Lección n°1: Espacios de Lorentz - motivación y primeras definiciones

EPN, septiembre 2018

Índice

1. Motivación

Los espacios funcionales permiten poner un poco de "orden" en el vasto mundo de las funciones y entre los espacios *clásicos* tenemos:

- **Espacio de funciones continuas y acotadas:**

$$\mathcal{C}^0_a(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} : \|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)| < +\infty \right\}.$$

Miden la continuidad y el tamaño de las funciones.

Ejemplo: la función $1-|x|$ con $-1 \leq |x| \leq 1$ y cero sino. **Contraejemplo:** una función indicatriz (no es continua).

- **Espacio de funciones k-derivables (k entero) a derivadas continuas y acotadas:**

$$\mathcal{C}^k_a(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} : \|f\|_{\mathcal{C}^k} = \sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha f\|_\infty < +\infty \right\}.$$

en donde $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ es un multi-índice, $|\alpha| = \displaystyle\sum_{j=1}^n \alpha_j$ es la longitud del multi-índice y $D^\alpha f(x) = \dfrac{\partial^\alpha f}{\partial^{\alpha_1}_{x_1}\cdots\partial^{\alpha_n}_{x_n}}(x)$ son las derivadas de la función.

Miden la regularidad (derivabilidad) y el tamaño de las funciones y de sus derivadas.

Ejemplo: las funciones sin, cos, etc. **Contraejemplo:** un polinomio x^α (no es acotado)

- **Espacios de Lebesgue L^p con $1 \leq p \leq +\infty$:**
$$L^p(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} : \|f\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \right\},$$
si $1 \leq p < +\infty$, con la modificación siguiente cuando $p = +\infty$:
$$L^\infty(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} : \|f\|_{L^\infty} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} ess |f(x)| < +\infty \right\}.$$
Miden el tamaño de las funciones.

Ejemplo: las funciones indicatrices. **Contraejemplo:** un polinomio x^α (no es integrable)

Todos estos espacios son **espacios de Banach** (normados y completos) y por lo tanto disponen de **muchísimas** propiedades. Sin embargo hay funciones **usuales** que no pertenecen a estos espacios.

$\Longrightarrow$ las funciones de tipo $\frac{1}{|x|}$. No son acotadas, decrecen al infinito, pero no pertenecen a ningún espacio de Lebesgue L^p con $1 \leq p \leq +\infty$.

2. Función de distribución

Definición 1 (Función de Distribución) *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido, sea $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ una función medible definida sobre X a valores en $\mathbb{K}$ y sea $\alpha \in [0, +\infty[$ un real. Definimos la* función de distribución $d_f : [0, +\infty[\longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ asociada a la función f *por medio de la expresión*
$$d_f(\alpha) = \int_X \mathbb{1}_{\{|f(x)| > \alpha\}}(x) d\mu(x) = \mu\left(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}\right). \tag{1}$$

Observación 1 La función de distribución, al estar definida por medio de una integral, nos da una información general sobre el tamaño de f pero no sobre su comportamiento en un punto dado. En particular, si $f = g$ en μ-casi todas partes, entonces por definición se tiene $d_f = d_g$.

Ejemplos:

(i) Función indicatriz de un conjunto de medida finita

(ii) Función $\frac{1}{x}$

(iii) Función $\sqrt{x}$

Proposición 1 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido y sean f y g dos funciones medibles definidas sobre X a valores en $\mathbb{K}$. Entonces, para todo $\alpha, \beta \geq 0$ tenemos los siguientes puntos:*

1) se tiene $d_f = d_{|f|}$, además d_f es decreciente y continua por la derecha sobre $[0, +\infty[$,

2) si se tiene $|g(x)| \leq |f(x)|$ en μ-casi todas partes entonces $d_g(\alpha) \leq d_f(\alpha)$, para todo $\alpha \geq 0$,

3) para toda constante $\lambda \in \mathbb{K}^*$, se tiene $d_{\lambda f}(\alpha) = d_f(\alpha/|\lambda|)$, para todo $\alpha \geq 0$,

4) se tiene la desigualdad $d_{f+g}(\alpha + \beta) \leq d_f(\alpha) + d_g(\beta)$,

5) se tiene la desigualdad $d_{fg}(\alpha\beta) \leq d_f(\alpha) + d_g(\beta)$,

6) si $|f(x)| \leq \liminf_{n \to +\infty} |f_n(x)|$ entonces $d_f(\alpha) \leq \liminf_{n \to +\infty} d_{f_n}(\alpha)$.

Prueba (simplificada).

1) La identidad $d_f = d_{|f|}$ se deduce directamente de la expresión (1).

   Si $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2$, se tiene la inclusión de conjuntos $\{x \in X : |f(x)| > \alpha_2\} \subset \{x \in X : |f(x)| > \alpha_1\}$, de manera que podemos escribir

$$d_f(\alpha_2) = \mu\left(\{x \in X : |f(x)| > \alpha_2\}\right) \leq \mu\left(\{x \in X : |f(x)| > \alpha_1\}\right) = d_f(\alpha_1).$$

2) Si $|g(x)| \leq |f(x)|$ en μ-casi todas partes, tenemos la inclusión de conjuntos para todo $\alpha \geq 0$

$$\{x \in X : |g(x)| > \alpha\} \subset \{x \in X : |f(x)| > \alpha\},$$

   es decir, al considerar la medida de estos conjuntos obtenemos

$$\mu(\{x \in X : |g(x)| > \alpha\}) \leq \mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}),$$

   de modo que $d_g(\alpha) \leq d_f(\alpha)$.

3) Por definición de la función de distribución:

$$\begin{aligned} d_{\lambda f}(\alpha) &= \mu\left(\{x \in X : |\lambda\, f(x)| > \alpha\}\right) = \mu\left(\{x \in X : |\lambda|\,|f(x)| > \alpha\}\right) \\ &= \mu\left(\{x \in X : |f(x)| > \alpha/|\lambda|\}\right) = d_f(\alpha/|\lambda|). \end{aligned}$$

4) Este punto se verifica considerando la siguiente inclusión de conjuntos:

$$\{x \in X : |f(x) + g(x)| > \alpha + \beta\} \quad \subset \quad \{x \in X : |f(x)| > \alpha\} \cup \{x \in X : |g(x)| > \beta\}.$$

   De manera que, calculando la medida de estos conjuntos, se obtiene

$$\mu(\{x \in X : |f(x) + g(x)| > \alpha + \beta\}) \quad \leq \quad \mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}) + \mu(\{x \in X : |g(x)| > \beta\}),$$

   es decir $d_{f+g}(\alpha + \beta) \leq d_f(\alpha) + d_g(\beta)$.

5) Este hecho se verifica de forma similar; en efecto, puesto que disponemos de la inclusión de conjuntos

$$\{x \in X : |fg(x)| > \alpha\beta\} \subset \{x \in X : |f(x)| > \alpha\} \cup \{x \in X : |g(x)| > \beta\},$$

   se tiene sin dificultad que $d_{fg}(\alpha\beta) \leq d_f(\alpha) + d_g(\beta)$. ■

Proposición 2 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido, sea $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ una función medible y sea $0 < p < +\infty$ un parámetro real. Se tiene entonces la identidad*

$$\|f\|_{L^p} = p^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{+\infty} \alpha^{p-1} d_f(\alpha) d\alpha \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2}$$

Prueba. Utilizando la expresión (1) que define la función de distribución escribimos

$$p \int_0^{+\infty} \alpha^{p-1} d_f(\alpha) d\alpha = p \int_0^{+\infty} \alpha^{p-1} \left(\int_X \mathbb{1}_{\{|f| > \alpha\}}(x) d\mu(x) \right) d\alpha,$$

y si aplicamos el teorema de Fubini en la última integral obtenemos

$$p \int_X \int_0^{+\infty} \alpha^{p-1} \mathbb{1}_{\{|f| > \alpha\}}(x) d\alpha\, d\mu(x) = p \int_X \int_0^{|f(x)|} \alpha^{p-1} d\alpha\, d\mu(x),$$

es decir, al integrar en la variable α se tiene $\displaystyle\int_X |f(x)|^p d\mu(x) = \|f\|_{L^p}^p$. ■

