Lección n°3: Definición y primeras propiedades de las distribuciones EPN, agosto 2019

Índice

1. Necesidad de cambiar de punto de vista

Pregunta: ¿Cuál es el objetivo de la teoría de distribuciones?

Respuesta: generalizar el concepto de *función* para que se puedan realizar en un marco teórico coherente algunas operaciones (la derivación en particular).

Es muy sencillo exhibir funciones que no son derivables en el sentido usual, pero es un poco más delicado generalizar la noción de derivabilidad de manera que las *reglas cálculo* sean fáciles de usar y sobre todo permitan resolver una gran cantidad de problemas matemáticos, usualmente directamente inspirados por problemas físicos de primera necesidad.

Para llevar a cabo esta generalización, será necesario cambiar de punto de vista. En efecto, todos los espacios de funciones de la primera lección (es decir los espacios $\mathcal{C}_a^0$, $\mathcal{C}_a^k$, $\mathcal{C}_c^\infty$, etc.) están constituidos por funciones que pueden definirse sin ambigüedad puesto que se trabaja *puntualmente*: para todo $x \in \mathbb{R}^n$ existe un $y \in \mathbb{R}$ tal que se tenga $f(x) = y$ y es por lo tanto muy sencillo determinar cuando dos funciones son distintas la una de la otra.

Sin embargo, cuando nos interesamos en problemas de integrabilidad (en el sentido de los espacios de Lebesgue L^p) ya no es posible ver las funciones desde ese punto de vista: dos funciones pueden ser muy diferentes puntualmente, pero poseer la *misma* información. Una forma de levantar esta ambigüedad consiste en trabajar con *clases* de funciones, es decir que permitimos que las funciones puedan ser (muy) diferentes pero únicamente sobre un conjunto de medida nula. Recordemos además que *toda* función $f \in L^p$ con $1 < p < +\infty$ puede verse como un representante de una clase de funciones, pero también como una forma lineal definida sobre el espacio L^q en donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

La teoría de distribuciones se basa en éste último punto de vista: vamos entonces a considerar los diferentes objetos conocidos hasta ahora como formas lineales y vamos a establecer reglas de cálculo que permitirán generalizar el concepto de derivación.

2. Definición de distribución

Definición 1 (Distribución) *Diremos que una forma lineal real T definida sobre el espacio $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ es una* distribución *si se tiene la condición de continuidad siguiente:*
Para todo compacto K de $\mathbb{R}^n$, existen $C_K > 0$ y $p_K \in \mathbb{N}$ tales que para toda función test $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ con sop(φ) $\subset K$ se tiene

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq C_K \max_{|\alpha|\leq p_K} \sup_{x\in K} |D^\alpha \varphi(x)|. \tag{1}$$

Observemos que por definición, una distribución es una forma lineal, es decir que se tiene

$$\begin{array}{rcl} T : \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \varphi & \longmapsto & T(\varphi), \end{array}$$

y una forma de representar el real $T(\varphi)$ consiste en escribir el *corchete de dualidad* $\langle T, \varphi\rangle$. En particular, dado que una distribución es una forma lineal se tiene para todo escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ y para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, la identidad

$$\langle T, \varphi + \lambda\psi\rangle = \langle T, \varphi\rangle + \lambda\langle T, \psi\rangle.$$

Si bien estamos considerando formas lineales, no deseamos considerar *todas* las formas lineales posibles, sino únicamente las que verifican cierta forma de continuidad y esta condición se expresa por medio de la estimación (1).

Definición 2 (Espacio de distribuciones y orden de una distribución)
Notaremos al espacio de distribuciones como $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.
Además si en la condición (1), el valor de p_k puede ser tomado de manera independiente de K, es decir, que existe un $p \in \mathbb{N}$ tal que $p_k \leq p$ para todo K compacto de $\mathbb{R}^n$, entonces diremos que la distribución T es de orden finito. *El menor valor posible de p es llamado* orden *de la distribución T.*

Observación 1 Como habíamos indicado en la primera lección, las notaciones $\mathcal{C}_c^\infty$ y $\mathcal{D}$ coinciden. Dado que las distribuciones son elementos del dual topológico de este espacio, es por lo tanto natural denotar por $\mathcal{D}'$ al espacio de formas lineales continuas, es decir al conjunto de las distribuciones.

2.1. Ejemplos de distribuciones

1. A toda función $\psi \in \mathcal{C}_a^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ podemos asociarle una forma lineal T_ψ definida sobre $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ por

$$\langle T_\psi, \varphi\rangle = T_\psi(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\varphi(x)\, dx. \tag{2}$$

La linealidad de T_ψ es inmediata y se tiene que T_ψ cumple sin problema la condición de continuidad (1). En efecto podemos escribir, si K es un compacto tal que *sop*(φ) $\subset K$:

$$|\langle T_\psi, \varphi\rangle| \leq \|\psi\|_\infty C_K \sup_{x\in K} |\varphi(x)| < +\infty,$$

en donde C_K es la medida de Lebesgue del compacto K. Dado que no interviene ninguna derivación de las funciones de test φ, obtenemos entonces que T_ψ es una distribución de orden 0.

Como sabemos por la Lección n°1, tenemos las inclusiones de conjuntos $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_a^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_a^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ y por lo tanto a cada función de estos espacios es posible asociar una distribución de orden 0 por medio de la expresión (2).

2. Sea $1 \leq p \leq +\infty$ un real. A toda función medible $f \in L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ es posible asociarle una forma lineal T_f por medio de la expresión
$$\langle T_f, \varphi \rangle = T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\,dx. \tag{3}$$
Al igual que (2), la linealidad es inmediata. La continuidad está dada por las estimaciones siguientes:
$$|\langle T_f, \varphi \rangle| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)||\varphi(x)|\,dx \leq \|f\|_{L^p}\|\varphi\|_{L^q} \leq \|f\|_{L^p}|sop(\varphi)|^{1/q}\|\varphi\|_\infty < +\infty,$$
en donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ con $1 < p \leq +\infty$. El caso $p = 1$ es totalmente similar y dejado al lector.

