Lección n°2: Espacios de Lorentz $L^{p,q}$: dos definiciones y propiedades. EPN, septiembre 2018

Índice

1. Primera definición de los espacios de Lorentz $L^{p,q}$

Tenemos la identidades $\|f\|_{L^p} = p^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{+\infty}\left(\alpha\, d_f(\alpha)^{\frac{1}{p}}\right)^p \frac{d\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{1}{p}}$ y $\|f\|_{L^{p,\infty}} = \sup\limits_{\alpha>0}\left\{\alpha\, d_f(\alpha)^{\frac{1}{p}}\right\}$, y si notamos $F_p(\alpha, f) = \alpha\, d_f(\alpha)^{\frac{1}{p}}$ y $d\mu(\alpha) = \frac{d(\alpha)}{\alpha}$, entonces estas cantidades se escriben

$$\|f\|_{L^p} = p^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{+\infty} F_p(\alpha, f)^p d\mu(\alpha)\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{y} \quad \|f\|_{L^{p,\infty}} = \sup_{\alpha>0}\{F_p(\alpha, f)\}.$$

Dicho de otra manera, con las expresiones anteriores, estamos tomando las "normas" L^p y L^∞ de la cantidad $F_p(\alpha, f)$ con respecto a la medida $d\mu$. ¿Pero qué sucede si consideramos la norma L^q con $q \neq p$ o si $q \neq +\infty$? La respuesta a esta pregunta está dada en la definición a continuación.

Definición 1 (Espacios de Lorentz) *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido. Sean $0 < p \leq +\infty$ y $0 < q \leq +\infty$ dos índices reales. Definimos los espacios de Lorentz $L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ como el conjunto de funciones medibles $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ tales que las cantidades a continuación sean finitas:*

$$\|f\|_{L^{p,q}} = p^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^{+\infty}\left(\alpha\, d_f(\alpha)^{\frac{1}{p}}\right)^q \frac{d\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{1}$$

si $0 < p, q < +\infty$. En el caso $0 < p < +\infty$ y $q = +\infty$ consideramos la cantidad

$$\|f\|_{L^{p,\infty}} = \sup_{\alpha>0}\left\{\alpha d_f(\alpha)^{\frac{1}{p}}\right\}. \tag{2}$$

Cuando $p = q = +\infty$, definimos $L^{\infty,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K}) = L^\infty(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$.

Es necesario hacer algunas observaciones sobre estas expresiones y sobre los valores de los índices p, q. El primer punto que es importante notar está relacionado con la fórmula (2) que corresponde al caso cuando $q \to +\infty$

en la expresión (1) y de esta manera vemos que los espacios de Lorentz $L^{p,q}$ que acabamos de definir constituyen una *familia* de espacios funcionales que contiene naturalmente a los espacios $L^{p,\infty}$.

Segundo si fijamos $q = p$ en la expresión (1) tenemos la identidad $\|f\|_{L^{p,p}} = \|f\|_{L^p}$.

Indiquemos ahora que el caso $p = +\infty$ y $0 < q < +\infty$ no está considerado en la definición anterior, pero esto no es un problema como tendremos la oportunidad de verlo un poco más adelante. Notamos también que el caso $p = q = +\infty$ corresponde simplemente al espacio de Lebesgue L^∞.

1.1. Primeros ejemplos

(i) Sobre $(X, \mathscr{A}, \mu)$, consideremos $f(x) = \mathbb{1}_A(x)$ en donde $\mu(A) < +\infty$. Sabemos por las propiedades de la función de distribución que si $0 \leq \alpha < 1$, entonces $d_f(\alpha) = \mu(A)$, pero si $\alpha \geq 1$ entonces $d_f(\alpha) = 0$ y podemos escribir

$$\|f\|_{L^{p,q}} = p^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 \left(\alpha\, \mu(A)^{\frac{1}{p}} \right)^q \frac{d\alpha}{\alpha} \right)^{\frac{1}{q}} = p^{\frac{1}{q}} \mu(A)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \alpha^{q-1} d\alpha \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\frac{p}{q} \right)^{\frac{1}{q}} \mu(A)^{\frac{1}{p}}. \tag{3}$$

Entonces las funciones indicatrices de conjuntos de μ-medida finita pertenecen a los espacios de Lorentz $L^{p,q}$.