Definición 2 (Funciones equidistribuidas) *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido, sean $f, g : X \longrightarrow \mathbb{K}$ dos funciones medibles. Diremos que f y g son* equidistribuidas *si se tiene la identidad $d_f(\alpha) = d_g(\alpha)$, para todo $\alpha \geq 0$.*

3. Espacios de Marcinkiewicz

Definición 3 (Espacios de Lorentz $L^{p,\infty}$) *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido.*

1) *Sea $0 < p < +\infty$ un número real, definimos el espacio de Lorentz $L^{p,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ como el conjunto de funciones medibles $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ tales que la cantidad siguiente es finita*

$$\|f\|_{L^{p,\infty}} = \sup_{\alpha>0} \left\{\alpha\, d_f^{\frac{1}{p}}(\alpha)\right\} = \sup_{\alpha>0} \left\{\alpha\, \mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\})^{\frac{1}{p}}\right\}. \tag{3}$$

2) *El espacio $L^{\infty,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ es por definición el espacio $L^{\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$.*

Para todo $\alpha > 0$ se tiene siempre la mayoración

$$\|f\|_{L^{p,\infty}} \geq \alpha\, d_f^{\frac{1}{p}}(\alpha), \tag{4}$$

lo cual puede reescribirse de varias manera distintas como por ejemplo

$$\|f\|_{L^{p,\infty}}\alpha^{-1} \geq d_f^{\frac{1}{p}}(\alpha) \quad \text{o, de forma equivalente } \|f\|_{L^{p,\infty}}^{p}\alpha^{-p} \geq d_f(\alpha).$$

Ejemplos:

(i) Sobre el espacio medido $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx)$ consideremos la función indicatriz $f = \mathbb{1}_A$, en donde $A \subset \mathbb{R}^n$ es un subconjunto de medida finita. Si $0 \leq \alpha < 1$, entonces se tiene $d_f(\alpha) = |\{x \in \mathbb{R}^n : |\mathbb{1}_A(x)| > \alpha\}| = |A|$, mientras que si $\alpha \geq 1$, se tiene en cambio que $d_f(\alpha) = 0$. A partir de estas observaciones, si calculamos la cantidad $\|f\|_{L^{p,\infty}} = \sup\limits_{\alpha>0} \left\{\alpha\, d_f^{\frac{1}{p}}(\alpha)\right\}$ con $0 < p < +\infty$, obtenemos $\|f\|_{L^{p,\infty}} = |A|^{\frac{1}{p}}$, de donde se tiene que $f = \mathbb{1}_A \in L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{R})$. El lector notará que para las funciones indicatrices de conjuntos acotados las cantidades $\|\cdot\|_{L^{p,\infty}}$ y $\|\cdot\|_{L^p}$ nos proporcionan la misma información, es decir

$$\|\mathbb{1}_A\|_{L^{p,\infty}} = \|\mathbb{1}_A\|_{L^p} = |A|^{\frac{1}{p}}.$$

(ii) Sobre el espacio $X = \mathbb{R}^n$ dotado de su estructura natural consideremos la función $f : x \longmapsto |x|^{-\frac{n}{p}}$. Si calculamos la cantidad $\|f\|_{L^{p,\infty}}$, utilizando las propiedades de la medida de Lebesgue tenemos:

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^{p,\infty}} &= \sup_{\alpha>0} \left\{\alpha\, d_f^{\frac{1}{p}}(\alpha)\right\} = \sup_{\alpha>0} \left\{\alpha \times \left|\{x \in \mathbb{R}^n : |x|^{-\frac{n}{p}} > \alpha\}\right|^{\frac{1}{p}}\right\} \\
&= \sup_{\alpha>0} \left\{\alpha \times \left|\{x \in \mathbb{R}^n : |x| < \alpha^{-\frac{p}{n}}\}\right|^{\frac{1}{p}}\right\} \\
&= \sup_{\alpha>0} \left\{\alpha \times \left|B(0, \alpha^{-\frac{p}{n}})\right|^{\frac{1}{p}}\right\} \\
&= \sup_{\alpha>0} \left\{\alpha \times \left(\alpha^{-p}\left|B(0,1)\right|\right)^{\frac{1}{p}}\right\} = \sup_{\alpha>0} \left\{\alpha \times \alpha^{-1}\left|B(0,1)\right|^{\frac{1}{p}}\right\} \\
&= \left|B(0,1)\right|^{\frac{1}{p}} < +\infty,
\end{aligned} \tag{5}$$

Este último ejemplo sirve para mostrar que si $p \neq q$, entonces los espacios de Lorentz $L^{p,\infty}$ y $L^{q,\infty}$ son distintos.

Observación 2 Para todo $0 < p < +\infty$, tenemos que las funciones del tipo $f(x) = |x|^{-\frac{n}{p}}$ pertenecen al espacio $L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{R})$ y estas funciones son ejemplos típicos de elementos de los espacios de Lorentz $L^{p,\infty}$ que *nunca* pertenecen a los espacios de Lebesgue L^p.

4. Propiedades

4.1. Propiedades estructurales

Proposición 3 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido y sea $0 < p < +\infty$ un parámetro real.*

1) Los espacios de Lorentz $L^{p,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ son subespacios vectoriales del conjunto de funciones medibles.

2) Además se tiene la implicación $\|f\|_{L^{p,\infty}} = 0 \Longrightarrow f = 0$ en μ-casi todas partes

Prueba.

1) Para mostrar que el espacio de Lorentz $L^{p,\infty}$ es un subespacio vectorial de las funciones medibles debemos verificar los dos puntos siguientes:

- si $\lambda \in \mathbb{K}^*$ y si $f \in L^{p,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$, entonces $\lambda f \in L^{p,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$,
- si $f, g \in L^{p,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ entonces $f + g \in L^{p,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$.

Fijemos para empezar una constante $\lambda \in \mathbb{K}^*$, por el punto 3) de la Proposición 1 y con un pequeño cambio de variable podemos escribir

$$\|\lambda f\|_{L^{p,\infty}} = \sup_{\alpha>0}\left\{\alpha\, d_{\lambda f}^{\frac{1}{p}}(\alpha)\right\} = \sup_{\alpha>0}\left\{\alpha\, d_{f}^{\frac{1}{p}}(\alpha/|\lambda|)\right\} = \sup_{\beta>0}\left\{|\lambda|\beta\, d_{f}^{\frac{1}{p}}(\beta)\right\} = |\lambda|\,\|f\|_{L^{p,\infty}}, \tag{6}$$

de donde se deduce que $\lambda f \in L^{p,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$.

Sean ahora f y g dos funciones pertenecientes al espacio $L^{p,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$, veamos que la función suma verifica $f + g \in L^{p,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$. En efecto, por el punto 4) de la Proposición 1 se tiene la desigualdad $d_{f+g}(\alpha) \leq d_f(\alpha/2) + d_g(\alpha/2)$, de manera que tenemos $d_{f+g}^{\frac{1}{p}}(\alpha) \leq \Big(d_f(\alpha/2) + d_g(\alpha/2)\Big)^{\frac{1}{p}}$, entonces, si $0 < p < 1$, se tiene $d_{f+g}^{\frac{1}{p}}(\alpha) \leq 2^{\frac{1}{p}-1}\Big(d_f^{\frac{1}{p}}(\alpha/2) + d_g^{\frac{1}{p}}(\alpha/2)\Big)$, mientras que si $1 \leq p < +\infty$, se obtiene la desigualdad[1] $d_{f+g}^{\frac{1}{p}}(\alpha) \leq d_f^{\frac{1}{p}}(\alpha/2) + d_g^{\frac{1}{p}}(\alpha/2)$, y entonces podemos escribir, en función de los valores de p e introduciendo el factor $\alpha/2$, las desigualdades siguientes

$$\begin{aligned}
\alpha\, d_{f+g}^{\frac{1}{p}}(\alpha) &\leq 2^{\frac{1}{p}}\left((\alpha/2)\, d_f^{\frac{1}{p}}(\alpha/2) + (\alpha/2)\, d_g^{\frac{1}{p}}(\alpha/2)\right), \quad \text{si } 0 < p < 1,\\
\alpha\, d_{f+g}^{\frac{1}{p}}(\alpha) &\leq 2\left((\alpha/2)\, d_f^{\frac{1}{p}}(\alpha/2) + (\alpha/2)\, d_g^{\frac{1}{p}}(\alpha/2)\right), \quad \text{si } 1 \leq p < +\infty.
\end{aligned} \tag{7}$$

Al tomar el supremo sobre el conjunto $\alpha > 0$ tenemos entonces

$$\sup_{\alpha>0}\left\{\alpha\, d_{f+g}^{\frac{1}{p}}(\alpha)\right\} \leq \text{máx}(2^{\frac{1}{p}}, 2)\left(\sup_{\alpha>0}\left\{(\alpha/2)\, d_f^{\frac{1}{p}}(\alpha/2)\right\} + \sup_{\alpha>0}\left\{(\alpha/2)\, d_g^{\frac{1}{p}}(\alpha/2)\right\}\right),$$

lo cual nos permite finalmente escribir

$$\|f+g\|_{L^{p,\infty}} \leq \text{máx}(2^{\frac{1}{p}}, 2)\left(\|f\|_{L^{p,\infty}} + \|g\|_{L^{p,\infty}}\right), \tag{8}$$

lo que muestra que $f + g \in L^{p,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$.