   De la misma manera que en el ejemplo anterior, podemos ver que a *toda* función que pertenece a los espacios de Lebesgue L^p con $1 \leq p \leq +\infty$ se le puede asociar una distribución de orden 0.

3. Sea $1 \leq p \leq +\infty$ un real y sea $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ una función localmente p-eme integrable, podemos asociarle una forma lineal T_f sobre el espacio $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ por medio de la expresión
$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\,dx,$$
en efecto, si si $1 < p \leq +\infty$ y si $sop(\varphi) \subset K$ se tiene
$$|\langle T_f, \varphi \rangle| \leq \|\varphi\|_\infty |sop(\varphi)|^{1/q}\|f\|_{L^p(K)} < +\infty,$$
de donde se deduce sin problema que T_f es una distribución de orden 0. El caso $p = 1$ es totalmente similar y dejado al lector.

   Observación 2 Con estos ejemplos vemos cláramente que la noción de *distribución* permite generalizar *todos* los espacios de funciones que han sido estudiados en la Lecciones n°1 y n°2.

4. **Masa de Dirac.** Para toda función $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ definimos la distribución masa de Dirac en cero δ_0 por medio de la expresión
$$\langle \delta_0, \varphi \rangle = \varphi(0).$$
La linealidad de esta forma lineal es inmediata así como la propiedad de continuidad. En efecto, para toda función test φ tal que $0 \in sop(\varphi)$, se tiene
$$|\langle \delta_0, \varphi \rangle| \leq \sup_{x \in K} |\varphi(x)|.$$
Es interesante notar que la masa de Dirac δ_0 *no es una función*, sino una medida de Radon (es decir que es una medida boreliana regular), y vemos por medio de este ejemplo que las distribuciones contienen objetos mucho más generales que los usualmente estudiados anteriormente.

   La masa de Dirac en un punto $a \in \mathbb{R}^n$ se define de manera similar: para todo $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$
$$\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a).$$
Se observa sin problema que la masa de Dirac es una distribución de orden 0.

5. **Valor principal.** No todas las distribuciones son de orden 0 y aquí tendremos la oportunidad de ver una distribución de orden 1.

   Sea $\varepsilon > 0$ y consideremos f_ε una sucesión de funciones sobre $\mathbb{R}$ definidas por:
$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } |x| \geq \varepsilon, \\ 0 & \text{si } |x| < \varepsilon. \end{cases}$$

Tenemos que $f_\varepsilon \in L^1_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, pero esta sucesión no converge en $L^1([-1,1])$ puesto que se tiene

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1}^{1}|f_\varepsilon(x)|\,dx = +\infty.$$

Para dar un sentido al límite cuando $\varepsilon \to 0$ procedemos como sigue y consideramos una función $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ a soporte en $[-a,a]$ y tenemos

$$\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x)\varphi\,dx = \int_{[-a,a]\cap|x|\geq\varepsilon} f_\varepsilon(x)\varphi\,dx = \int_{\varepsilon\leq|x|\leq a}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \int_{\varepsilon\leq|x|\leq a}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx,$$

pues

$$\int_{\epsilon\leq|x|\leq a}\frac{\varphi(0)}{x}\,dx = \varphi(0)\int_{\epsilon\leq|x|\leq a}\frac{1}{x}\,dx = 0.$$

Utilizando el teorema del valor medio sobre $[0,x]$ tenemos

$$\left|\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\right| \leq \sup_{y\in[0,x]}|\varphi'(y)|,$$

entonces $\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} \in L^1([-a,a])$ y así podemos escribir

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx &= \int_{|x|\leq a}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx = \int_{|x|\leq 1}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx + \int_{a\geq|x|\geq 1}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx\\ &= \int_{|x|\leq 1}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx + \int_{|x|\geq 1}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx\end{aligned}$$

pues $sop(\varphi) \subset [-a,a]$ y $\displaystyle\int_{a\geq|x|\geq 1}\frac{1}{x}\,dx = 0$.

La fórmula $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx$ define una distribución, llamada *valor principal* de $\frac{1}{x}$, la que se nota como $vp\left(\frac{1}{x}\right)$ y está dada por

$$\left\langle vp\left(\frac{1}{x}\right),\varphi\right\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\geq\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \int_{|x|\leq 1}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx + \int_{|x|\geq 1}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx.$$

Si φ se anula en $x=0$ tenemos que

$$\left\langle vp\left(\frac{1}{x}\right),\varphi\right\rangle = \int_{\mathbb{R}}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx.$$

Se puede probar que $vp\left(\frac{1}{x}\right)$ es una distribución de orden 1.

6. **Partes finitas.** Para $\alpha \in]-2,-1[$ la función

$$x_+^\alpha = \begin{cases} x^\alpha & \text{si } |x|>0,\\ 0 & \text{si } |x|\leq 0,\end{cases}$$

no es integrable en el intervalo $[-1,1]$. En efecto

$$\int_{-1}^{1}|x_+^\alpha|\,dx = \int_0^1 x^\alpha\,dx = \left.\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right|_0^1 = +\infty.$$

Ahora consideramos la distribución *partes finitas*, notada como $Pf(x_+^\alpha)$, y definida de la siguiente forma

$$
\begin{aligned}
\left\langle Pf\left(x_+^\alpha\right), \varphi\right\rangle &= -\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\varphi'(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[-\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\varphi'(x)\,dx\right] \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[-\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\varphi'(x)\Big|_\varepsilon^\infty + \int_\varepsilon^{+\infty} x^\alpha\varphi(x)\,dx\right] \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{\varepsilon^{\alpha+1}}{\alpha+1}\varphi(\varepsilon) + \int_\varepsilon^{+\infty} x^\alpha\varphi(x)\,dx\right]. \qquad (4)
\end{aligned}
$$

Como $x^{\alpha+1}$ es localmente integrable, la fórmula anterior define una distribución. Además, si $\varphi(0) = 0$ tenemos

$$\left\langle Pf\left(x_+^\alpha\right), \varphi\right\rangle = \int_0^{+\infty} x^\alpha\varphi(x)\,dx.$$

Se puede demostrar que la distribución $Pf(x_+^\alpha)$ es de orden 1.

