +\infty$ y $0 < q < 1$, entonces $(\ell^{p,q})' \subset c_0$.

  Tenemos que la sucesión $\omega_k = k^{\frac{q}{p}-1}$ es decreciente pero no se tiene la inclusión $\ell^{p,q} \not\subset \ell^1$, entonces por el segundo punto del Teorema 1.6.5 tenemos $(\ell^{p,q})' \subset c_0$.

- Caso $1 < p < +\infty$ y $q = 1$, entonces $(\ell^{p,1})' \sim \ell^{p',\infty}$.

  La sucesión $\omega_k = k^{\frac{1}{p}-1}$ es decreciente, pero como $q = 1$ no podemos aplicar el Teorema 1.6.5). Es sin embargo posible establecer la dualidad entre estos dos espacios directamente (notar que se dispone de la desigualdad de Hölder dada en la Proposición 1.6.8). El lector puede consultar [8] para más detalles.

- Caso $1 < p < +\infty$ y $1 < q < +\infty$, entonces $(\ell^{p,q})' \sim \ell^{p',q'}$.

  Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $p \neq q$, pues de otro modo tendríamos la identificación de espacios $\ell^{p,p} = \ell^p$, y los espacios de sucesiones ℓ^p ya han sido estudiados en el Volumen 2: desde el punto de vista de la dualidad se tiene el resultado $(\ell^p)' = \ell^{p'}$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

  Si $1 < p < q < +\infty$, la sucesión $\omega_k = k^{\frac{q}{p}-1}$ es creciente y podemos aplicar el Teorema 1.6.7 para obtener $(\ell^{p,q})' \sim d(\omega^{-\frac{q'}{q}}, q')$, pero usando las relaciones $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$ se tiene $\omega_k^{-\frac{q'}{q}} = k^{\frac{q'}{p'}-1}$ y podemos entonces identificar al espacio $d(\omega^{-\frac{q'}{q}}, q')$ con el espacio de sucesiones $\ell^{p',q'}$.

Si $1 < q < p < +\infty$, la sucesión $\omega_k = k^{\frac{q}{p}-1}$ es decreciente pero no entra en el marco del Teorema 1.6.5 puesto que $1 < q < +\infty$. Sin embargo, es posible adaptar sin mayor problema al caso discreto los argumentos utilizados en el Teorema 1.5.6, página 152, para obtener la relación de dualidad $(\ell^{p,q})' \sim \ell^{p',q'}$.

*

Resumimos aquí el estudio de los espacios duales en los espacios de Lorentz $\ell^{p,q}(\mathbb{N}^*)$

	$0<p<1$	$p=1$	$1<p<+\infty$
$0<q<1$	$(\ell^{p,q})' \sim \ell^\infty$	$(\ell^{1,q})' \sim \ell^\infty$	$(\ell^{p,q})' \subset c_0$
$q=1$	$(\ell^{p,1})' \sim \ell^\infty$	$(\ell^{1,1})' \simeq \ell^\infty$	$(\ell^{p,1})' \sim \ell^{p',\infty}$
$1<q<+\infty$	$(\ell^{p,q})' \sim d(\omega^{-\frac{q'}{q}}, q')$	$(\ell^{1,q})' \sim \ell^{\infty,q'}$	$(\ell^{p,q})' \sim \ell^{p',q'}$

Figura 1.12: Espacios duales $\ell^{p,q}$ (con $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ y $\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$).

Observación 1.23 Los casos $p=+\infty$ y $q=+\infty$ no han sido tratados aquí, pues un estudio detallado requiere la introducción de otro tipo de conceptos más generales. El lector puede consultar [8] para obtener mayor información en estos dos casos.

* * * * * * *

Con estos resultados hemos terminado nuestra exposición de los espacios de Lorentz continuos $L^{p,q}$ y discretos $\ell^{p,q}$.

El estudio de los espacios $L^{p,q}$ generales (con dos índices) empieza en los años 1950 y se debe a G. Lorentz [19]. Evidentemente, existen varias maneras distintas de presentar estos espacios de funciones y el punto de vista adoptado aquí sigue de cerca la exposición de los espacios de Lebesgue realizada en los dos libros anteriores, el Volumen 1 [9] y el Volumen 2 [10].