2) Si se tiene $\|f\|_{L^{p,\infty}} = 0$, entonces por definición $\sup_{\alpha>0}\left\{\alpha\, d_f^{\frac{1}{p}}(\alpha)\right\} = 0$, lo que implica que $d_f(\alpha > 0) = 0$ para todo $\alpha > 0$, es decir que el conjunto $\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}$ es de μ-medida nula para todo $\alpha > 0$, de donde se deduce sin problema que la función f es nula en μ-casi todas partes. ■

[1] Recordar que si $a, b > 0$ entonces $(a+b)^\sigma \leq a^\sigma + b^\sigma$ si $0 < \sigma < 1$ y $(a+b)^\sigma \leq 2^{\sigma-1}(a^\sigma + b^\sigma)$ si $1 < \sigma < +\infty$.

Observación 3 Las propiedades (6) y (8) que acabamos de demostrar sobre la funcional $\|\cdot\|_{L^{p,\infty}}$ hacen de esta cantidad un operador cuasi-lineal, pero *no* se dispone de la desigualdad triangular.

En efecto, tenemos el contraejemplo siguiente: consideramos sobre el conjunto $X =]0,1[$ las funciones $f(x) = x^{-\frac{1}{p}}\mathbb{1}_{]0,1[}(x)$ y $g(x) = (1-x)^{-\frac{1}{p}}\mathbb{1}_{]0,1[}(x)$ con $0 < p < +\infty$. Siguiendo los cálculos realizados en la expresión (5) obtenemos directamente

$$\|f\|_{L^{p,\infty}} = \|g\|_{L^{p,\infty}} = 1.$$

Tenemos ahora $\|f+g\|_{L^{p,\infty}} = \sup\limits_{\alpha>0}\left\{\alpha \times \left|\{x \in]0,1[: |f(x)+g(x)| > \alpha\}\right|^{\frac{1}{p}}\right\}$ por definición, y vemos sin mayor problema que el valor maximal posible de la cantidad $\left|\{x \in]0,1[: |f(x)+g(x)| > \alpha\}\right|$ es igual a 1 (que corresponde a todo el conjunto $X =]0,1[$), y se tiene esta situación cuando $0 \leq \alpha \leq 2^{1+\frac{1}{p}}$, siendo este último valor el mínimo sobre $]0,1[$ de la función $f+g$. Para este valor particular de $\alpha = 2^{1+\frac{1}{p}}$ podemos entonces escribir

$$\alpha \times \left|\{x \in]0,1[: |f(x)+g(x)| > \alpha\}\right|^{\frac{1}{p}} = 2^{1+\frac{1}{p}},$$

y usamos ahora la desigualdad (4) para obtener la mayoración $\|f+g\|_{L^{p,\infty}} \geq 2^{1+\frac{1}{p}}$, de esta manera podemos ver que *no se cumple* la desigualdad triangular pues se tiene, para todo $0 < p < +\infty$ la mayoración

$$\|f+g\|_{L^{p,\infty}} \geq 2^{1+\frac{1}{p}} > 2 = \|f\|_{L^{p,\infty}} + \|g\|_{L^{p,\infty}}.$$

Definición 4 (cuasi-norma) *Sea E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial topológico. Una aplicación $\|\cdot\|_E : E \longrightarrow [0,+\infty[$ es una* cuasi-norma *si verifica los siguientes puntos*

1) para todo $x \in E$: $\|x\|_E = 0 \Longleftrightarrow x = 0$,

2) para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ y todo $x \in E$: $\|\lambda x\|_E = |\lambda|\|x\|_E$,

3) existe una constante $C \geq 1$ tal que para todo $x, y \in E$ se tiene $\|x+y\|_E \leq C(\|x\|_E + \|y\|_E)$.

Al espacio $(E, \|\cdot\|_E)$ se denominará espacio cuasi-normado.

La topología de un espacio cuasi-normado $(E, \|\cdot\|_E)$ se determina de manera natural considerando las cuasi-bolas abiertas $B(x,r) = \{y \in E : \|x-y\|_E < r\}$.

Teorema 1 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido, sea $0 < p < +\infty$ un parámetro real y consideremos los espacios de Lorentz $L^{p,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ dados en la Definición 3. La funcional $\|\cdot\|_{L^{p,\infty}}$ dada en la expresión (3) es una cuasi-norma sobre estos espacios y además los espacios $(L^{p,\infty}, \|\cdot\|_{L^{p,\infty}})$ son espacios cuasi-normados completos.*

4.2. Propiedades de inclusión

Proposición 4 (Inclusión Lebesgue-Lorentz) *Sea $0 < p < +\infty$ y sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido. Entonces tenemos la inclusión:*

$$L^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K}) \subsetneq L^{p,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K}).$$

Nótese además que esta inclusión es estricta. Más precisamente se tiene la estimación siguiente para toda función $f \in L^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$:

$$\|f\|_{L^{p,\infty}} \leq \|f\|_{L^p}. \tag{9}$$

Prueba. Vamos primero a establecer la desigualdad (9) para posteriormente verificar que la inclusión es estricta. Sea pues $\alpha > 0$ un número real, entonces escribimos

$$\|f\|_{L^p}^p = \int_X |f(x)|^p d\mu(x) = \int_{\{|f|>\alpha\}} |f(x)|^p d\mu(x) + \int_{\{|f|\leq\alpha\}} |f(x)|^p d\mu(x) \geq \int_{\{|f|>\alpha\}} |f(x)|^p d\mu(x).$$

Dado que estamos integrando sobre el conjunto $\{x \in X : |f| > \alpha\}$ tenemos

$$\int_{\{|f|>\alpha\}} |f(x)|^p d\mu(x) \geq \alpha^p \int_{\{|f|>\alpha\}} d\mu(x) = \alpha^p d_f(\alpha).$$

Es decir que para todo $\alpha > 0$ se tiene la estimación uniforme $\|f\|_{L^p} \geq \alpha d_f^{\frac{1}{p}}(\alpha)$, y podemos escribir $\|f\|_{L^p} \geq \sup\limits_{\alpha>0}\left\{\alpha\, d_f^{\frac{1}{p}}(\alpha)\right\} = \|f\|_{L^{p,\infty}}$. ■

Proposición 5 (Traslación y Dilatación) *Sea $0 < p < +\infty$ y consideremos los espacios de Lorentz $L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{K})$. Para todo $\tau \in \mathbb{R}^n$ y todo $\lambda > 0$ tenemos*

$$\|f_\tau\|_{L^{p,\infty}} = \|f\|_{L^{p,\infty}} \quad \text{y} \quad \|\delta_\lambda[f]\|_{L^{p,\infty}} = \lambda^{-\frac{n}{p}}\|f\|_{L^{p,\infty}}.$$