2.2. Límite de sucesiones

En el análisis matemático, la aproximación de objetos por medio de sucesiones es una herramienta fundamental. Dado que las distribuciones son formas lineales definidas sobre el espacio $\mathcal{C}_c^\infty$, es necesario indicar lo que sucede por un lado cuando tomamos el límite de funciones en $\mathcal{C}_c^\infty$ y por otro lado cuando tomamos el límite de distribuciones.

Recordemos la siguiente noción de convergencia:

Definición 3 *Sea $k \in \mathbb{N}\cup\{+\infty\}$. Diremos que una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\mathcal{C}_c^k(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ converge en $\mathcal{C}_c^k(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ hacia una función $f \in \mathcal{C}_c^k(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ si se satisfacen las siguientes condiciones:*

1) *Existe un compacto K de $\mathbb{R}^n$ tal que $f_n(x) = 0$ para todo n y todo $x \in \mathbb{R}^n\setminus K$.*

2) *Para todo multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ que verifica $|\alpha| \le k$ la sucesión de funciones $(D^\alpha f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente hacia $D^\alpha f$, es decir,*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N = N(\alpha,\varepsilon) \text{ tal que } n \ge N \Rightarrow \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |D^\alpha f_n(x) - D^\alpha f(x)| \le \varepsilon.$$

Un primer resultado nos indica lo que sucede cuando el argumento de las distribuciones es una sucesión:

Proposición 1 *Sea T una distribución sobre $\mathbb{R}^n$ y $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones en $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ que converge en $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ hacia una función φ. Entonces $\lim\limits_{n\to+\infty}\langle T,\varphi_n\rangle = \langle T,\varphi\rangle$.*

Prueba. Si K es un compacto de $\mathbb{R}^n$ que contiene el soporte de todos los $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, en particular contiene el soporte de φ, entonces φ_n, $\varphi \in \mathcal{C}_K^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$. Dado que T es una forma lineal, entonces tenemos

$$\langle T,\varphi_n\rangle - \langle T,\varphi\rangle = \langle T,\varphi_n - \varphi\rangle,$$

así, por la Definición 3 con respecto a la convergencia en $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ y por la condición de continuidad de las distribuciones dada en la Definición 1 tenemos que existen $p \in \mathbb{N}$ y una constante $C > 0$ tales que

$$|\langle T,\varphi_n - \varphi\rangle| \le C \sup_{|\alpha|\le p,\, x\in K} |D^\alpha\varphi_n(x) - D^\alpha\varphi(x)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

■

Esta propiedad nos va a servir para dar un ejemplo de funciones que no son distribuciones. En efecto, si consideramos la función

$$exp\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

entonces se puede ver utilizando el lema anterior que este objeto no define una distribución: sea $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tal que $sop(\varphi) \subset]1,2[$ y tal que $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ y $\varphi(x) = 1$ sobre el intervalo $[a,b]$ con $1 < a < b < 2$. Para todo $n \geq 1$ definimos la función $\varphi_n(x) = e^{-n}\varphi(nx)$. Tenemos entonces que $sop(\varphi_n) \subset]\frac{1}{n}, \frac{2}{n}[$ y para todo $k \in \mathbb{N}$ tenemos $\varphi_n^{(k)}(x) = e^{-n}n^k\varphi^{(k)}(nx)$. Sin mayor problema vemos que la sucesión $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ converge hacia 0 en el espacio $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Ahora, si existiese una distribución T que coincide con la función $e^{\frac{1}{x^2}}$ sobre $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, entonces por el resultado anterior se debería tener $\lim\limits_{n\to+\infty}\langle T,\varphi_n\rangle = 0$. Sin embargo, tenemos

$$\langle T,\varphi_n\rangle = \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{1}{x^2}}\varphi_n(x)dx = \int_{1/n}^{2/n} e^{\frac{1}{x^2}}\varphi_n(x)dx,$$

pero como la función φ es positiva y sobre $\frac{a}{n} < x < \frac{b}{n}$ se tiene $\varphi_n(x) = e^{-n}$, podemos escribir

$$\langle T,\varphi_n\rangle \geq e^{-n}\int_{a/n}^{b/n} e^{\frac{1}{x^2}}\,dx,$$

Ahora notamos que sobre $0 < x < \frac{b}{n}$ se tiene $e^{\frac{1}{x^2}} \geq e^{\frac{n^2}{b^2}}$, de donde se obtiene las minoraciones

$$\langle T,\varphi_n\rangle \geq e^{-n}e^{\frac{n^2}{b^2}}\int_{a/n}^{b/n} dx = e^{-n}e^{\frac{n^2}{b^2}}\frac{b-a}{n} \geq \frac{b-a}{n}e^n,$$

en donde la última minoración es válida siempre y cuando $n \geq 2b^2$. Entonces a partir de estas desigualdades, se puede ver que $\lim\limits_{n\to+\infty}\langle T,\varphi_n\rangle = +\infty$, lo cual es una contradicción con el resultado anterior.

Observación 3 Este ejemplo es muy importante pues ilustra cláramente que no toda forma lineal es una distribución: se debe verificar una condición de continuidad que es fundamental.