(ii) Sobre $\mathbb{R}^n$, consideramos la función siguiente

$$f(x) = \begin{cases} |x|^{\frac{-n}{a}} & \text{si } |x| \leq 1, \\ |x|^{\frac{-n}{b}} & \text{si } |x| > 1. \end{cases} \tag{4}$$

en donde $a, b > 0$ son parámetros que fijaremos después.Tenemos el siguiente comportamiento para la función de distribución d_f:

$$d_f(\alpha) = \begin{cases} \alpha^{-a} v_n & \text{si } \alpha \geq 1, \\ \alpha^{-b} v_n & \text{si } \alpha < 1, \end{cases}$$

en donde v_n designa el volumen de la bola unidad. De esta manera, tenemos para todo $0 < p, q < +\infty$:

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^{p,q}}^q &= p \int_0^1 \alpha^{q-1}\, d_f(\alpha)^{\frac{q}{p}} d\alpha + p \int_1^{+\infty} \alpha^{q-1}\, d_f(\alpha)^{\frac{q}{p}} d\alpha = p \int_0^1 \alpha^{q-1} \, (\alpha^{-a} v_n)^{\frac{q}{p}} d\alpha + p \int_1^{+\infty} \alpha^{q-1} \, (\alpha^{-b} v_n)^{\frac{q}{p}} d\alpha \\ &= p\, v_n^{\frac{q}{p}} \int_0^1 \alpha^{q(1-a/p)-1} d\alpha + p\, v_n^{\frac{q}{p}} \int_1^{+\infty} \alpha^{q(1-b/p)-1} d\alpha, \end{aligned}$$

y por lo tanto vemos que si $1 - a/p > 0$ y si $1 - b/p < 0$, entonces tenemos $f \in L^{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{R})$, más precisamente obtenemos $\|f\|_{L^{p,q}} = \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{q}} v_n^{\frac{1}{p}} \left(\frac{p}{p-a} + \frac{p}{b-p} \right)^{\frac{1}{q}}$. Este tipo de funciones permite, calibrando correctamente los parámetros a, b, construir funciones que pertenecen a un espacio de Lorentz L^{p_0,q_0}, pero que no pertenecen al espacio L^{p_1,q_1} en donde $p_0 \neq p_1$ y en donde $0 < q_0, q_1 < +\infty$ son cualquiera.

1.2. Propiedades estructurales generales

Proposición 1 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido, sean $0 < p < +\infty$ y $0 < q \leq +\infty$ dos parámetros reales.*

1) Los espacios de Lorentz $L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ son subespacios vectoriales del conjunto de funciones medibles.

2) Además se tiene la implicación $\|f\|_{L^{p,q}} = 0 \Longrightarrow f = 0$ en μ-casi todas partes.

Prueba. El caso $0 < p < +\infty$ y $q = +\infty$ ya ha sido tratado, nos concentramos en el caso cuando $0 < q < +\infty$.

1) Sea $\lambda \in \mathbb{K}^*$, por las propiedades de la función de distribución tenemos la identidad $d_{\lambda f}(\alpha) = d_f(\alpha/|\lambda|)$ y con un cambio de variable podemos escribir

$$\begin{aligned}\|\lambda f\|_{L^{p,q}} &= p^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^{+\infty}\left(\alpha\, d_{\lambda f}(\alpha)^{\frac{1}{p}}\right)^q\frac{d\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{1}{q}} = p^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^{+\infty}\left(\alpha\, d_{f}(\alpha/|\lambda|)^{\frac{1}{p}}\right)^q\frac{d\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{1}{q}}\\ &= |\lambda|\, p^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^{+\infty}\left(\alpha\, d_{f}(\alpha)^{\frac{1}{p}}\right)^q\frac{d\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{1}{q}} = |\lambda|\,\|f\|_{L^{p,q}}, \qquad (5)\end{aligned}$$

de donde se deduce que $\lambda f \in L^{p,q}(X,\mathscr{A},\mu,\mathbb{K})$.