Prueba. Recordemos que para todo $\tau \in \mathbb{R}^n$ la *traslación* f_τ de una función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ está definida por $f_\tau(x) = f(x+\tau)$. Utilizando la definición de la función de distribución dada en la fórmula (1) y utilizando la unimodularidad[2] de $\mathbb{R}^n$ tenemos directamente la identidad

$$d_{f_\tau}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{\{|f(x+\tau)|>\alpha\}}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{\{|f(x)|>\alpha\}}(x)dx = d_f(\alpha), \tag{10}$$

de donde se deduce la primera identidad.
Recordemos ahora que la dilatación $\delta_\lambda[f]$ de una función está dada por la expresión $\delta_\lambda[f](x) = f(\lambda x) = f(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$. De esta manera tenemos, gracias a un cambio de variable:

$$d_{\delta_\lambda[f]}(\alpha) \;=\; \int_{\{|\delta_\lambda[f]|>\alpha\}} dx = \int_{\{|f(\lambda x)|>\alpha\}} dx = \lambda^{-n}\int_{\{|f(x)|>\alpha\}} dx = \lambda^{-n} d_f(\alpha), \tag{11}$$

de donde se deduce la segunda identidad al reconstruir la funcional $\|\cdot\|_{L^{p,\infty}}$ dada en (3). ■

Observación 4 Es importante notar que cuando se dispone de una estructura de dilatación, las funcionales que determinan los espacios de Lebesgue L^p y de Lorentz $L^{p,\infty}$ tienen el mismo comportamiento, es decir

$$\|\delta_\lambda[f]\|_{L^p} = \lambda^{-\frac{n}{p}}\|f\|_{L^p} \qquad \text{y} \qquad \|\delta_\lambda[f]\|_{L^{p,\infty}} = \lambda^{-\frac{n}{p}}\|f\|_{L^{p,\infty}}$$

Proposición 6 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido tal que $\mu(X) < +\infty$. Sean p y q dos números reales tales que $0 < p < q < +\infty$ y sea f una función de $L^{q,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$. Tenemos entonces la estimación:*

$$\int_X |f(x)|^p d\mu(x) \leq C(p,q)\, \mu(X)^{1-\frac{p}{q}}\|f\|^p_{L^{q,\infty}}, \tag{12}$$

en donde $C(p,q) = \frac{q}{q-p}$.

Prueba. Para empezar la demostración utilizamos la Proposición 2 que proporciona una caracterización de la norma de los espacios $L^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ basándose en la función de distribución. Podemos entonces escribir

$$\int_X |f(x)|^p d\mu(x) = p\int_0^{+\infty} \alpha^{p-1}\mu(X \cap \{x \in X : |f| > \alpha\})d\alpha.$$

Observemos ahora que tenemos las dos mayoraciones siguientes

$$\mu(X \cap \{x \in X : |f| > \alpha\}) \leq \mu(X), \quad \text{y} \quad \mu(X \cap \{x \in X : |f| > \alpha\}) \leq \alpha^{-q}\|f\|^q_{L^{q,\infty}},$$

la primera estimación es finita pues por hipótesis se tiene $\mu(X) < +\infty$ mientras que la segunda se deduce de la definición de la cantidad $\|f\|_{L^{q,\infty}}$ que por hipótesis también es finita y se tiene entonces

$$\int_X |f(x)|^p d\mu(x) \leq p\int_0^{+\infty} \alpha^{p-1} \min\left(\mu(X), \alpha^{-q}\|f\|^q_{L^{q,\infty}}\right) d\alpha.$$

En este punto utilizamos la linealidad de la integral para escribir

$$\begin{aligned}\int_X |f(x)|^p d\mu(x) \;&\leq\; p\int_0^{T} \alpha^{p-1} \min\left(\mu(X), \alpha^{-q}\|f\|^q_{L^{q,\infty}}\right) d\alpha \\ &\quad +p\int_T^{+\infty} \alpha^{p-1} \min\left(\mu(X), \alpha^{-q}\|f\|^q_{L^{q,\infty}}\right) d\alpha,\end{aligned} \tag{13}$$

[2] Ver la Proposición 4.1.14 del Volumen 2.

en donde el parámetro T está fijado por $T = \mu(X)^{-\frac{1}{q}}\|f\|_{L^{q,\infty}}$. Ahora si $\alpha \in]0, T[$, entonces $\text{mín}\big(\mu(X), \alpha^{-q}\|f\|^q_{L^{q,\infty}}\big) = \mu(X)$, e inversamente, si $\alpha \in]T, +\infty[$ se tiene que $\text{mín}\big(\mu(X), \alpha^{-q}\|f\|^q_{L^{q,\infty}}\big) = \alpha^{-q}\|f\|^q_{L^{q,\infty}}$. Así, regresando a la expresión (13) escribimos:

$$\int_X |f(x)|^p d\mu(x) \leq p\int_0^T \alpha^{p-1}\mu(X)d\alpha + p\int_T^{+\infty} \alpha^{p-1-q}\|f\|^q_{L^{q,\infty}}d\alpha.$$

Es decir, calculando estas integrales obtenemos

$$\int_X |f(x)|^p d\mu(x) \leq T^p\mu(X) + \frac{p}{q-p}T^{p-q}\|f\|^q_{L^{q,\infty}},$$

luego, con el valor de T definido anteriormente podemos escribir

$$\int_X |f(x)|^p d\mu(x) \leq \left(1 + \frac{p}{q-p}\right)\mu(X)^{1-\frac{p}{q}}\|f\|^q_{L^{q,\infty}},$$

lo cual nos permite concluir. ■

Hay que notar que si $p \geq q$ entonces la estimación (12) es falsa.

Corolario 1 (Inclusiones - Medida finita) *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido de μ-medida finita, es decir $\mu(X) < +\infty$. Si $0 < p < q < +\infty$, tenemos las inclusiones de espacios siguientes*

$$L^q(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K}) \subsetneq L^{q,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K}) \subsetneq L^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K}) \subsetneq L^{p,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K}).$$

4.3. Una desigualdad de Interpolación

Teorema 2 (Interpolación) *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido, sean $0 < p < q \leq +\infty$ dos parámetros reales y sea f una función medible tal que $f \in L^{p,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K}) \cap L^{q,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$, entonces $f \in L^r(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ para todo $p < r < q$ y además se tiene la desigualdad de interpolación siguiente*

$$\|f\|_{L^r} \leq C(p, q, r)\|f\|^{\theta}_{L^{p,\infty}}\|f\|^{1-\theta}_{L^{q,\infty}},$$

donde $\theta = \frac{p}{r}\frac{q-r}{q-p}$ si $q < +\infty$ y donde $\theta = p/r$ si $q = +\infty$.

Demostración. Sea $0 < q < +\infty$. Como se tiene que $f \in L^{p,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K}) \cap L^{q,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$, tenemos por definición de las funcionales $\|\cdot\|_{L^{p,\infty}}$ y $\|\cdot\|_{L^{q,\infty}}$, las mayoraciones siguientes

$$d_f(\alpha) \leq \frac{\|f\|^p_{L^{p,\infty}}}{\alpha^p} \qquad \text{y} \qquad d_f(\alpha) \leq \frac{\|f\|^q_{L^{q,\infty}}}{\alpha^q},$$

es decir que podemos escribir $d_f(\alpha) \leq \text{mín}\left(\frac{\|f\|^p_{L^{p,\infty}}}{\alpha^p}, \frac{\|f\|^q_{L^{q,\infty}}}{\alpha^q}\right)$. Consideremos ahora la norma $\|\cdot\|_{L^r}$ y utilicemos la caracterización por medio de líneas de nivel dada en la expresión (2). Con la estimación anterior sobre la función de distribución d_f y por la linealidad de la integral obtenemos

$$\begin{aligned}\|f\|^r_{L^r} &= r\int_0^{+\infty} \alpha^{r-1}d_f(\alpha)d\alpha \leq r\int_0^{+\infty}\alpha^{r-1}\,\text{mín}\left(\frac{\|f\|^p_{L^{p,\infty}}}{\alpha^p}, \frac{\|f\|^q_{L^{q,\infty}}}{\alpha^q}\right)d\alpha \\ &\leq r\int_0^T \alpha^{r-1-p}\|f\|^p_{L^{p,\infty}}d\alpha + r\int_T^{+\infty}\alpha^{r-1-q}\|f\|^q_{L^{q,\infty}}d\alpha,\end{aligned}$$