Definición 4 (Convergencia de distribuciones) *Diremos que una sucesión $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de distribuciones sobre $\mathbb{R}^n$ converge en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ hacia una distribución T, si y solamente si para toda función test $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ la sucesión $\langle T_n,\varphi\rangle$ converge hacia $\langle T,\varphi\rangle$.*

Ejemplos:

1. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ y $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ tal que para todo compacto K de $\mathbb{R}^n$ tenemos
$$\lim_{n\to+\infty}\int_K |f_n(x) - f(x)|\,dx = 0.$$
Entonces $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge hacia f en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$.

2. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}(x) = n\sin(nx) \in L^1_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{R})$; la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge hacia 0 en $\mathcal{D}'(\mathbb{R},\mathbb{R})$. En efecto, para todo $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ y por una integración por partes se tiene
$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} n\sin(nx)\varphi(x)\,dx = -\frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}}\sin(nx)\varphi''(x)\,dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$
pero si consideramos un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, tendríamos que
$$\int_I |f_n(x)|\,dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$
Concluímos que la convergencia en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ es mucho menos exigente que la convergencia en el espacio $L^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

3. Para todo $n \geq 1$, consideremos sobre $\mathbb{R}$ la función localmente integrable
$$T_n(x) = \frac{\mathbb{1}_{[1/n,+\infty[}|x|}{x},$$
se tiene entonces que, en el sentido de la convergencia de las distribuciones, esta sucesión converge hacia la distribución valor principal $vp\left(\frac{1}{x}\right)$.

Proposición 2 *Sea* $(T_n)_{n\geq 1}$ *una sucesión de distribuciones tal que para toda función test* $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$*, la sucesión* $\langle T_n, \varphi\rangle$ *converge.*

Entonces existe una distribución $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ *tal que*

$$\lim_{n\to+\infty} \langle T_n, \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle,$$

para toda función test $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

Este resultado puede verse como una variante del *principio de acotación uniforme*: si la sucesión de distribuciones siempre converge al estudiarlas con funciones test, entonces se tiene la existencia de una distribución límite.

3. Operaciones sobre las distribuciones

Como acabamos de ver, las distribuciones son objetos que generalizan las funciones y puede decirse que *casi todas* las funciones conocidas anteriormente son distribuciones. Pero el objetivo no es generalizar por el gusto de generalizar, sino obtener reglas de cálculo estables que puedan ser puestas en práctica para resolver problemas que con las herramientas anteriores no podían ser satisfactoriamente resueltos.

La idea de base que conviene tener en mente es que, gracias al corchete de dualidad $\langle T, \varphi\rangle$, todas las operaciones de base (multiplicación, derivación, transformada de Fouier, convolución) que se desean aplicar a una distribución T se definirán al transladarlas a las funciones de test φ.

3.1. Derivación

Notemos para empezar que si $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ y $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, entonces tenemos la fórmula de integración por partes

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\varphi(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\,dx,$$

en donde, razonando en una dimensión, los *términos de borde* que resultan de la integración por partes son nulos por las propiedades de soporte de las funciones test φ.

De esta manera, es posible definir la derivación de una distribución *haciendo pasar* la derivación a la función test. Más precisamente tenemos:

Definición 5 (Derivación de distribuciones) *Para todo* $1 \leq i \leq n$*, las derivadas parciales* $\frac{\partial T}{\partial x_i}$ *de una distribución* $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ *son las distribuciones definidas por:*

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = \left\langle T, -\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle \quad \textit{para todo } \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}).$$

En general, gracias al lema de Schwarz, el orden de las derivadas parciales no interviene en el cálculo de las derivadas sucesivas de una distribución, y para un multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tenemos la expresión general

$$\langle D^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha \varphi\rangle.$$

Ejemplos:

1. Sea $H(x)$ la función de Heaviside definida para $x \in \mathbb{R}$ por

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Esta función pertenece a $L^1_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ y por tanto define una distribución y su derivada en el sentido de las distribuciones se calcula como sigue: para toda φ función de test se tiene

$$\langle \frac{d}{dx}H, \varphi\rangle = -\langle H, \frac{d}{dx}\varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\varphi'(x)dx,$$

y usando la definición de la función H podemos escribir, integrando:

$$\langle \frac{d}{dx}H, \varphi\rangle = -\int_{0}^{+\infty} \varphi'(x)dx = \varphi(0) + \lim_{x\to+\infty}\varphi(x) = \varphi(0),$$

es decir que $\langle \frac{d}{dx}H, \varphi\rangle = \varphi(0)$, de donde se deduce que se tiene la identidad

$$\frac{d}{dx}H = \delta_0.$$

Este ejemplo muestra cláramente cómo es posible derivar (en el sentido de las distribuciones) funciones que ni siquiera son continuas.

2. La función $f(x) = |x|$ con $x \in \mathbb{R}$ no es derivable en el sentido usual debido a la singularidad que presenta en $x = 0$, pero si es derivable en el sentido de las distribuciones. Su derivada distribucional es

$$\frac{d}{dx}|x| = sign(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ -1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

3. La función definida sobre $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $x \longmapsto \log|x|$ pertenece a $L^1_{loc}(\mathbb{R})$, y su derivada distribucional es

$$\frac{d}{dx}\log|x| = vp\left(\frac{1}{x}\right).$$

4. La fórmula (4) respecto a la distribución partes finitas significa que $Pf(x_+^\alpha)$, $\alpha \in]-2,-1[$ es la derivada distribucional de la función $\dfrac{x_+^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.

En el siguiente resultado podemos ver la *estabilidad* de la derivación al considerar sucesiones de distribuciones.