Si $f,g \in L^{p,q}(X,\mathscr{A},\mu,\mathbb{K})$, verifiquemos que $f+g \in L^{p,q}(X,\mathscr{A},\mu,\mathbb{K})$. Para ello utilizamos los cálculos realizados en la Lección n°1: $\alpha\; d_{f+g}^{\frac{1}{p}}(\alpha) \leq \text{máx}(2^{\frac{1}{p}},2)\left((\alpha/2)\; d_f^{\frac{1}{p}}(\alpha/2) + (\alpha/2)\; d_g^{\frac{1}{p}}(\alpha/2)\right)$. A partir de esta mayoración reconstruimos la cantidad $\|\cdot\|_{L^{p,q}}$ y tenemos

$$\|f+g\|_{L^{p,q}} = p^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^{+\infty}\left(\alpha\, d_{f+g}(\alpha)^{\frac{1}{p}}\right)^q\frac{d\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{1}{q}} \leq \text{máx}(2^{\frac{1}{p}},2)\; p^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^{+\infty}\left((\alpha/2)\; d_f^{\frac{1}{p}}(\alpha/2)+(\alpha/2)\; d_g^{\frac{1}{p}}(\alpha/2)\right)^q\frac{d\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\begin{aligned}&\leq \text{máx}(2^{\frac{1}{p}},2)\,\text{máx}(2^{1-\frac{1}{q}},2^{\frac{1}{q}-1})\; p^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^{+\infty}\left((\alpha/2)\; d_f^{\frac{1}{p}}(\alpha/2)\right)^q\frac{d\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{1}{q}}\\ &+ \text{máx}(2^{\frac{1}{p}},2)\,\text{máx}(2^{1-\frac{1}{q}},2^{\frac{1}{q}-1})\; p^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^{+\infty}\left((\alpha/2)\; d_g^{\frac{1}{p}}(\alpha/2)\right)^q\frac{d\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{1}{q}},\end{aligned}$$

de donde se deduce la desigualdad

$$\|f+g\|_{L^{p,q}} \leq \text{máx}(2^{\frac{1}{p}},2)\,\text{máx}(2^{1-\frac{1}{q}},2^{\frac{1}{q}-1})\,(\|f\|_{L^{p,q}}+\|g\|_{L^{p,q}}), \qquad (6)$$

lo que muestra que $f+g \in L^{p,q}(X,\mathscr{A},\mu,\mathbb{K})$ y hemos verificado que el espacio $L^{p,q}(X,\mathscr{A},\mu,\mathbb{K})$ es un subespacio vectorial del conjunto de funciones medibles.

2) Por las propiedades de la integral que define la funcional $\|\cdot\|_{L^{p,q}}$, tenemos que $\|f\|_{L^{p,q}} = 0 \Longrightarrow \alpha\; d_f^{\frac{1}{p}}(\alpha) = 0$, para casi todo $\alpha > 0$, de donde se deduce sin mayor problema que la función f es nula en μ-casi todas partes.■

Con las fórmulas (5), (6) y con el punto 2) de la proposición anterior hemos verificado lo siguiente.

Corolario 1 *Sea $(X,\mathscr{A},\mu)$ un espacio medido, sean $0<p<+\infty$ y $0<q\leq+\infty$ dos parámetros reales. La funcional $\|\cdot\|_{L^{p,q}}$ determinada por la expresión (1) y definida sobre los espacios de Lorentz $L^{p,q}(X,\mathscr{A},\mu,\mathbb{K})$ es una cuasi-norma.*

1.3. Desigualdad de Interpolación

Teorema 1 (Interpolación) *Sea $(X,\mathscr{A},\mu)$ un espacio medido, sean $0<p_0<p_1\leq+\infty$ dos parámetros reales y sea f una función medible tal que $f\in L^{p_0,\infty}(X,\mathscr{A},\mu,\mathbb{K})\cap L^{p_1,\infty}(X,\mathscr{A},\mu,\mathbb{K})$, entonces $f\in L^{p,q}(X,\mathscr{A},\mu,\mathbb{K})$ para todo $p_0<p<p_1$ y todo $0<q<+\infty$ y además se tiene la desigualdad de interpolación siguiente*

$$\|f\|_{L^{p,q}} \leq C(p_0,p,p_1,q)\|f\|^{\theta}_{L^{p_0,\infty}}\|f\|^{1-\theta}_{L^{p_1,\infty}},$$

donde $\theta = \frac{p_0(p_1-p)}{p(p_1-p_0)}$ si $p_1<+\infty$ y donde $\theta=\frac{p_0}{p}$ si $p_1=+\infty$.