en donde hemos fijado $T = \left(\frac{\|f\|^q_{L^{q,\infty}}}{\|f\|^p_{L^{p,\infty}}}\right)^{\frac{1}{q-p}} < +\infty$. Evaluando el valor de estas integrales se tiene

$$\begin{aligned}\|f\|^r_{L^r} &\leq \frac{r}{r-p}\|f\|^p_{L^{p,\infty}}T^{r-p} + \frac{r}{q-r}\|f\|^q_{L^{q,\infty}}T^{r-q} \\ &\leq \left(\frac{r}{r-p} + \frac{r}{q-r}\right)(\|f\|^p_{L^{p,\infty}})^{\frac{q-r}{q-p}}(\|f\|^q_{L^{q,\infty}})^{\frac{r-p}{q-p}},\end{aligned}$$

y extrayendo la raíz r-ésima de esta desigualdad anterior obtenemos

$$\|f\|_{L^r} \leq \left(\frac{r}{r-p} + \frac{r}{q-r}\right)^{\frac{1}{r}} \|f\|_{L^{p,\infty}}^{\frac{p}{r}\frac{q-r}{q-p}} \|f\|_{L^{q,\infty}}^{\frac{p}{r}\frac{r-p}{q-p}},$$

lo que corresponde con la mayoración buscada cuando $q < +\infty$.

Pasemos ahora al caso cuando $q = +\infty$, en esta situación se tiene por definición $L^{\infty,\infty} = L^\infty$ y observamos en particular que se tiene $d_f(\alpha) = 0$ si $\alpha > \|f\|_{L^\infty}$. Con esta observación podemos escribir

$$\|f\|_{L^r}^r = r\int_0^{+\infty} \alpha^{r-1} d_f(\alpha) d\alpha = r\int_0^{\|f\|_{L^\infty}} \alpha^{r-1} d_f(\alpha) d\alpha,$$

pero como se tiene la estimación $d_f(\alpha) \leq \alpha^{-p}\|f\|_{L^{p,\infty}}^p$, entonces

$$\|f\|_{L^r}^r \leq r\int_0^{\|f\|_{L^\infty}} \alpha^{r-1}\alpha^{-p}\|f\|_{L^{p,\infty}}^p d\alpha,$$

y evaluando esta integral obtenemos $\|f\|_{L^r}^r \leq \frac{r}{r-p}\|f\|_{L^{p,\infty}}^p \|f\|_{L^\infty}^{r-p}$, basta ahora extraer la raíz r-ésima de esta estimación para obtener el resultado buscado. ■

Conviene poner en perspectiva este resultado utilizando la desigualdad (9) y de esta manera tenemos las mayoraciones:

$$\|f\|_{L^{r,\infty}} \leq \|f\|_{L^r} \leq C\|f\|_{L^{p,\infty}}^\theta \|f\|_{L^{q,\infty}}^{1-\theta} \leq C\|f\|_{L^p}^\theta \|f\|_{L^q}^{1-\theta}.$$

4.4. Desigualdades de Hölder

Teorema 3 (Desigualdades de Hölder) *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido. Sean $p, p_1, ..., p_n$ números reales positivos pertenecientes al intervalo $]0, +\infty[$ tales que*

$$\frac{1}{p} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{p_j}.$$

Sean $(f_j)_{1\leq j\leq n}$ funciones medibles definidas sobre X a valores en $\mathbb{K}$ pertenecientes a los espacios $L^{p_j,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$. Entonces tenemos la mayoración

$$\left\|\prod_{j=1}^{n} f_j\right\|_{L^{p,\infty}} \leq C(p, p_1, \dots, p_n) \prod_{j=1}^{n} \|f_j\|_{L^{p_j,\infty}}$$

en donde $C(p, p_1, \dots, p_n) = p^{-\frac{1}{p}} \prod_{j=1}^{n} p_j^{\frac{1}{p_j}}$.

Demostración. Estudiemos la función de distribución del producto $\prod_{j=1}^{n} f_j$ y para ello vamos a aplicar el punto 5) de la Proposición 1, página 2, utilizando la identidad $\alpha = \frac{\alpha}{\sigma_1} \times \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \times \frac{\sigma_2}{\sigma_3} \times \dots \times \frac{\sigma_{n-2}}{\sigma_{n-1}} \times \sigma_{n-1}$, donde $\sigma_i > 0$ $(1 \leq i \leq n-1)$. De esta manera podemos escribir

$$\begin{aligned} d_{\prod_{j=1}^{n} f_j}(\alpha) &\leq d_{f_1}\left(\frac{\alpha}{\sigma_1}\right) + d_{f_2}\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right) + d_{f_3}\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_3}\right) + \\ &\quad + \dots + d_{f_{n-1}}\left(\frac{\sigma_{n-2}}{\sigma_{n-1}}\right) + d_{f_n}(\sigma_{n-1}). \end{aligned}$$

Dado que cada función f_j pertenece al espacio de Lorentz $L^{p_j,\infty}$ correspondiente, podemos aplicar la mayoración (4) a cada uno de los términos anteriores para obtener

$$\begin{aligned} d_{\prod_{j=1}^{n} f_j}(\alpha) &\leq \|f_1\|_{L^{p_1,\infty}}^{p_1}\left(\frac{\sigma_1}{\alpha}\right)^{p_1} + \|f_2\|_{L^{p_2,\infty}}^{p_2}\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)^{p_2} + \|f_3\|_{L^{p_3,\infty}}^{p_3}\left(\frac{\sigma_3}{\sigma_2}\right)^{p_3} + \\ &\quad + \dots + \|f_{n-1}\|_{L^{p_{n-1},\infty}}^{p_{n-1}}\left(\frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_{n-2}}\right)^{p_{n-1}} + \|f_n\|_{L^{p_n,\infty}}^{p_n}\left(\frac{1}{\sigma_{n-1}}\right)^{p_n}. \end{aligned}$$

Definimos ahora $x_1 = \|f_1\|_{L^{p_1,\infty}}\left(\frac{\sigma_1}{\alpha}\right)$, $x_2 = \|f_2\|_{L^{p_2,\infty}}\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)$, $x_3 = \|f_3\|_{L^{p_3,\infty}}\left(\frac{\sigma_3}{\sigma_2}\right)$, $\ldots$, $x_{n-1} = \|f_{n-1}\|_{L^{p_{n-1},\infty}}\left(\frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_{n-2}}\right)$, $x_n = \|f_n\|_{L^{p_n,\infty}}\left(\frac{1}{\sigma_{n-1}}\right)$, y nos interesamos en minimizar el problema

$$x_1^{p_1} + x_2^{p_2} + x_3^{p_3} + \cdots + x_{n-1}^{p_{n-1}} + x_n^{p_n},$$

con la condición $x_1 \times x_2 \times x_3 \times \cdots \times x_{n-1} \times x_n = \frac{1}{\alpha}\prod_{j=1}^{n}\|f_j\|_{L^{p_j,\infty}}$ (si necesario proceder por recurrencia con 2 funciones, luego 3, etc, y utilizar el método de multiplicadores de Lagrange), de esta manera obtenemos la mayoración

$$d_{\prod_{j=1}^{n} f_j}(\alpha) \leq \left(p^{-1}\prod_{j=1}^{n} p_j^{\frac{p}{p_j}}\right)\alpha^{-p}\prod_{j=1}^{n}\|f_j\|_{L^{p_j,\infty}}^{p},$$

extrayendo la raíz p-ésima de esta desigualdad, se tiene

$$\alpha \times d_{\prod_{j=1}^{n} f_j}^{\frac{1}{p}}(\alpha) \leq p^{-\frac{1}{p}}\prod_{j=1}^{n} p_j^{\frac{1}{p_j}}\prod_{j=1}^{n}\|f_j\|_{L^{p_j,\infty}},$$

a partir de esta estimación uniforme con respecto a la variable α y por definición de la funcional $\|\cdot\|_{L^{p,\infty}}$ tenemos finalmente la mayoración

$$\left\|\prod_{j=1}^{n} f_j\right\|_{L^{p,\infty}} \leq p^{-\frac{1}{p}}\prod_{j=1}^{n} p_j^{\frac{1}{p_j}}\prod_{j=1}^{n}\|f_j\|_{L^{p_j,\infty}}$$

lo que termina la demostración del teorema. ■

4.5. Una caracterización equivalente de los espacios de Lorentz $L^{p,\infty}$

Teorema 4 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido σ-finito. Sea $1 < p < +\infty$ un parámetro real y sea $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ una función medible. Entonces $f \in L^{p,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ si y solo si la cantidad*

$$\|f\|_{M^{p,\infty}} = \min_{0\leq C\leq+\infty}\left\{\int_A |f(x)|dx \leq C\mu(A)^{1-\frac{1}{p}},\ \text{para todo conjunto } A \in \mathscr{A}\right\},$$

es finita. Se tienen además las desigualdades

$$\frac{p-1}{p^{1+\frac{1}{p}}}\|f\|_{M^{p,\infty}} \leq \|f\|_{L^{p,\infty}} \leq \|f\|_{M^{p,\infty}}. \tag{14}$$

Estas desigualdades indican que las dos funcionales $\|\cdot\|_{M^{p,\infty}}$ y $\|\cdot\|_{L^{p,\infty}}$ son equivalentes cuando $1 < p < +\infty$.