Sin embargo, y desde el inicio del estudio de estos espacios, es posible considerar un punto de vista más general: en 1951, Lorentz considera en el artículo [20] los espacios $\Lambda(\omega,q)$ que están caracterizados por la funcional

$$\|f\|_{\Lambda(\omega,q)} = \left(\int_0^{+\infty} f^*(t)^q \omega(t)dt\right)^{\frac{1}{q}},$$

en donde $0 < q \leq +\infty$ y $\omega : [0,+\infty[\longrightarrow [0,+\infty[$ es una función que verifica algunas propiedades particulares. Como hemos visto en el estudio de la dualidad en los espacios de sucesiones $\ell^{p,q}$, esta manera de proceder generaliza lo que ha sido expuesto en las páginas anteriores pues basta fijar $\omega(t) = t^{\frac{q}{p}-1}$ para recuperar los espacios $L^{p,q}$. El lector interesado en este punto de vista más general puede consultar los libros [8], [23] y [25].

Resumen

En este resumen concentramos las principales propiedades de los espacios de Lorentz de funciones $L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ en donde $(X, \mathscr{A}, \mu)$ es un espacio medido σ-finito resonante (ver la Definición 1.2.4, página 59) y en donde los índices p, q verifican $1 \le p < +\infty$ y $1 \le q \le +\infty$ que son las condiciones más utilizadas en la práctica.

1. **Definiciones**
   Los espacios de Lorentz $L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ están caracterizados por la condición $\|f\|_{L^{p,q}} < +\infty$, donde esta funcional puede definirse por medio de:

   - la función de distribución d_f

$$\|f\|_{L^{p,q}} = p^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^{+\infty} \left(\alpha\, d_f(\alpha)^{\frac{1}{p}} \right)^q \frac{d\alpha}{\alpha} \right)^{\frac{1}{q}} \quad \text{si } 1 \le p, q < +\infty \qquad \text{y} \qquad \|f\|_{L^{p,\infty}} = \sup_{\alpha > 0} \left\{ \alpha d_f(\alpha)^{\frac{1}{p}} \right\} \quad \text{si} \quad 1 \le p < +\infty, q = +\infty.$$

   - la función de reordenamiento decreciente f^*

$$\|f\|_{L^{p,q}} = \left(\int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \quad \text{si } 1 \le p, q < +\infty \qquad \text{y} \qquad \|f\|_{L^{p,\infty}} = \sup_{t > 0} \left\{ t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \right\} \quad \text{si} \quad 1 \le p < +\infty, q = +\infty.$$

   - En el caso de los espacios de funciones, los espacios $L^{\infty,q}$ con $1 \le q < +\infty$ no están definidos.
   - Se tienen la identificación entre espacios de Lorentz y espacios de Lebesgue: $L^{p,p} = L^p$ para todo $1 \le p < +\infty$ y por definición se tiene $L^{\infty,\infty} = L^\infty$.

2. **Homogeneidad**
   Sobre el espacio medido $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx)$ los espacios de Lorentz $L^{p,q}$ tienen la misma homogeneidad que los espacios de Lebesgue pues se tiene

$$\|\delta_\lambda[f]\|_{L^{p,q}} = \lambda^{-\frac{n}{p}} \|f\|_{L^{p,q}},$$

   donde $\delta_\lambda[f](x) = f(\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n)$, con $\lambda > 0$.

3. **Propiedades estructurales**
   - La funcional $\|\cdot\|_{L^{p,q}}$ no siempre verifica la desigualdad triangular y por lo tanto no siempre es una *norma*.

- Si $1 < p < +\infty$ y $1 < q < +\infty$ o si $p = q = 1$ o si $p = q = +\infty$, entonces los espacios de Lorentz $L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ admiten caracterizaciones equivalentes (por medio de la funcional $|||\cdot|||_{p,q}$, ver la Definición 1.3.2, página 94) que los vuelve espacios de Banach.
- Si $p = 1$ y si $1 < q \leq +\infty$, entonces los espacios de Lorentz $L^{1,q}$ *no son normables*, en particular el espacio $L^{1,\infty}$ no puede ser dotado de una norma. Pero todos los espacios de Lorentz son espacios métricos completos.