Demostración. Supongamos para empezar que se tiene $0<p_1<+\infty$. Puesto que $f\in L^{p_0,\infty}(X,\mathscr{A},\mu,\mathbb{K})\cap L^{p_1,\infty}(X,\mathscr{A},\mu,\mathbb{K})$, tenemos las mayoraciones $d_f(\alpha)\leq\frac{\|f\|^{p_0}_{L^{p_0,\infty}}}{\alpha^{p_0}}$ y $d_f(\alpha)\leq\frac{\|f\|^{p_1}_{L^{p_1,\infty}}}{\alpha^{p_1}}$, a partir de lo cual escribimos

$$d_f(\alpha)\leq \text{mín}\left(\frac{\|f\|^{p_0}_{L^{p_0,\infty}}}{\alpha^{p_0}},\frac{\|f\|^{p_1}_{L^{p_1,\infty}}}{\alpha^{p_1}}\right).$$

Utilizando la definición de los espacios de Lorentz $L^{p,q}$ dada con la expresión (1) tenemos:

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^{p,q}}^q &= p\int_0^{+\infty}\alpha^{q-1}d_f^{\frac{q}{p}}(\alpha)d\alpha \leq p\int_0^{+\infty}\alpha^{q-1}\text{mín}\left(\frac{\|f\|_{L^{p_0,\infty}}^{p_0}}{\alpha^{p_0}},\frac{\|f\|_{L^{p_1,\infty}}^{p_1}}{\alpha^{p_1}}\right)^{\frac{q}{p}}d\alpha\\ &\leq p\int_0^{T}\alpha^{q(1-\frac{p_0}{p})-1}\|f\|_{L^{p_0,\infty}}^{q\frac{p_0}{p}}d\alpha + p\int_T^{+\infty}\alpha^{q(1-\frac{p_1}{p})-1}\|f\|_{L^{p_1,\infty}}^{q\frac{p_1}{p}}d\alpha,\end{aligned}$$

en donde hemos fijado $T=\left(\frac{\|f\|_{L^{p_1,\infty}}^{p_1}}{\|f\|_{L^{p_0,\infty}}^{p_0}}\right)^{\frac{1}{p_1-p_0}}<+\infty$. Como $p_0<p<p_1$, evaluando el valor de estas integrales se tiene

$$\|f\|_{L^{p,q}}^q \leq C(p_0,p,q)\|f\|_{L^{p_0,\infty}}^{q\frac{p_0}{p}}T^{q(1-\frac{p_0}{p})}+C(p,p_1,q)\|f\|_{L^{p_1,\infty}}^{q\frac{p_1}{p}}T^{q(1-\frac{p_1}{p})}\leq C(p_0,p,p_1,q)\|f\|_{L^{p_0,\infty}}^{q\frac{p_0(p_1-p)}{p(p_1-p_0)}}\|f\|_{L^{p_1,\infty}}^{q(1-\frac{p_0(p_1-p)}{p(p_1-p_0)})},$$

y extrayendo la raíz q-ésima de esta desigualdad anterior y con la definición del parámetro θ obtenemos

$$\|f\|_{L^{p,q}}\leq C(p_0,p,p_1,q)\|f\|_{L^{p_0,\infty}}^{\theta}\|f\|_{L^{p_1,\infty}}^{1-\theta},$$

lo que proporciona la mayoración buscada cuando $0<p_1<+\infty$.

Pasemos ahora al caso cuando $p_1=+\infty$. Por definición tenemos $L^{\infty,\infty}=L^\infty$ y entonces se tiene $d_f(\alpha)=0$ si $\alpha>\|f\|_{L^\infty}$, lo que nos permite escribir

$$\|f\|_{L^{p,q}}^q = p\int_0^{+\infty}\alpha^{q-1}d_f^{\frac{q}{p}}(\alpha)d\alpha = p\int_0^{\|f\|_{L^\infty}}\alpha^{q-1}d_f^{\frac{q}{p}}(\alpha)d\alpha,$$

pero como $d_f(\alpha)\leq\alpha^{-p_0}\|f\|_{L^{p_0,\infty}}^{p_0}$, entonces

$$\|f\|_{L^{p,q}}^q\leq p\int_0^{\|f\|_{L^\infty}}\alpha^{q-1}\alpha^{-q\frac{p_0}{p}}\|f\|_{L^{p_0,\infty}}^{q\frac{p_0}{p}}d\alpha,$$

y evaluando esta integral obtenemos $\|f\|_{L^{p,q}}^q\leq C(p_0,p,q)\|f\|_{L^{p_0,\infty}}^{q\frac{p_0}{p}}\|f\|_{L^\infty}^{q(1-\frac{p_0}{p})}$, basta extraer la raíz q-ésima para obtener el resultado buscado. ■