Demostración. Empecemos verificando la estimación $\|f\|_{L^{p,\infty}} \leq \|f\|_{M^{p,\infty}}$ y consideremos f una función medible y $\alpha > 0$ un parámetro real. Como el espacio medido $(X, \mathscr{A}, \mu)$ es σ-finito, existe una sucesión creciente de conjuntos $(B_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de medida finita que recubren X y podemos considerar el conjunto de medida finita $A_j = \{x \in B_j : |f(x)| > \alpha\}$. Tenemos entonces por un lado la desigualdad $\alpha\mu(A_j) \leq \displaystyle\int_{A_j}|f(x)|dx$ y por otro lado, por definición de la funcional $\|\cdot\|_{M^{p,\infty}}$, tenemos la estimación $\displaystyle\int_{A_j}|f(x)|dx \leq \|f\|_{M^{p,\infty}}\mu(A_j)^{1-\frac{1}{p}}$. Como la cantidad $\mu(A_j)$ es finita, podemos escribir, utilizando las dos desigualdades anteriores, $\alpha\mu(A_j)^{\frac{1}{p}} \leq \|f\|_{M^{p,\infty}}$ y junto con el Teorema de Convergencia Dominada podemos hacer tender $j \to +\infty$ (recordar que la sucesión $(B_j)_{j\in\mathbb{N}}$ es creciente) para escribir $\alpha\mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\})^{\frac{1}{p}} \leq \|f\|_{M^{p,\infty}}$, de donde se obtiene por la fórmula (3), página 4, la estimación $\|f\|_{L^{p,\infty}} \leq \|f\|_{M^{p,\infty}}$.

Pasemos a la verificación de la primera desigualdad de la expresión (14). Sea pues $A \in \mathscr{A}$ un conjunto medible y sea $\alpha_0 > 0$ un real, tenemos entonces la mayoración

$$\begin{aligned}\int_A |f(x)|d\mu(x) &= \int_{\{x\in A:|f|\leq\alpha_0\}} |f(x)|d\mu(x) + \int_{\{x\in A:|f|>\alpha_0\}} |f(x)|d\mu(x)\\ &\leq \alpha_0\mu(A) + \int_{A_0} |f(x)|d\mu(x), \end{aligned} \tag{15}$$

en donde hemos notado $A_0 = \{x \in A : |f(x)| > \alpha_0\}$. Observemos ahora que se tiene

$$\int_{A_0} |f(x)|d\mu(x) = \alpha_0 d_f(\alpha_0) + \int_{\alpha_0}^{+\infty} \mu(\{x \in A_0 : |f(x)| > \alpha\})d\alpha, \tag{16}$$

en efecto, utilizando el Teorema de Fubini, tenemos

$$\alpha_0 d_f(\alpha_0) + \int_{\alpha_0}^{+\infty} \mu(\{x \in A_0 : |f(x)| > \alpha\})d\alpha = \alpha_0 d_f(\alpha_0) + \int_{A_0} \left(\int_{\alpha_0}^{|f|} d\alpha\right) d\mu(x)$$

$$= \alpha_0 d_f(\alpha_0) + \int_{A_0} (|f(x)| - \alpha_0)\, d\mu(x) = \alpha_0 d_f(\alpha_0) + \int_{A_0} |f(x)|d\mu(x) - \alpha_0 d_f(\alpha_0) = \int_{A_0} |f(x)|d\mu(x).$$

De esta manera, inyectando la identidad (16) en la desigualdad (15) podemos escribir

$$\begin{aligned}\int_A |f(x)|d\mu(x) &\leq \alpha_0\mu(A) + \alpha_0 d_f(\alpha_0) + \int_{\alpha_0}^{+\infty} \mu(\{x \in A_0 : |f(x)| > \alpha\})d\alpha\\ &\leq \alpha_0\mu(A) + \alpha_0 d_f(\alpha_0) + \int_{\alpha_0}^{+\infty} \mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\})d\alpha\\ &\leq \alpha_0\mu(A) + \alpha_0 d_f(\alpha_0) + \int_{\alpha_0}^{+\infty} d_f(\alpha)d\alpha,\end{aligned}$$

y con la estimación (4), página 4, se tiene

$$\begin{aligned}\int_A |f(x)|d\mu(x) &\leq \alpha_0\mu(A) + \frac{\|f\|_{L^{p,\infty}}^p}{\alpha_0^{p-1}} + \int_{\alpha_0}^{+\infty} \frac{\|f\|_{L^{p,\infty}}^p}{\alpha^p} d\alpha\\ &\leq \alpha_0\mu(A) + \frac{\|f\|_{L^{p,\infty}}^p}{\alpha_0^{p-1}} + \frac{1}{p-1}\frac{\|f\|_{L^{p,\infty}}^p}{\alpha_0^{p-1}} \leq \alpha_0\mu(A) + \frac{p}{p-1}\frac{\|f\|_{L^{p,\infty}}^p}{\alpha_0^{p-1}}.\end{aligned}$$

Dado que el real $\alpha_0 > 0$ era arbitrario, podemos fijar $\alpha_0 = p^{\frac{1}{p}}\|f\|_{L^{p,\infty}}\mu(A)^{-\frac{1}{p}}$, lo que nos permite escribir

$$\int_A |f(x)|d\mu(x) \leq \frac{p^{1+\frac{1}{p}}}{p-1}\|f\|_{L^{p,\infty}}\mu(A)^{1-\frac{1}{p}},$$

de donde se obtiene, por definición de la funcional $\|\cdot\|_{M^{p,\infty}}$, la desigualdad $\|f\|_{M^{p,\infty}} \leq \frac{p^{1+\frac{1}{p}}}{p-1}\|f\|_{L^{p,\infty}}$, que nos permite terminar la demostración del Teorema 4. ■

Observación 5 La caracterización equivalente dada en el Teorema 4 es interesante pues no hace falta realizar transformaciones a las funciones (como la función de distribución d_f) y permite realizar algunos cálculos directamente.

Teorema 5 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido. Sea $0 < p < +\infty$ un parámetro real y sea $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ una función medible. Entonces toda función $f \in L^{p,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ puede descomponerse como la suma $f(x) = f_0(x) + f_1(x)$ en donde $\|f_0\|_{L^{p_0}} \leq C_0A^{\theta-1}$ y $\|f_1\|_{L^{p_1}} \leq C_0A^{\theta}$ con $A > 0$ y en donde los parámetros $0 < p_0 < p < p_1 < +\infty$ están relacionados por la expresión $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_0} + \frac{1-\theta}{p_1}$, con $0 < \theta < 1$.*

Demostración. Definimos pues las funciones f_0 y f_1 de la manera siguiente

$$f_0 = f\mathbb{1}_{\{x\in X:|f(x)|>B\}} \quad \text{y} \quad f_1 = f\mathbb{1}_{\{x\in X:|f(x)|\leq B\}},$$

para un cierto $B > 0$. Vemos directamente por esta definición de las funciones f_0 y f_1 que se tiene la identidad $f(x) = f_0(x) + f_1(x)$, de manera que debemos mostrar que $f_0 \in L^{p_0}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ y que $f_1 \in L^{p_1}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{R})$.