4. **Propiedades de inclusión**
   - Si $1 \leq p_0, p_1 < +\infty$ y si $p_0 \neq p_1$, entonces no hay ningún relación de inclusión entre los espacios L^{p_0,q_0} y L^{p_1,q_1} con $1 \leq q_0, q_1 \leq +\infty$.
   - Si $1 \leq p < +\infty$ es un parámetro fijo, y si $1 \leq q_0 \leq q_1 \leq +\infty$, entonces los espacios de Lorentz son crecientes con respecto al segundo parámetro y se tiene las inclusiones
   $$L^{p,q_0} \subset L^{p,q_1}.$$
   En particular se tiene
   $$L^p \subset L^{p,\infty}.$$
   - Si se tiene $\mu(X) < +\infty$ y si $1 < p < q < +\infty$ entonces para todo real $1 \leq r \leq +\infty$ se tienen las inclusiones $L^{q,r} \subset L^{p,s}$ para todo $1 \leq s \leq +\infty$.
5. **Propiedades de densidad y separabilidad**
   - Las funciones simples integrables y las funciones continuas a soporte compacto con densas en los espacios de Lorentz $L^{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{K})$, con $1 \leq p < +\infty$ y $1 \leq q < +\infty$. Pero el conjunto de funciones simples integrables no es denso en los espacios $L^{p,\infty}$.
   - Los espacios de Lorentz $L^{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{K})$ con $1 \leq p < +\infty$ y $1 \leq q < +\infty$ son separables. Pero los espacios $L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{K})$ no son separables.
6. **Desigualdades importantes**
   - Desigualdades de Hölder
   Si $1 \leq p, p_1, p_2 < +\infty$ y $1 \leq q, q_1, q_2 \leq +\infty$ son tales que $\frac{1}{p} = \frac{1}{p}_1 + \frac{1}{p}_2$ y $\frac{1}{q} = \frac{1}{q}_1 + \frac{1}{q}_2$, entonces
   $$\|fg\|_{L^{p,q}} \leq 2^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^{p_1,q_1}} \|g\|_{L^{p_2,q_2}}$$
   - Desigualdades de interpolación
   Si $1 \leq p, p_1, p_2 < +\infty$ y $1 \leq q, q_1, q_2 \leq +\infty$ y si $f \in L^{p_1,q_1} \cap L^{p_2,q_2}$ entonces $f \in L^{p,q}$ con $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_1} + \frac{1-\theta}{p_2}$ y $\frac{1}{q} = \frac{\theta}{q_1} + \frac{1-\theta}{q_2}$ en donde $0 < \theta < 1$:
   $$\|f\|_{L^{p,q}} \leq 2^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^{p_1,q_1}}^{\theta} \|f\|_{L^{p_2,q_2}}^{1-\theta}$$