1.4. Propiedades particulares cuando $X=\mathbb{R}^n$

Proposición 2 (Traslación y Dilatación en $L^{p,q}$) *Sean $0<p<+\infty$ y $0<q\leq+\infty$ dos parámetros reales. Consideremos los espacios de Lorentz $L^{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}or(\mathbb{R}^n),dx,\mathbb{K})$. Entonces, para todo $\tau\in\mathbb{R}^n$ y todo $\lambda>0$ tenemos las identidades siguientes*

$$\|f_\tau\|_{L^{p,q}}=\|f\|_{L^{p,q}}\quad y\quad \|\delta_\lambda[f]\|_{L^{p,q}}=\lambda^{-\frac{n}{p}}\|f\|_{L^{p,q}},$$

en donde $f_\tau(x)=f(x+\tau)$ con $\tau\in\mathbb{R}^n$ representa la traslación de la función f y $\delta_\lambda[f](x)=f(\lambda x_1,\cdots,\lambda x_n)$, con $\lambda>0$, es la dilatación de la función f.

Recordemos ahora la noción de *dimensión homogénea* de un espacio de funciones.

Definición 2 (Dimensión Homogénea) *Sea $E=\{f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{K}:\|f\|_E<+\infty\}$ un espacio funcional. Diremos que el espacio E es* homogéneo *si existe un índice real σ tal que se tenga para todo $f\in E$ la identidad*

$$\|\delta_\alpha[f]\|_E=\alpha^{-\sigma}\|f\|_E,\quad(\alpha>0).$$

El parámetro real σ será llamado la dimensión homogénea *del espacio E.*

Tenemos entonces que tanto los espacios de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^n)$ con $0<p\leq+\infty$ y los espacios de Lorentz generales $L^{p,q}(\mathbb{R}^n)$ con $0<p<+\infty$ y $0<q\leq+\infty$ son espacios de funciones homogéneos de dimensión homogéna $\sigma=\frac{n}{p}$.

2. Función de reordenamiento decreciente f^*

Definición 3 (Función de reordenamiento decreciente) *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido. Sean α y t dos parámetros positivos y sea f una función medible definida sobre X a valores en $\mathbb{K}$. La* función de reordenamiento decreciente *de f es la función f^* definida sobre $[0, +\infty[$ a valores reales que está determinada por la expresión*

$$f^*(t) = \inf_{\alpha>0}\{\alpha : d_f(\alpha) \leq t\}. \tag{7}$$

Usaremos la convención $\inf\{\emptyset\} = +\infty$.

Notemos que para obtener la función de reordenamiento decreciente f^* es necesario determinar primero la función de distribución d_f.

2.1. Ejemplos

(i) En primer lugar consideramos una función simple definida sobre $\mathbb{R}$ de la forma $f(x) = c_1\mathbb{1}_{A_1}(x) + c_2\mathbb{1}_{A_2}(x)$, en donde $c_2 > c_1 > 0$ y los conjuntos A_j con $j = 1, 2$ son intervalos disjuntos de medida finita. La función de distribución es entonces $d_f(\alpha) = (|A_1| + |A_2|)\mathbb{1}_{[0,c_1[}(\alpha) + |A_2|\mathbb{1}_{[c_1,c_2[}(\alpha)$. Si $0 \leq t < |A_2|$ se tiene $f^*(t) = c_2$ y si $|A_2| \leq t < |A_1| + |A_2|$ tenemos $f^*(t) = c_1$, de manera que podemos escribir

$$f^*(t) = c_2\mathbb{1}_{[0,|A_2|[}(t) + c_1\mathbb{1}_{[|A_2|,|A_1+|A_2|[}(t). \tag{8}$$

Para visualizar estas transformaciones, representamos las funciones f, d_f y f^* en el gráfico a continuación:

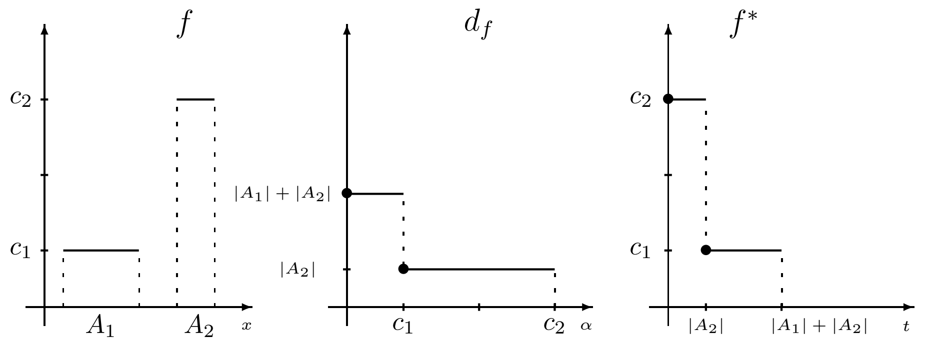


Figura 1: Función de reordenamiento decreciente de una función simple.

(ii) Consideremos sobre $\mathbb{R}^n$ la función $f(x) = \frac{1}{1+|x|^r}$, con $r > 0$. Calculemos la función de distribución d_f: $d_f(\alpha) = |\{x \in \mathbb{R}^n : \alpha(1 + |x|^r) < 1\}|$, y vemos que si $\alpha \geq 1$ entonces $d_f(\alpha) = 0$, por lo tanto podemos suponer que $0 < \alpha < 1$. Luego, escribimos

$$d_f(\alpha) \;=\; |\{x \in \mathbb{R}^n : |x| < (1/\alpha - 1)^{\frac{1}{r}}\}| = |B(0, 1/\alpha - 1)^{\frac{1}{r}})| = (1/\alpha - 1)^{\frac{n}{r}}|B(0, 1)| = (1/\alpha - 1)^{\frac{n}{r}}v_n.$$

Con estos cálculos preliminares y junto con la expresión (7) que define la función de reordenamiento decreciente, obtenemos para todo $t > 0$ la fórmula $f^*(t) = \frac{1}{1+(t/v_n)^{\frac{r}{n}}}$. En la figura a continuación representamos las funciones f, d_f y f^*.

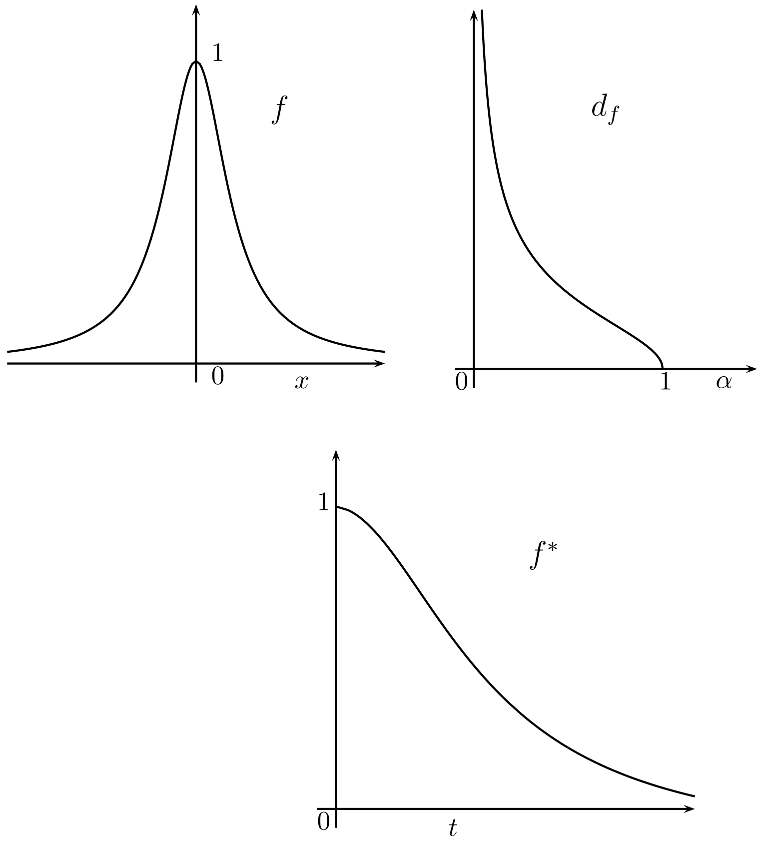
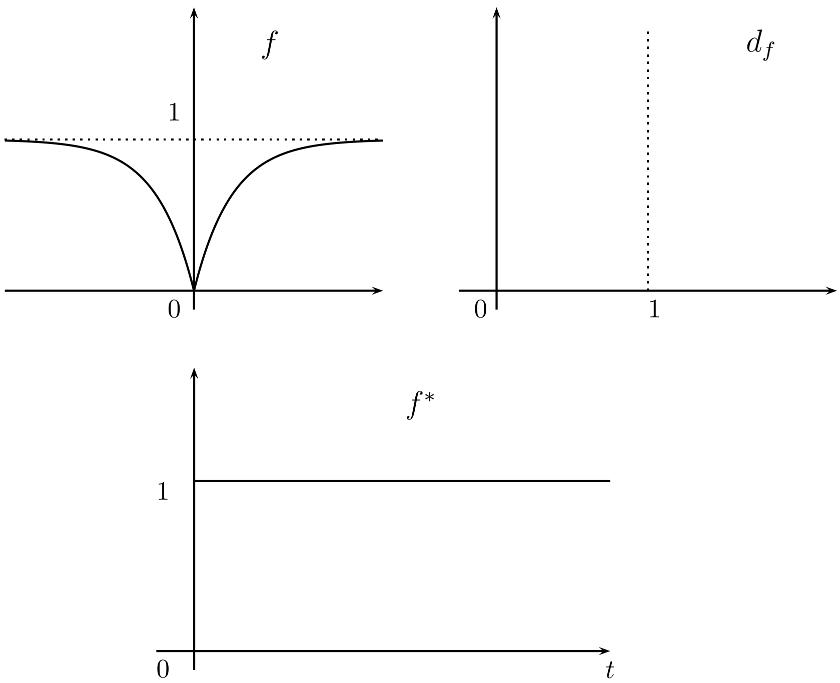