- Para f_0, por definición de esta función tenemos

$$\int_X |f_0(x)|^{p_0} d\mu(x) = \int_{\{|f(x)|>B\}} |f(x)|^{p_0} d\mu(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} \int_{\{2^jB<|f(x)|<2^{j+1}B\}} |f(x)|^{p_0} d\mu(x)\ ,$$

pero como sobre el conjunto $\{2^jB < |f(x)| < 2^{j+1}B\}$ se tiene la mayoración $|f(x)| < 2^{j+1}B$, entonces podemos escribir

$$\int_X |f_0(x)|^{p_0} d\mu(x) \leq \sum_{j=0}^{+\infty} (2^{j+1}B)^{p_0} \int_{\{2^jB<|f(x)|<2^{j+1}B\}} d\mu(x) \leq \sum_{j=0}^{+\infty} (2^{j+1}B)^{p_0} \mu(\{2^jB < |f(x)| < 2^{j+1}B\}).$$

Utilizando la definición de la función de distribución d_f, se tiene para todo $\alpha > 0$ la desigualdad $d_f(\alpha) \leq \alpha^{-p}\|f\|^p_{L^{p,\infty}}$ y obtenemos

$$\int_X |f_0(x)|^{p_0} d\mu(x) \leq \sum_{j=0}^{+\infty} (2^{j+1}B)^{p_0} d_f(2^jB) \leq \sum_{j=0}^{+\infty} (2^{j+1}B)^{p_0} (2^jB)^{-p} \|f\|^p_{L^{p,\infty}} \leq 2^{p_0} B^{p_0-p} \|f\|^p_{L^{p,\infty}} \sum_{j=0}^{+\infty} 2^{j(p_0-p)},$$

y la suma anterior converge pues $p_0 < p$ y por lo tanto obtenemos que $f_0 \in L^{p_0}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ puesto que se tiene la mayoración

$$\|f_0\|^{p_0}_{L^{p_0}} = CB^{p_0-p}\|f\|^p_{L^{p,\infty}} < +\infty.$$

- Para la función f_1 escribimos, utilizando esencialmente los mismos argumentos explicitados anteriormente:

$$\int_X |f_1(x)|^{p_1} d\mu(x) = \int_{\{|f(x)|\leq B\}} |f(x)|^{p_1} d\mu(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} \int_{\{2^{-(j+1)}B<|f(x)|\leq 2^{-j}B\}} |f(x)|^{p_1} d\mu(x)$$

$$\leq \sum_{j=0}^{+\infty} (2^{-j}B)^{p_1} \int_{\{2^{-(j+1)}B<|f(x)|\leq 2^{-j}B\}} d\mu(x) \leq \sum_{j=0}^{+\infty} (2^{-j}B)^{p_1} d_f(2^{-(j+1)}B)$$

$$\leq \sum_{j=0}^{+\infty} (2^{-j}B)^{p_1} (2^{-(j+1)}B)^{-p} \|f\|^p_{L^{p,\infty}} \leq 2^p B^{p_1-p} \|f\|^p_{L^{p,\infty}} \sum_{j=0}^{+\infty} 2^{-j(p_1-p)},$$

y esta suma anterior converge pues $p < p_1$ y por lo tanto obtenemos

$$\|f_1\|^{p_1}_{L^{p_1}} \leq CB^{p_1-p}\|f\|^p_{L^{p,\infty}} < +\infty.$$

Reescribimos ahora estas estimaciones sobre las cantidades $\|f_0\|_{L^{p_0}}$, $\|f_1\|_{L^{p_1}}$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \|f_0\|_{L^{p_0}} &\leq CB^{1-\frac{p}{p_0}} \|f\|^{\frac{p}{p_0}}_{L^{p,\infty}} \qquad (17)\\ &\leq C\|f\|_{L^{p,\infty}} \left(\frac{B}{\|f\|_{L^{p,\infty}}}\right)^{1-\frac{p}{p_0}} \\ \|f_1\|_{L^{p_1}} &\leq CB^{1-\frac{p}{p_1}} \|f\|^{\frac{p}{p_1}}_{L^{p,\infty}} \qquad (18)\\ &\leq C\|f\|_{L^{p,\infty}} \left(\frac{B}{\|f\|_{L^{p,\infty}}}\right)^{1-\frac{p}{p_1}}, \end{aligned}$$

y basta entonces escribir $C_0 = C\|f\|_{L^{p,\infty}}$ y $A = \left(\frac{B}{\|f\|_{L^{p,\infty}}}\right)^{p(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1})}$, donde $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_0} + \frac{1-\theta}{p_1}$ y donde $B > 0$ es arbitrario, para obtener que para todo $A > 0$ existen dos funciones f_0, f_1 tales que $f(x) = f_0(x) + f_1(x)$ y que verifican

$$\|f_0\|_{L^{p_0}} \leq C_0 A^{\theta-1} \qquad \text{y} \qquad \|f_1\|_{L^{p_1}} \leq C_0 A^{\theta}.$$

Corolario 2 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido. Sea $0 < p < +\infty$ un parámetro real y sea $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ una función medible que pertenece al espacio de Lorentz $L^{p,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$, entonces existen dos funciones $f_0, f_1 : X \longrightarrow \mathbb{K}$ tales que $f = f_0 + f_1$, en donde $f_0 \in L^{p_0}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ y $f_1 \in L^{\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$, en donde $0 < p_0 < p < +\infty$.*

Prueba. De la misma manera que en el resultado anterior consideramos las funciones f_0 y f_1 definidas por $f_0 = f\mathbb{1}_{\{x\in X:|f(x)|>B\}}$ y $f_1 = f\mathbb{1}_{\{x\in X:|f(x)|\leq B\}}$, para un cierto $B > 0$. Por los mismos argumentos tenemos $f_0 \in L^{p_0}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ y solo debemos concentrarnos en la función f_1. Escribimos entonces

$$\sup_{x\in X} ess|f_1(x)| = \sup_{x\in\{|f(x)|\leq B\}} ess \; |f(x)| \leq B,$$

de donde se obtiene directamente que $f_1 \in L^{\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$. ■

4.6. Producto de convolución

Recordemos ahora que si $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ son dos funciones medibles, entonces su producto de convolución se define por medio de la expresión

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy,$$

y tenemos la desigualdades de Young en los espacios de Lebesgue que nos indican bajo qué condiciones sobre las funciones f y g el producto de convolución $f * g$ está bien definido:

Proposición 7 (Desigualdades de Young) *Sean $1 \leq p, q, r \leq +\infty$ tres reales relacionados por la fórmula $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$. Sean $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ dos funciones medibles, si $f \in L^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{K})$ y si $g \in L^q(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{K})$, entonces el producto de convolución $f*g$ pertenece al espacio de Lebesgue $L^r(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{K})$ y además se tiene la desigualdad*

$$\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}.$$

Teorema 6 (Convolución $L^p \times L^{q,\infty} \hookrightarrow L^{r,\infty}$) *Sean $1 \leq p < +\infty$ y $1 < q, r < +\infty$ tres reales relacionados por la fórmula*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}. \tag{19}$$

Sean $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ dos funciones medibles, si $f \in L^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{K})$ y si $g \in L^{q,\infty}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{K})$, entonces el producto de convolución $f * g$ pertenece al espacio $L^{r,\infty}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{K})$ y además se tiene la desigualdad

$$\|f * g\|_{L^{r,\infty}} \leq C(r,p,q)\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^{q,\infty}}. \tag{20}$$

Demostración. Como $g \in L^{q,\infty}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{K})$, tenemos por el Teorema 5 anterior y su Corolario 2, que esta función g puede descomponerse como la suma de dos funciones g_0 y g_1 de tal manera que se tienen las desigualdades (17) y (18), es decir:

$$\|g_0\|_{L^{q_0}} \leq CB^{1-\frac{q}{q_0}}\|g\|_{L^{q,\infty}}^{\frac{q}{q_0}} \quad \text{y} \quad \|g_1\|_{L^{q_1}} \leq CB^{1-\frac{q}{q_1}}\|g\|_{L^{q,\infty}}^{\frac{q}{q_1}}, \tag{21}$$

para todo $B > 0$ y $0 < q_0 < q < q_1 \leq +\infty$.