- Desigualdades de Young-O'Neil
  Por simplicidad consideramos funciones definidas sobre el espacio medido $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx)$.
    - $\underline{L^p \times L^{q,\infty} \hookrightarrow L^{r,\infty}}$: si $1 \leq p < +\infty$ y $1 < q, r < +\infty$ verifican $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, si $f \in L^p$ y $g \in L^{q,\infty}$, entonces $f * g \in L^{r,\infty}$:
    $$\|f * g\|_{L^{r,\infty}} \leq C(r,p,q)\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^{q,\infty}}.$$
    - $\underline{L^{p,q} \times L^1 \hookrightarrow L^{p,\sigma}}$: si $f \in L^{p,q}$ con $1 < p < +\infty$ y $1 \leq q < +\infty$ y si $g \in L^1$, entonces $f * g \in L^{p,\sigma}$ con $1 \leq q \leq \sigma \leq +\infty$:
    $$\|f * g\|_{L^{p,\sigma}} \leq C(p,q,\sigma)\|f\|_{L^{p,q}}\|g\|_{L^1}.$$
    - $\underline{L^{p_1,q_1} \times L^{p_2,q_2} \hookrightarrow L^{\infty}}$: si $f \in L^{p_1,q_1}$ con $1 < p_1 < +\infty$, $1 \leq q_1 < +\infty$ y si $g \in L^{p_2,q_2}$ con $1 < p_2 < +\infty$, $1 \leq q_2 < +\infty$, si $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1$ y si $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} \geq 1$ entonces
    $$\|f * g\|_{L^\infty} \leq C(p_1,p_2)\|f\|_{L^{p_1,q_1}}\|g\|_{L^{p_2,q_2}}.$$
    - $\underline{L^{p_1,q_1} \times L^{p_2,q_2} \hookrightarrow L^{p,q}}$: si $f \in L^{p_1,q_1}$ y si $g \in L^{p_2,q_2}$ y si
    $$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} > 1 \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1 + \frac{1}{p},$$
    $$\text{y si} \quad q \geq 1 \quad \text{es tal que} \quad \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} \geq \frac{1}{q},$$
    entonces $f * g \in L^{p,q}$ y se tiene la desigualdad
    $$\|f * g\|_{L^{p,q}} \leq C(p,p_1,p_2)\|f\|_{L^{p_1,q_1}}\|g\|_{L^{p_2,q_2}}.$$
    - $\underline{L^{p_1,\infty} \times L^{p_2,q_2} \hookrightarrow L^{p,q}}$: si $1 < p_1, p_2 < +\infty$ y $1 \leq q_1, q_2 \leq +\infty$, si $f \in L^{p_1,q_1}$ y $g \in L^{p_2,q_2}$.
        1) Si $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} > 1$ y $q_1 = +\infty$, $1 \leq q_2 < +\infty$, y si $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1 + \frac{1}{p}$ y $1 \leq q_2 \leq q$, entonces $f * g \in L^{p,q}$:
        $$\|f * g\|_{L^{p,q}} \leq C(p,p_1,p_2)\|f\|_{L^{p_1,\infty}}\|g\|_{L^{p_2,q_2}}.$$
        2) Si $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} > 1$ y $1 \leq q_1 < +\infty$, $q_2 = +\infty$, y $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1 + \frac{1}{p}$ y $1 \leq q_1 \leq q$, entonces $f * g \in L^{p,q}$:
        $$\|f * g\|_{L^{p,q}} \leq C(p,p_1,p_2)\|f\|_{L^{p_1,q_1}}\|g\|_{L^{p_2,\infty}}.$$
    - $\underline{L^{p_1,\infty} \times L^{p_2,\infty} \hookrightarrow L^{p,\infty}}$: si $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} > 1$, si $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1 + \frac{1}{p}$, si $f \in L^{p_1,\infty}$ y $g \in L^{p_2,\infty}$ entonces $f * g \in L^{p,\infty}$:
    $$\|f * g\|_{L^{p,\infty}} \leq C(p,p_1,p_2)\|f\|_{L^{p_1,\infty}}\|g\|_{L^{p_2,\infty}}.$$

7. **Dualidad**
    - Si $1 < p, q < +\infty$ entonces $(L^{p,q})' \sim L^{p',q'}$ y los espacios de Lorentz $L^{p,q}$ son reflexivos.
    - En los otros casos, los espacios duales pueden ser no triviales, ver la Figura 1.10, página 159.

1.7. Ejercicios

Ejercicio 1.1 *Sean las funciones f, g, h definidas por*

$$f(x) = \begin{cases} 1-(x-1)^2 & si\ 0 \leq x \leq 2, \\ 0 & si\ x > 2. \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \ln(1/(1+x))^2 & si\ 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & si\ x > 1. \end{cases}$$

determinar las funciones distribución d_f y d_g correspondientes así como las funciones de reordenamiento decreciente f^* y g^*.

Ejercicio 1.2 *Considerar la función definida por*

$$f(x) = \begin{cases} 2-x & si \quad x \in [0,1[, \\ 1 & si \quad x \in [1,2[, \\ 3-x & si \quad x \in [2,3[. \end{cases}$$

1. *Determinar la función de distribución d_f y la función de reordenamiento decreciente f^*.*

2. *Determinar el conjunto de puntos que pertenecen al dominio de definición de f^* pero que no pertenecen al rango de la función d_f.*

Ejercicio 1.3 *Sobre el espacio $\mathbb{R}^n$ dotado de su estructura de espacio medido natural y utilizando la Definición 1.2.7, página 68, de los espacios de Lorentz $L^{p,q}$, verificar que se tienen las identidades*

$$\|f_\tau\|_{L^{p,q}} = \|f\|_{L^{p,q}} \qquad y \qquad \|\delta_\lambda[f]\|_{L^{p,q}} = \lambda^{-\frac{n}{p}}\|f\|_{L^{p,q}},$$

en donde $f_\tau(x) = f(x+\tau)$ con $\tau \in \mathbb{R}^n$ representa la traslación de la función f y $\delta_\lambda[f] = f(\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n)$, con $\lambda > 0$, es la dilatación de la función f.