Figura 2: Función de reordenamiento decreciente de la función $\frac{1}{1+|x|^r}$.

(iiii) Otro ejemplo está dado por la función $f(x = 1 - e^{-|x|}$.

La función de distribución es $d_f(\alpha) = |\{x \in \mathbb{R}^n : 1 - e^{-|x|} < \alpha\}|$ y vemos que si $\alpha \geq 1$ entonces se tiene $d_f(\alpha) = 0$, pero si $0 < \alpha < 1$ tenemos siempre $d_f(\alpha) = +\infty$. A partir de esta función de distribución podemos explicitar sin mayor problema la función de reordenamiento decreciente y escribimos $f^*(t) = 1$, si $t > 0$.



2.2. Propiedades y relaciones entre f^* y d_f

El primer resultado que damos es el siguiente que nos indica que la función de reordenamiento decreciente f^* es en realidad un tipo muy especial de función de distribución.

Proposición 3 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido y sea f una función medible definida sobre X a valores en $\mathbb{K}$. Entonces tenemos $d_f(f^*(t)) \leq t$. Se tiene además la identidad $f^*(t) = d_{d_f}(t), t \geq 0$.*

Prueba. Recordemos que por la definición de función de distribución d_f tenemos $d_f(\alpha) = \mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\})$, mientras que para la función de reordenamiento decreciente f^*, que está definida por la expresión (7), tenemos $f^*(t) = \inf\limits_{\alpha > 0}\{\alpha : d_f(\alpha) \leq t\}$. De esta manera podemos escribir $d_f(f^*(t)) = d_f(\inf\{\alpha : d_f(\alpha) \leq t\}) \leq t$ pues la función de distribución es continua por la derecha.

Pasemos al segundo punto. Tenemos, usando la continuidad por la derecha de la función de distribución, la identidad $\sup\limits_{\alpha > 0}\{\alpha : d_f(\alpha) > t\} = |\{\alpha : d_f(\alpha) > t\}|$. Luego, una vez más por la continuidad por la derecha de la función de distribución tenemos $f^*(t) = \inf\{\alpha : d_f(\alpha) \leq t\} = \sup\{\alpha : d_f(\alpha) > t\} = |\{\alpha : d_f(\alpha) > t\}| = d_{d_f}(t)$. ■

Proposición 4 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido. Sean f y g dos funciones medibles definidas sobre X a valores en $\mathbb{K}$, tenemos entonces los puntos siguientes*

1) *se tiene $f^* = (|f|)^*$ y la función f^* es decreciente continua por la derecha sobre $[0, +\infty[$. Además si f y $\tilde{f}$ son dos funciones equidistribuidas, entonces se tiene $f^* = \tilde{f}^*$,*