Proposición 3 *Sea $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de distribuciones convergente en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ hacia una distribución, y sea $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Entonces la sucesión $(D^\alpha T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge hacia $D^\alpha T$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$.*

Prueba. Sea $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$, entonces $\langle D^\alpha T_n, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T_n, D^\alpha\varphi\rangle \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha\varphi\rangle = \langle D^\alpha T, \varphi\rangle$. ■

3.2. Multiplicación por una función $\mathcal{C}^\infty$

Por ser las distribuciones formas lineales, tiene todo sentido considerar las operaciones $T + \lambda S$ en donde $\lambda \in \mathbb{R}$ es un escalar y donde $T, S \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$. Sin embargo, si se trata de multiplicar puntualmente una distribución por una función, hay que tener un poco de cuidado.

Definición 6 *Sea $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ y sea $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$, la distribución producto fT está definida, para toda función test $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ por*

$$\langle fT, \varphi\rangle = \langle T, f\varphi\rangle.$$

Es necesario verificar que la cantidad $\langle T, f\varphi\rangle$ está correctamente definida, es decir que se tiene $f\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$. Esto no es problema pues la función f pertenece por hipótesis al espacio $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ y al multiplicarla por la función φ de soporte compacto se obtiene como resultado una nueva función $f\varphi$ que es regular a soporte compacto.

Ejemplos:

1. En el sentido de las distribuciones tenemos la identidad

$$x\delta_0 = 0,$$

y en general, si $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ se tiene

$$f\delta_a = f(a)\delta_a.$$

En efecto, para toda función test $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, podemos escribir por definición de producto entre una función regular y una distribución:

$$\langle x\delta_0, \varphi\rangle = \langle \delta_0, x\varphi\rangle = \langle \delta_0, \psi\rangle,$$

en donde hemos notado $\psi(x) = x\varphi(x)$ que es una función que pertenece al espacio $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ que verifica $\psi(0) = 0$, de manera que por la definición de la masa de Dirac obtenemos

$$\langle x\delta_0, \varphi\rangle = \langle \delta_0, \psi\rangle = \psi(0) = 0.$$

Un razonamiento totalmente similar permite generalizar el resultado a funciones $f \in \mathcal{C}^\infty$ y a la distribución δ_a con $a \in \mathbb{R}$.

2. Tenemos que $x \cdot vp\left(\frac{1}{x}\right) = 1$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. En efecto, para toda función test $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ podemos escribir

$$\left\langle x \cdot vp\left(\frac{1}{x}\right), \varphi\right\rangle = \left\langle vp\left(\frac{1}{x}\right), x\varphi\right\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\geq\varepsilon}\frac{x\varphi(x)}{x}\,dx = \int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)\,dx = \langle 1, \varphi\rangle.$$

Observación 4 En toda generalidad, y sin información previa sobre el orden de la distribución, el producto puntual de una función f que no es suficientemente derivable con una distribución cualquiera no está definido.

Notemos que el producto puntual de una función regular y de una distribución es estable en el siguiente sentido.

Proposición 4

1) Sea $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ una sucesión que converge hacia T en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ y sea $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Entonces la sucesión producto $(fT_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge hacia fT en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

2) Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ una sucesión que converge (así como todas sus derivadas) uniformemente hacia $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ sobre un compacto de $\mathbb{R}^n$ y sea $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ una distribución. Entonces $(f_nT)_{n\in\mathbb{N}}$ converge hacia fT en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

Prueba.

1) Se tiene directamente este punto a partir de la Definición 6: basta pasar la función f al *otro lado* del corchete de dualidad.

2) Es suficiente demostrar para el caso $f = 0$, reemplazando f_n por $f_n - f$ con $n \in \mathbb{N}$. Para todo $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, la sucesión $(f_nT)_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow 0$ en $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, entonces

$$\langle f_nT, \varphi\rangle = \langle T, f_n\varphi\rangle \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \langle T, 0\rangle \quad \text{en } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}).$$

■

Proposición 5 (Fórmula de Leibniz) *Para toda distribución $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, si $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ y si $\alpha \in \mathbb{N}^n$ es un multi-índice, entonces tenemos la expresión*

$$D^\alpha(fT) = \sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}D^{\alpha-\beta}fD^\beta T,$$

y en particular para todo $1 \leq j \leq n$ se tiene

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(fT) = f\frac{\partial T}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial x_j}T.$$

3.3. Producto de distribuciones

Hemos visto en la sección anterior cómo multiplicar puntualmente una distribución con una función regular. Vamos a ver ahora que el grado de generalidad obtenido no permite dar un sentido coherente al producto de dos distribuciones. En efecto, si T y S son dos distribuciones, se desearía que el producto TS también sea una distribución y en ese caso tendría sentido multiplicar (TS) por una función regular f y en particular se esperaría que las reglas de conmutación se mantengan, es decir que se debería tener las identidades

$$(fT)S = (fS)T,$$

pero vamos a ver que si seguimos las definiciones anteriores se obtienen contradicciones:

Sean $T = \delta_0$, $S = vp\left(\frac{1}{x}\right)$, $f = x$ entonces para toda función test $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ se tendría por un lado

$$\langle (fT) \times S, \varphi\rangle = \left\langle (x\delta_0) \times vp\left(\frac{1}{x}\right), \varphi\right\rangle = \left\langle 0 \times vp\left(\frac{1}{x}\right), \varphi\right\rangle = \left\langle vp\left(\frac{1}{x}\right), 0 \times \varphi\right\rangle = 0,$$

pero por otro lado se tiene

$$\langle (fS) \times T, \varphi\rangle = \left\langle \left(x \times vp\left(\frac{1}{x}\right)\right) \times \delta_0, \varphi\right\rangle = \langle 1 \times \delta_0, \varphi\rangle = \langle \delta_0, \varphi\rangle = \varphi(0),$$

de donde se obtiene una contradicción.