Ejercicio 1.4 (Integrales de Bertrand) *El objetivo de este ejercicio es estudiar la integrabilidad en ciertos intervalos de las funciones $f(x) = \frac{1}{x^\alpha |\ln(x)|^\beta}$ donde $0 < x < +\infty$ y donde α, β son parámetros reales.*

1. *Sobre el intervalo $]0,1[$ determinar el mínimo de la función f así como los intervalos en donde esta función es decreciente.*

2. *Mostrar que la integral*

$$\int_{e^{\frac{\beta}{\alpha}}}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha |\ln(x)|^\beta} dx,$$

   converge si y solo si $\alpha > 1$ o si $\alpha = 1$ y $\beta > 1$.

   Indicación: en el caso $\alpha = 1$ y $\beta > 1$ hacer el cambio de variable $y = \ln(x)$.

3. *Mostrar que la integral*

$$\int_0^{e^{-\frac{\beta}{\alpha}}} \frac{1}{x^\alpha |\ln(x)|^\beta} dx,$$

converge si y solo si $\alpha < 1$ *o si* $\alpha = 1$ *y* $\beta > 1$.

Indicación: hacer el cambio de variable $y = 1/x$ *y utilizar el segundo punto de este ejercicio.*

Ejercicio 1.5 (Medida finita) *Sea* $(X, \mathscr{A}, \mu)$ *un espacio medido* σ*-finito tal que* $\mu(X) < +\infty$.

1. *Mostrar que se tienen las inclusiones*

$$L^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K}) \subset L^{p,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K}) \subset L^{p-\varepsilon}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K}),$$

donde $1 \leq p < +\infty$ *y* $0 < \varepsilon < 1$.

2. *Verificar que en las desigualdades (1.61), página 80 no se puede quitar la condición* $p < q$. *Para ello considerar primero el caso* $q = p$, *producir un contraejemplo y luego estudiar el caso* $q < p$.

Ejercicio 1.6 *Utilizando la caracterización de los espacios de Lorentz* $L^{p,q}$ *que se basa en la función de reordenamiento decreciente, determinar para qué valores de* $0 < p, q < +\infty$ *las siguientes funciones pertenecen a los espacios* $L^{p,q}$:

1. *la función definida en la fórmula (1.33) de la página 44.*
2. *la función determinada por la expresión (1.36) de la página 46.*
3. *la función definida en (1.37) de la página 47.*

Ejercicio 1.7 *Sea* f *la función definida para todo* $x \in X = [0, +\infty[$ *por la expresión* $f(x) = \frac{x}{1+x}$.

1. *Determinar las expresiones de las funciones* d_f *y* f^*.
2. *Calcular* $|\{x \in X : |f(x)| \geq \alpha\}|$ *y* $|\{t : |f^*(t)| \geq \alpha\}|$ *para* $\alpha = 1$.
3. *Verificar que la equimedibildad no se conserva en la Proposición 1.2.6*-4) *si se reemplaza la desigualdad estricta* ($>$) *por una simple desigualdad* ($\geq$) *en la fórmula (1.38).*

Ejercicio 1.8 *Sea* μ *una medida no atómica definida sobre un espacio medible resonante* $(X, \mathscr{A})$ *y sea* λ *un número tal que* $0 \leq \lambda \leq \mu(X)$. *Demostrar la identidad*

$$\sup_{\mu(A) \leq \lambda} \int_A |f(x)| d\mu(x) = \int_0^\lambda f^*(t) dt.$$

Ejercicio 1.9 (Lema de Hardy) *Sean f y g dos funciones positivas medibles sobre $]0,+\infty[$ tales que, para todo $a \geq 0$ se tiene la desigualdad*

$$\int_0^a f(t)dt \leq \int_0^a g(t)dt.$$

Sea h una función positiva decreciente definida sobre $]0,+\infty[$. Demostrar que se tiene

$$\int_0^{+\infty} f(t)h(t)dt \leq \int_0^{+\infty} g(t)h(t)dt.$$

Indicación: suponer primero que h es una función simple, positiva y decreciente de la forma $h(t) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbb{1}_{]0,t_j[}$ en donde $\alpha_j > 0$ y $0 < t_1 < \cdots < t_n$.