Tenemos entonces por la linealidad de la convolución $f * g = f * g_0 + f * g_1$ y por las propiedades de la función de distribución tenemos la mayoración

$$d_{f*g}(\alpha) \leq d_{f*g_0}(\alpha/2) + d_{f*g_1}(\alpha/2). \tag{22}$$

Una vez que disponemos de esta descomposición, vamos a dividir la demostración en función de los valores del parámetro p que caracteriza los espacios de Lebesgue en la desigualdad (20).

- Caso $p > 1$. Deseamos estudiar la cantidad $d_{f*g_1}(\alpha/2)$ para un cierto $\alpha > 0$. Para ello nos concentramos en la cantidad $|f * g_1|$ y tenemos
$$|f * g_1(x)| \leq \|f\|_{L^p} \|g_1\|_{L^{p'}},$$
donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, además, como se tiene la relación (19), tenemos $1 < q < p'$ y a partir de los controles (21) podemos escribir
$$|f * g_1(x)| \leq \|f\|_{L^p} \left(CB^{1-\frac{q}{p'}} \|g\|_{L^{q,\infty}}^{\frac{q}{p'}} \right).$$
Como el valor de la constante $B > 0$ es abritrario, lo fijamos por medio de la expresión
$$B = \left(\frac{\alpha}{2C} \|f\|_{L^p}^{-1} \|g\|_{L^{q,\infty}}^{-\frac{q}{p'}} \right)^{\frac{p'}{p'-q}}, \qquad (23)$$
de manera que obtenemos el control $|f * g_1(x)| \leq \alpha/2$, y este control nos indica que se tiene $d_{f*g_1}(\alpha/2) = 0$.

  Estudiamos ahora la cantidad $d_{f*g_0}(\alpha/2)$ y escribimos
$$\|f * g_0\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} \|g_0\|_{L^1},$$
dado que $1 < q$, utilizando las propiedades de g_0 dadas en (21) podemos escribir
$$\|f * g_0\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} \left(CB^{1-q} \|g\|_{L^{q,\infty}}^q \right),$$
y si reemplazamos el valor de B fijado en (23) obtenemos
$$\|f * g_0\|_{L^p} \leq C\alpha^{-p' \frac{q-1}{p'-q}} \|f\|_{L^p}^{q\left(\frac{p'-1}{p'-q}\right)} \|g\|_{L^{q,\infty}}^{q\left(\frac{p'-1}{p'-q}\right)},$$
de esta manera, por la desigualdad de Tchebychev obtenemos el control
$$d_{f*g_0}(\alpha/2) \quad \leq \quad \alpha^{-p} \|f * g_0\|_{L^p}^p \leq \alpha^{-p} \left(C\alpha^{-p' \frac{q-1}{p'-q}} \|f\|_{L^p}^{q\left(\frac{p'-1}{p'-q}\right)} \|g\|_{L^{q,\infty}}^{q\left(\frac{p'-1}{p'-q}\right)} \right)^p \leq C\alpha^{-r} \|f\|_{L^p}^r \|g\|_{L^{q,\infty}}^r.$$
Con estas informaciones volvemos a la desigualdad (22) y escribimos
$$d_{f*g}(\alpha) \leq d_{f*g_0}(\alpha/2) \leq C\alpha^{-r} \|f\|_{L^p}^r \|g\|_{L^{q,\infty}}^r,$$
de donde se deduce el siguiente control uniforme en α
$$\alpha^r d_{f*g}(\alpha) \leq C \|f\|_{L^p}^r \|g\|_{L^{q,\infty}}^r,$$
lo que permite obtener la mayoración $\|f * g\|_{L^{r,\infty}} \leq C(r, p, q) \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{q,\infty}}$.

- Caso $p = 1$. Seguimos esencialmente las mismas ideas anteriores y estudiamos la expresión $d_{f*g}(\alpha) \leq d_{f*g_0}(\alpha/2) + d_{f*g_1}(\alpha/2)$. Para el término d_{f*g_1} estudiamos la cantidad $|f * g_1|$ y utilizando las propiedades de la función g_1 dadas en (21), con $q_1 = +\infty$, tenemos
$$|f * g_1(x)| \leq \|f\|_{L^1} \|g_1\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1} CB.$$
Fijamos la cantidad B como $B = \alpha(2C\|f\|_{L^1})^{-1}$, de manera que se tiene $|f * g_1(x)| \leq \alpha/2$ y se deduce sin problema que $d_{f*g_1}(\alpha/2) = 0$. Estudiamos ahora el término $d_{f*g_0}(\alpha/2)$ y para ello escribimos con las propiedades dadas en (21)
$$\|f * g_0\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g_0\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \left(CB^{1-q} \|g\|_{L^{q,\infty}}^q \right),$$

y con el valor de B fijado anteriormente tenemos

$$\|f * g_0\|_{L^1} \leq \alpha^{1-q} C \|f\|_{L^1}^q \|g\|_{L^{q,\infty}}^q.$$

Con estos resultados, utilizando la desigualdad de Tchebychev podemos escribir

$$d_{f*g_0}(\alpha/2) \leq \frac{\alpha}{2} \|f * g_0\|_{L^1} \leq C\alpha^{-q} \|f\|_{L^1}^q \|g\|_{L^{q,\infty}}^q.$$

Con estas estimaciones sobre los términos d_{f*g_0} y d_{f*g_1}, podemos ahora escribir

$$d_{f*g}(\alpha) \quad \leq \quad d_{f*g_0}(\alpha/2) + d_{f*g_1}(\alpha/2) \leq d_{f*g_0}(\alpha/2) \leq C\alpha^{-q} \|f\|_{L^1}^q \|g\|_{L^{q,\infty}}^q,$$

de donde se obtiene el control uniforme $\alpha^q d_{f*g}(\alpha) \leq C\|f\|_{L^1}^q \|g\|_{L^{q,\infty}}^q$. Recordando que en el caso cuando $p = 1$ se tiene $r = q$ por la relación (19) y utilizando la propiedad (4) de la página 4 podemos finalmente escribir $\|g\|_{L^{r,\infty}} \leq C\|f\|_{L^1} \|g\|_{L^{q,\infty}}$ ■

En las condiciones sobre los índices p, q, r establecidas en el teorema anterior, hay casos límites que no han sido tratados y que vamos a estudiarlos a continuación.

- Caso cuando $r = q = \infty$. En esta situación, por la relación (19) tenemos $p = 1$, y dado que $L^{\infty,\infty} = L^\infty$, entonces la desigualdad (20) se escribe

  $$\|f * g\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^\infty},$$

  lo cual no es más que un caso particular de las desigualdades de Young usuales en los espacios de Lebesgue (ver la Proposición 7).

- Caso cuando $q = 1$. Por la relación (19) debemos tener $1 \leq p = r \leq +\infty$ y vamos a ver que *no se tiene la desigualdad*

  $$\|f * g\|_{L^{r,\infty}} \leq \|f\|_{L^r} \|g\|_{L^{1,\infty}}.$$

  En efecto, si consideramos sobre $\mathbb{R}$ (dotado de su estructura natural) las funciones $f(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$ y $g(x) = \frac{1}{x}$, tenemos por un lado que $\|f\|_{L^r} < +\infty$ para todo $1 \leq r \leq +\infty$ y que $\|g\|_{L^{1,\infty}} = 1$. Pero por otro lado, vemos que el producto de convolución $f * g$ no está bien definido, pues vale infinito en el intervalo $[0, 1]$.

- Caso cuando $r = +\infty$ y $1 < q < +\infty$. Por la condición (19) tenemos $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ pero *no se tiene la desigualdad*

  $$\|f * g\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{q,\infty}}.$$

  En efecto, sobre $\mathbb{R}$ consideremos las funciones $f(x) = \frac{1}{|x|^{\frac{1}{p}} \ln(x)} \mathbb{1}_{[0,1/2]}(x)$, y $g(x) = \frac{1}{|x|^{\frac{1}{q}}}$, tenemos entonces $\|f\|_{L^p} < +\infty$ y $\|g\|_{L^{q,\infty}} = 1$, pero el producto $f * g$ vale infinito en el intervalo $[0, 1/2]$ y no es por lo tanto una función acotada.