Observación 5 Es muy importante recordar que el producto de dos distribuciones *no está definido en toda generalidad* y este punto debe tomarse muy en cuenta en las aplicaciones, como por ejemplo al estudiar ciertas ecuaciones en derivadas parciales no lineales.

3.4. Traslación y dilatación

Recordemos que para una función f y un vector de traslación $y \in \mathbb{R}^n$, la *traslación* de esta función está dada por $f_{\tau_y}(x) = f(x - y)$. La generalización de esta operación a distribuciones se realiza como sigue:

Definición 7 (Traslación) *Sea $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ una distribución y sea $y \in \mathbb{R}$ un vector. La* traslación T_{τ_y} *de una distribución T se define como*

$$\langle T_{\tau_y}, \varphi\rangle = \langle T, \varphi_{\tau_{-y}}\rangle.$$

Esta expresión corresponde con un simple cambio de variables cuando la distribución T coincide con una función suficientemente regular.

Para una función f, la *dilatación* con respecto a un parámetro $\lambda > 0$ es la función $f_\lambda(x) = f(\lambda x)$. La generalización a las distribuciones es la siguiente:

Definición 8 (Dilatación) *Sea $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ una distribución, definimos la* dilatación T_λ *de una distribución por medio de la fórmula*

$$\langle T_\lambda, \varphi\rangle = \lambda^{-n}\langle T, \varphi_{1/\lambda}\rangle.$$

Una vez más, si la distribución coincide con una función suficientemente regular, entonces esta expresión anterior no es más que un pequeño cambio de variables.

4. Fórmula de los saltos

Como hemos visto anteriormente, el uso de las distribuciones permite derivar objetos que no son derivables en el sentido usual. Sin embargo, hay que tener un poco de cuidado con las reglas de cálculo que intervienen al derivar en el sentido de las distribuciones.

Antes de presentar la *fórmula de los saltos* necesitaremos un par de lemas.

Lema 1 *Sea $I =]a,b[$ un intervalo abierto de la recta real $\mathbb{R}$ y sea T una distribución definida sobre I tal que $T' = 0$. Entonces la distribución T es una constante.*

Lema 2 *Sea $I =]a,b[$ un intervalo abierto de la recta real $\mathbb{R}$ y sea una función $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Las soluciones de la ecuación*

$$T' = f \qquad \textit{sobre } \mathcal{D}'(I),$$

son las funciones continuas sobre I de la forma

$$T(x) = Cste + \int_c^x f(y)dy, \qquad \textit{con } c \in I.$$

Recordemos que en el sentido usual no es posible derivar funciones indicatrices de conjuntos, sin embargo en el sentido de las distribuciones esto sí es posible, pero hay que tomar en cuenta ciertos fenómenos de borde que aparecen y esta particularidad esta explicitada en el siguiente teorema

Teorema 1 (Fórmula de saltos) *Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$ y g una función continua sobre I cuya derivada en el sentido de las distribuciones g' pertenece al espacio $L^1_{loc}(I, \mathbb{R})$. Para $a, b \in I$ tal que $a < b$, tenemos la siguiente identidad en $\mathcal{D}'(I, \mathbb{R})$*

$$\frac{d}{dx}(\mathbb{1}_{(a,b)}g) = \mathbb{1}_{(a,b)}g' + g(a)\delta_a - g(b)\delta_b.$$

Demostración. Escribamos $g' = f$ en donde por hipótesis se tiene $f \in L^1_{loc}(I, \mathbb{R})$. Por el Lema 2 se tiene para todo $x \in I$ la identidad

$$g(x) = g(a) + \int_a^x f(y)dy.$$

Entonces, para toda función test $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I, \mathbb{R})$ se tiene

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{d}{dx}(\mathbb{1}_{(a,b)}g), \varphi \right\rangle &= -\left\langle \mathbb{1}_{(a,b)}g, \varphi' \right\rangle = -\int_a^b g(x)\varphi'(x)dx = -\int_a^b \left(g(a) + \int_a^x f(y)dy \right) \varphi'(x)dx \\
&= g(a)(\varphi(a) - \varphi(b)) - \int_a^b \left(\int_a^x f(y)dy \right) \varphi'(x)dx \\
&= g(a)(\varphi(a) - \varphi(b)) - \int_a^b \int_a^b \mathbb{1}_{a<y<x} f(y)\varphi'(x)dydx \\
&= g(a)(\varphi(a) - \varphi(b)) + \int_a^b f(y) \left(\int_y^b -\varphi'(x)dx \right) dy \\
&= g(a)(\varphi(a) - \varphi(b)) + \int_a^b f(y) \left(\varphi(y) - \varphi(b) \right) dy \\
&= g(a)(\varphi(a) - \varphi(b)) + \int_a^b f(y)\varphi(y)dy - \varphi(b) \int_a^b f(y)dy.
\end{aligned}$$

Ahora, dado que se tiene la identidad $g(b) - g(a) = \displaystyle\int_a^b f(y)dy$, podemos escribir

$$\left\langle \frac{d}{dx}(\mathbb{1}_{(a,b)}g), \varphi \right\rangle = g(a)(\varphi(a) - \varphi(b)) + \int_a^b f(y)\varphi(y)dy - \varphi(b)g(b) + \varphi(b)g(a),$$

lo que se reescribe como

$$\left\langle \frac{d}{dx}(\mathbb{1}_{(a,b)}g), \varphi \right\rangle = \langle \mathbb{1}_{(a,b)}f, \varphi \rangle + g(a)\varphi(a) - g(b)\varphi(b),$$

de donde se obtiene sin problemas la fórmula de los saltos. $\blacksquare$

La fórmula de saltos se puede generalizar a varias dimensiones. Sea Σ una hipersuperficie de clase $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^n$, que es la frontera de un dominio compacto K de $\mathbb{R}^n$, notemos para $x \in \Sigma$, $\nu(x)$ el vector unitario normal de Σ y dirigido hacia el exterior de K, y sea $d\sigma$ la medida de Lebesgue sobre la superficie Σ.