Ejercicio 1.10 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido y sean f, g y h tres funciones medibles definidas sobre X a valores en $\mathbb{K}$. Demostrar que se tiene la desigualdad*

$$\int_X |f(x)g(x)h(x)|d\mu(x) \leq \int_0^{+\infty} f^*(t)g^*(t)h^*(t)dt.$$

Ejercicio 1.11 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido y sean f, g y h tres funciones medibles definidas sobre X a valores en $\mathbb{K}$. Sean*

$$1 = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{p_i} = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{q_i}$$

seis parámetros reales. Utilizando el resultado del ejercicio anterior, demostrar la siguiente generalización de la desigualdad de Hölder para los espacios de Lorentz:

$$\left| \int_X f(x)g(x)h(x)d\mu(x) \right| \leq \|f\|_{L^{p_1,q_1}} \|g\|_{L^{p_2,q_2}} \|h\|_{L^{p_3,q_3}}.$$

El objetivo de los dos ejercicios siguientes es mostrar que cuando no se cumplen las condiciones sobre los índices r, p y q que caracterizan la funcional $|||\cdot|||_{p,q,r}$ dada en la Definición 1.3.2, página 94, entonces no se tiene la equivalencia $|||\cdot|||_{p,q,r} \simeq \|\cdot\|_{L^{p,q}}$.

Ejercicio 1.12 *Utilizando la Definición 1.3.2, página 94, de la funcional $|||\cdot|||_{p,q,r}$, verificar que se tiene la identidad $|||f|||_{1,\infty,1} = \|f\|_{L^1}$. Esto muestra la necesidad de la condición $0 < r < p$.*

Ejercicio 1.13 *Mostrar que si $(X, \mathscr{A}, \mu)$ es un espacio medido no atómico resonante tal que $\mu(X) = +\infty$, entonces el conjunto de funciones tales que se tiene $|||\cdot|||_{p,q,1} < +\infty$ cuando $0 < p < 1$ o cuando $p = 1$ y $0 < q < +\infty$ está reducido al elemento cero. Para ello seguir los siguientes puntos.*

1. *Suponer que $f \neq 0$, y obtener que existe una constante $C > 0$ y un real $\epsilon > 0$ tal que $f^*(t) > 0$ para todo $0 < t < \epsilon$.*

2. *Deducir que se tiene la mayoración siguiente con* $0 < t < +\infty$*:*

$$f^{**}(t) \geq C\mathbb{1}_{]0,\varepsilon]}(t) + \frac{C\varepsilon}{t}\mathbb{1}_{]0,\varepsilon]}(t).$$

3. *Obtener la desigualdad* $|||f|||_{p,q,1} \geq C\varepsilon \left(\int_{\varepsilon}^{+\infty} t^{\frac{q}{p}-q-1}dt\right)^{\frac{1}{q}}$.

4. *¿Qué sucede entonces con la funcional* $|||\cdot|||_{p,q,1}$ *si* $0 < p < 1$ *o si* $p = 1$ *y* $0 < q < +\infty$*?*

Ejercicio 1.14 *Sea*$(\mathbb{G}, \mathcal{B}or(\mathbb{G}), \mu)$ *un grupo topológico localmente compacto unimodular dotado de la medida de Haar* μ *invariante por la izquierda. Utilizando la definición de los espacios de Lorentz* $L^{p,q}$ *que se basa en la función de distribución* d_f*, verificar que se tienen las identidades*

$$\|f_\tau\|_{L^{p,q}} = \|f^\tau\|_{L^{p,q}} = \|\check{f}\|_{L^{p,q}} = \|f\|_{L^{p,q}},$$

con $0 < p < +\infty$ *y* $0 < q \leq +\infty$ *y en donde, si* $\tau \in \mathbb{G}$*, hemos notado* $f_\tau(x) = f(\tau \cdot x)$*,* $f^\tau(x) = f(x \cdot \tau)$ *y* $\check{f}(x) = f(x^{-1})$*.*

Ejercicio 1.15 *Verificar que el conjunto de funciones simples integrables no es denso en el espacio* $L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{R}^n)$*. Para ello considerar la función* $f(x) = |x|^{-\frac{n}{p}}$ *y mostrar que esta función no puede ser aproximada por medio de funciones simples integrables.*