Teorema 2 (Fórmula de saltos en el espacio) *Sea Ω una vecindad de un conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ y f una función continua sobre Ω, cuya derivada en el sentido de las distribuciones $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ pertenece a $L^1_{loc}(\Omega, \mathbb{R})$. Entonces tenemos la siguiente identidad en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$*

$$\frac{d}{dx_i}(f\mathbb{1}_K) = \frac{df}{dx_i}\mathbb{1}_K - \nu_i(x)f(x)\,d\sigma.$$

5. Soporte y convolución de distribuciones

Hasta ahora hemos estudiado distribuciones definidas sobre el espacio $\mathbb{R}^n$ entero, exigiendo que las funciones de test φ pertenezcan al espacio $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

Podemos considerar ahora $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y definir de manera totalmente similar las distribuciones sobre el conjunto Ω al definirlas como formas lineales sobre el espacio $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ con la misma condición (1) exigida anteriormente y en donde esta vez los compactos K están contenidos en Ω. Es posible afinar aún más esta noción de soporte como vamos a ver en las líneas a continuación y esta particularidad nos conducirá a cierto tipo de resultados importantes.

5.1. Soporte de distribuciones

Definición 9 (Restricción de una distribución) *Sea T una distribución sobre un abierto Ω de $\mathbb{R}^n$. Si A es un abierto contenido en Ω, la distribución T puede definir una distribución sobre A llamada* restricción de T a A *y notada como $T\big|_A$, mediante la fórmula*

$$\langle T\big|_A, \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle \quad \textit{para todo } \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(A, \mathbb{R}).$$

Diremos que la distribución T es nula *sobre A si tenemos $T\big|_A = 0$.*

Con esta primera definición, podemos interesarnos al soporte de las distribuciones. Recordemos que las definición de soporte de una funci'on continua es diferente a la noción de soporte de una función medible, que a su vez es un poco distinta al concepto de soporte de una distribución:

Teorema 3 (Soporte de una distribución) *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y sea $T \in \mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{R})$ una distribución. Existe V el abierto más grande de Ω tal que $T\big|_V = 0$. El complemento de V en Ω es llamado el* soporte de la distribución T*, y es notado por sop(T). El soporte cerrado de T está caracterizado por*

$$x \notin sop(T) \iff \textit{existe } A \textit{ una vecindad de } x, \textit{ tal que } T\big|_A = 0.$$

Ahora presentaremos unas propiedades de los soportes de distribuciones:

Proposición 6 *Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$. Si T, T_1 y T_2 son tres distribuciones que pertenecen al espacio $\mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{R})$, entonces tenemos los siguientes puntos:*

1) $sop(T_1 + T_2) \subset sop(T_1) \cup sop(T_2)$,

2) $sop(D^\alpha T) \subset sop(T)$, *si* $\alpha \in \mathbb{N}^n$,

3) Si $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R})$, *entonces* $sop(fT) \subset sop(T) \cap sop(f)$,

4) Si $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ *es una función de test y si* $sop(T) \cap sop(\varphi) = \emptyset$ *entonces* $\langle T, \varphi\rangle = 0$.

Definición 10 *Notemos como $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ el subespacio de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ constituido por las distribuciones cuyo soporte es un compacto de $\mathbb{R}^n$.*

A continuación se presenta un resultado que asocia la definición anterior con el orden de una distribución

Proposición 7 *Toda distribución a soporte compacto tiene orden finito.*

Prueba. Sean $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ una distribución, K un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ tal que $sop(T) \subset K$, U un abierto tal que $sop(T) \subset U \subset K$, y $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ tal que $\psi \equiv 1$ sobre U y tal que $sop(\psi) \subset K$. Notemos que por construcción se tiene $sop(1-\psi) \cap U = \emptyset$, y como $U \subset K$ y $sop(T) \subset U \subset K$, entonces

$$sop(T) \cap sop(1-\psi) = \emptyset.$$

Por tanto, si $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$, tenemos que $sop\varphi(1-\psi) \subset sop(1-\psi)$ y así $sop(\varphi(1-\psi)) \cap sop(T) = \emptyset$, de donde, por el punto 4) de la Proposición 6, obtenemos $\langle T, \varphi(1-\psi)\rangle = 0$ lo que implica, por linealidad, que

$$0 = \langle T, \varphi(1-\psi)\rangle = \langle T, \varphi - \varphi\psi\rangle = \langle T, \varphi\rangle - \langle T, \varphi\psi\rangle,$$

de donde se deduce sin problema la relación $\langle T, \varphi\rangle = \langle T, \varphi\psi\rangle$. Ahora, $sop(\psi\varphi) \subset sop(\psi) \subset K$, así, por la Definición 1, existe $C > 0$ y $p \in \mathbb{N}$ tal que para toda función test $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ se tiene

$$|\langle T, \varphi\psi\rangle| \leq C \sup_{\substack{|\alpha|\leq p \\ x\in K}} |D^\alpha(\varphi\psi)(x)|,$$

de donde se deduce, para otra constante $C > 0$ pero con el mismo p que

$$\langle T, \varphi\rangle = \langle T, \varphi\psi\rangle \leq C \sup_{\substack{|\alpha|\leq p \\ x\in K}} |D^\alpha\varphi(x)|.$$

Nótese que el compacto K depende únicamente de la distribución T. Por ende p no depende del soporte de φ, y así la distribución es de orden finito. ■

En particular, las distribuciones a soporte reducidas a un punto $a \in \mathbb{R}^n$ son caracterizadas por el siguiente resultado:

Teorema 4 *Sea $a \in \mathbb{R}^n$ un vector y $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ una distribución. Entonces $sop(T) = \{a\}$ si y solamente si existe p tal que $T = \sum_{|\alpha|\leq p} a_\alpha D^\alpha \delta_a$, con a_α una constante que depende de α.*

Dicho de otra manera, las distribuciones que son a soporte en un punto son combinaciones lineales de derivadas de la masa de Dirac en ese punto.