Ejercicio 1.16 *Sea* $(X, \mathscr{A}, \mu)$ *un espacio medido* σ*-finito no atómico tal que* $\mu(X) \leq 1$*. Sobre el conjunto de funciones medibles* $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ *considerar la funcional:*

$$N_0(f) = \lim_{t\to 0} t^2 f^{**}_{1-t}(t).$$

1. *Mostrar que la funcional* N_0 *es una semi-norma.*

2. *Verificar que la funcional* N_0 *es continua con respecto a la topología fuerte del espacio* $L^{1,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$*.*

3. *Considerando una sucesión de conjuntos* A_n *tal que* $\mu(A_n) = 2^{-n}$*, y considerando la función* f *definida por*

$$f(x) = \begin{cases} 2^n & \text{si } x \in A_n, \\ 0 & \text{si } x \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n, \end{cases}$$

mostrar que se tiene la mayoración $\left(\frac{1}{2x}\right)^{**} \leq f^{**}$*.*

4. *Concluir que el espacio dual de* $L^{1,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ *no es trivial.*

Ejercicio 1.17 *Determinar el reordenamiento decreciente de las siguientes sucesiones:*

1. $(a_n)_{n\geq 1}$ *definida por* $a_n = 1$ *si* n *es par y* $a_n = 0$ *si* n *es impar.*

2. $(b_n)_{n\geq 1}$ *definida por* $b_n = \frac{n-1}{n}$.

Ejercicio 1.18 *Mostrar que si* $a = (a_n)_{n\geq 1}$ *es una sucesión que pertenece a un espacio de Lebesgue* $\ell^p(\mathbb{N}^*)$, *con* $0 < p \leq +\infty$, *entonces se tiene la identidad*

$$\|a\|_{\ell^p} = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |a_{\varphi(n)}|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

en donde φ *es cualquier permutación de los naturales. Indicación: adaptar el razonamiento utilizado en la Proposición 1.4.3 del Volumen 1.*

Ejercicio 1.19 *Sean* $1 < p, p_0, p_1, q_0, q_1 < +\infty$ *cinco índices reales tales que* $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_1}$ *y* $\frac{1}{p} = \frac{1}{q_0} + \frac{1}{q_1}$. *Si* $a \in \ell^{p_0,q_0}(\mathbb{N}^*)$ *y* $b \in \ell^{p_1,q_1}(\mathbb{N}^*)$ *son dos sucesiones, demostrar que se tiene la desigualdad siguiente*

$$\|ab\|_{\ell^p} \leq \|a\|_{\ell^{p_0,q_0}} \|b\|_{\ell^{p_1,q_1}}.$$

Ejercicio 1.20 *Sea* $(X, \mathscr{A}, \mu)$ *un espacio medido. Si* $f \in L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ *con* $1 < p, q < +\infty$, *mostrar que esta función* f *puede descomponerse como la suma de dos funciones* $f = f_0 + f_1$ *en donde* $f_0 \in L^1(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ *y* $f_1 \in L^\infty(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$.

Ejercicio 1.21 *Diremos que* Φ *es una función de Young si existe una función* $\varphi : [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ *tal que* $\Phi(t) = \displaystyle\int_0^t \varphi(s)ds$, $t \geq 0$ *y que verifica* $\varphi(0) = 0$, $\varphi(s) > 0$ *para* $s > 0$, φ *es una función creciente y continua por la derecha y se tiene* $\lim\limits_{s\to+\infty} \varphi(s) = +\infty$. *Determinar la función de Young asociada a los espacios de Lebesgue* $L^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ *con* $1 \leq p < +\infty$, *es decir tal que se tenga la identidad*

$$\|f\|_{L^p} = \Phi^{-1}\left(\int_X \Phi(|f(x)|)dx\right),$$

donde Φ^{-1} *es la función inversa de* Φ.

Si Φ es una función de Young, el conjunto de funciones medibles $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ tales que la cantidad $\displaystyle\int_X \Phi(|f(x)|)dx$ es finita se conoce como la *clase de Orlicz*[28] $\mathscr{L}^\Phi$. El estudio de las clases de Orlicz permite generalizar de una manera diferente a los espacios de Lebesgue L^p, pero una exposición rigurosa de estos temas está fuera del alcance de este libro.

[28]W. Orlicz (1903-1990), matemático polaco.

Bibliografía

[1] F. Albiac and N. J. Kalton. *Topics in Banach Space Theory.* Springer Verlag, 2006.

[2] M. Ariño and M. Canela. Duality of Lorentz sequence spaces $d(\omega, p)$ $(0 < p < 1)$. *Mathematische Zeitschrift*, (195):415–418, (1987).

[3] M. Ariño, R. Eldeeb, and Peck N. The Lorentz sequence spaces $d(\omega, p)$ where ω is increasing. *Math. Ann.*, (282):259–266, (1988).

[4] C. Bennet and R. Sharpley. *Interpolation of Operators*, volume 129 of *Pure and Applied Mathematics.* Academic Press, 1988.

[5] A. Blozinski. Convolution of $L(p, q)$ functions. *Proceedings of the American Mathematical Society*, (33):237–240, (1972).

[6] A. Blozinski. On a convolution theorem for L(p, q) spaces. *Transactions of the American Mathematical Society*, (164):255–265, (1972).

[7] P.L. Butzer and H. Berens. *Semi-groups of operators and approximation.* Springer, 1967.

[8] M. Carro, J. Raposo, and J. Soria. *Recent Developments in the Theory of Lorentz Spaces and Weighted Inequalities*, volume 877. Memoirs of the American Mathematical Society, 2007.

[9] D. Chamorro. *Espacios de Lebesgue y de Lorentz, Volumen 1.* Colección de Matemáticas Universitarias, N$^\circ$ 1. Amarun, 2017.

[10] D. Chamorro. *Espacios de Lebesgue y de Lorentz, Volumen 2.* Colección de Matemáticas Universitarias, N$^\circ$ 2. Amarun, 2017.

[11] M. Cwikel. The dual of weak Lp. *Annales de l'institut Fourier*, (25):81–126, (1975).

[12] M. Cwikel and Sagher. Y. $L(p, \infty)^*$. *Indiana University Mathematics Journal*, (21):781–786, (1972).

[13] D.J.H. Garling. *Inequalities, A Journey into Linear Analysis.* Cambridge University Press, 2007.

[14] L. Grafakos. *Classical and Modern Fourier Analysis.* Pearson, 2004.

[15] G. Hardy, J.E. Littlewood, and G. Pólya. *Inequalities.* Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, second edition, 1952. Reprint 2001.

[16] E. Hewitt and A. Ross Kenneth. *Abstract Harmonic Analysis I.* Number 115 in Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Verlag, second edition, 1979.

[17] R. Hunt. On L(p,q) spaces. *L'enseignement mathématique*, (12):249–276, (1966).

[18] M. Kato. On Lorentz spaces $\ell_{p,q}(E)$. *Hiroshima Math. J.*, (6):73–93, (1976).

[19] G. G. Lorentz. Some new functional spaces. *Annals of Mathematics*, (51):37–55, (1950).

[20] G. G. Lorentz. On the theory of spaces λ. *Pacific Journal of Mathematics*, 1:411–429, (1951).

[21] J. Marcinkiewicz. Sur l'interpolation d'operations. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 208:1272–1273, (1939).

[22] R. O'Neil. Convolution operators and L(p, q) spaces. *Duke Math. J.*, (30):129–142, (1963).

[23] L. Pick, A. Kufner, O. John, and F. Svatopluk. *Function Spaces*, volume 1. De Gruyter, 2nd edition, 2012.

[24] N. Popa. Basic sequences and subspaces in Lorentz sequence spaces without local convexity. *Trans. Am. Math. Soc.*, (263):431–456, (1981).

[25] B.Z. Rubshtein, G. Grabarnik, A. Muratov, and Y. Pashkova. *Foundations of symmetric spaces*, volume 45 of *Developments in Mathematics*. Springer Verlag, 2016.

[26] E. Stein. *Topics in Harmonic Analysis.* Princeton University Press, 1970.

[27] E. Stein. *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality and Oscillatory Integrals.* Princeton University Press, 1993.

[28] E. Stein and G. Weiss. *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces.* Princeton University Press, 1971.

[29] P. Wojtaszczyk. *Banach Spaces for Analysts.* Cambridge University Press, 1996.

[30] L. Yap. Some remarks on convolution operators and L(p, q) spaces. *Duke Math. J.*, (36):647–658, (1969).

[31] A. Zygmund. On a theorem of marcinkiewicz concerning interpolation of operations. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, Neuvième Série(35):223–248, (1956).

[32] A. Zygmund. *Trigonometric Series.* Cambridge University Press, third edition, 2002. Volumes I & II combined.

Índice alfabético