5.2. Regularización

Sabemos que el proceso de convolución permite regularizar las funciones, en esta sección vamos a generalizar este concepto a las distribuciones.

Definición 11 (Producto de Convolución) *Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ es una distribución y si $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ es una función regular, se define el producto de convolución entre T y φ de la siguiente manera*

$$(T * \varphi)(x) = \langle T, \tau_x\check{\varphi}\rangle \tag{5}$$

en donde hemos notado $\tau_x\check{\varphi}(y) = \check{\varphi}(y-x) = \varphi(x-y)$.

Observemos que para $T = f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, la fórmula (5) coincide con la definición usual de convolución. En efecto

$$(T * \varphi)(x) = \langle T, \tau_x \check{\varphi} \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \tau_x \check{\varphi}(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\varphi(x-y)\, dy.$$

De la misma manera que en los casos anteriores era posible ganar en regularidad al momento de hacer un producto de convolución, ahora disponemos del resultado siguiente:

Teorema 5 *Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ y $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, entonces para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$*

$$T * \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \quad y \quad D^\alpha(T * \varphi) = T * D^\alpha \varphi.$$

Tenemos además las siguientes propiedades:

Proposición 8 *Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ es una distribución y si $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ son dos funciones test, entonces para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$, tenemos*

1) $sop(T * \varphi) \subseteq sop(T) + sop(\varphi)$

2) $(T * \varphi) * \psi = T * (\varphi * \psi)$

3) $(T * \varphi)(0) = \langle T, \check{\varphi} \rangle$ *con* $\check{\varphi}(x) = \varphi(-x)$

5.3. Convolución $\mathcal{D}' * \mathcal{E}'$

Hemos visto que en toda generalidad no es posible multiplicar distribuciones con funciones. Sin embargo, cuando se trata del producto de convolución (que hace intervenir una integral, particularidad que es fundamental) es posible considerar el producto de convolución entre dos distribuciones.

Para empezar, una notación:

Definición 12 *Para $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ y $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, se define la distribuón $\check{T}$ por*

$$\langle \check{T}, \varphi \rangle = \langle T, \check{\varphi} \rangle$$

donde $\check{\varphi}(x) = \varphi(-x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Dado que deseamos hacer el producto de convolución entre dos distribuciones T y S, conviene estudiar antes lo que sucede cuando una de las dos distribuciones (digamos S) es en realidad una función de test. Entonces, si T es una distribución y si $\psi, \varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, por la Proposición 8 tenemos por un lado

$$\langle T * \psi, \varphi \rangle = \langle T * \psi, \check{\check{\varphi}} \rangle = ((T * \psi) * \check{\varphi})(0) = (T * (\psi * \check{\varphi}))(0) = \langle T, (\psi * \check{\varphi})\check{\ } \rangle$$

pero por otro lado se tiene, por un cambio de variable elemental

$$\begin{aligned}(\psi * \check{\varphi})\check{\ }(x) &= (\psi * \check{\varphi})(-x) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y)\check{\varphi}(-x-y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y)\varphi(x+y)\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \psi(-y)\varphi(x-y)\, dy = (\check{\psi} * \varphi)(x),\end{aligned}$$

y a partir de estas dos identidades obtenemos la expresión

$$\langle T * \psi, \varphi \rangle = \langle T, \check{\psi} * \varphi \rangle.$$

Esto motiva la siguiente definición.

Definición 13 *Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ y si $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, se define el producto de convolución entre la distribución T y la distribución S por medio de la fórmula*

$$\langle T * S, \varphi \rangle = \langle T, \check{S} * \varphi \rangle,$$

para todo $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

Observemos que con esta definición el objeto $T * S$ es una distribución. En efecto, si $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, entonces $\check{S} \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ y sabemos por el Teorema 5 que $\check{S} * \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, y si estudiamos el soporte de esta función, se tiene por la Proposición 8 $sop(\check{S} * \varphi) \subseteq sop(\check{S}) + sop(\varphi)$. Así, $\check{S} * \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, por lo tanto la expresión $\langle T, \check{S} * \varphi \rangle$ tiene sentido.

Para verificar que $T * S$ es una distribución, basta darse cuenta que la distribución $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ es a soporte compacto y por lo tanto es de orden finito.

Esta definición que acabamos de dar permite generalizar sin problema las principales propiedades del producto de convolución, en particular tenemos:

Proposición 9 *Sean $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ una distribución y $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ una distribución a soporte compacto, entonces*

1) $sop(T * S) \subseteq sop(T) + sop(S)$

2) $D^\alpha(T * S) = (D^\alpha T) * S = T * (D^\alpha * S)$

Ejemplo:
Sea $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, entonces se tiene la siguiente identidad en el sentido de las distribuciones

$$T * \delta_0 = T.$$

En efecto, notamos que $\langle T * \delta_0, \varphi \rangle = \langle T, \check{\delta}_0 * \varphi \rangle$ y como $\check{\delta}_0 = \delta_0$, entonces tenemos

$$(\delta_0 * \varphi)(x) = \langle \delta_0, \tau_x \check{\varphi} \rangle = \tau_x(\check{\varphi})(0) = \check{\varphi}(0 - x) = \varphi(x),$$

de donde se deduce $\langle T * \delta_0, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$.

En particular, por los resultados anteriores obtenemos la siguiente identidad (en el sentido de las distribuciones):

$$D^\alpha T = T * \delta_0^{(\alpha)},$$

para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$.