2) *para todo $\lambda \in \mathbb{K}^*$ se tiene $(\lambda f)^*(t) = |\lambda| f^*(t)$,*

3) *si $0 < p < +\infty$, entonces $(|f|^p)^*(t) = (f^*)^p(t)$,*

4) *si $|g(x)| \leq |f(x)|$ en μ-casi todas partes, se tiene $g^*(t) \leq f^*(t)$, para $t \geq 0$. En particular, si $f = f^+ - f^-$, se tiene $(f^{\pm})^*(t) \leq f^*(t)$.*

5) *si $t_1, t_2 \geq 0$ entonces $(f + g)^*(t_1 + t_2) \leq f^*(t_1) + g^*(t_2)$,*

6) *si $t_1, t_2 \geq 0$ se tiene $(fg)^*(t_1 + t_2) \leq f^*(t_1) g^*(t_2)$,*

7) *si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones medibles tales que se tiene $|f(x)| \leq \liminf\limits_{n \to +\infty} |f_n|$ en μ-casi todas partes, entonces $f^* \leq \liminf\limits_{n \to +\infty} f_n^*$.*

Prueba.

1) La idendidad $f^* = (|f|)^*$ se deduce por las propiedades de la función de distribución:

$$(|f|)^*(t) = \inf_{\alpha > 0}\{\alpha : d_{|f|}(\alpha) \leq t\} = \inf_{\alpha > 0}\{\alpha : d_f(\alpha) \leq t\} = f^*(t).$$

Sean ahora $t_2 > t_1 > 0$, tenemos por el decrecimiento de la función de distribución

$$f^*(t_2) = \inf_{\alpha > 0}\{\alpha : d_f(\alpha) \leq t_2\} \leq \inf_{\alpha > 0}\{\alpha : d_f(\alpha) \leq t_1\} = f^*(t_1),$$

de donde se obtiene sin problema el decrecimiento de la función f^*. La continuidad a la derecha de f^* se deduce de la continuidad a la derecha de d_f. Finalmente, si f y $\tilde{f}$ son equidistribuidas, por definición su función de distribución d_f es la misma, de donde se obtiene inmediatamente que $f^* = \tilde{f}^*$.

2) Para el segundo punto basta escribir

$$(\lambda f)^*(t) = \inf_{\alpha > 0}\{\alpha : d_{\lambda f}(\alpha) \leq t\} = \inf\{\alpha : d_f(\alpha/|\lambda|) \leq t\} = \inf\{|\lambda|\nu : d_f(\nu) \leq t\} = |\lambda| f^*(t).$$

3) Si $0 < p < +\infty$ entonces

$$(|f|^p)^*(t) \quad = \quad \inf\{\alpha : \mu(\{x \in X : |f|^p > \alpha\}) \leq t\} = \inf\{\nu^p : \mu(\{x \in X : |f| > \nu\}) \leq t\} = (f^*)^p(t).$$

4) Este punto es sencillo pues solo hay que utilizar las propiedades de la función de distribución que permite obtener la función de reordenamiento decreciente. En particular tenemos $f^{\pm}(x) \leq |f(x)|$, de donde se deduce $(f^{\pm})^*(t) \leq (|f|)^*(t) = f^*(t)$.

5) Esta desigualdad se basa en las observaciones siguientes: supongamos primero que $f^*(t_1) + g^*(t_2) < +\infty$ (sino no hay nada que demostrar) y entonces escribimos

$$d_{f+g}(f^*(t_1) + g^*(t_2)) \leq d_f(f^*(t_1)) + d_g(g^*(t_2)) \leq t_1 + t_2,$$

en donde la primera estimación está dada por las propiedades de las funciones de distribución mientras que la segunda desigualdad se deduce de la Proposición 3. Entonces, por definición de la función de reordenamiento decreciente tenemos

$$(f + g)^*(t_1 + t_2) = \text{ínf}\{\alpha : d_{f+g}(\alpha) \leq t_1 + t_2\} \leq f^*(t_1) + g^*(t_2).$$

6) Este punto se demuestra de forma similar. Observamos en efecto que

$$d_{fg}(f^*(t_1)g^*(t_2)) \leq d_f(f^*(t_1)) + d_g(g^*(t_2)) \leq t_1 + t_2$$

por las propiedades de la función de distribución y por la Proposición 3. Luego, por definición de la función de reordenamiento decreciente se tiene

$$(fg)^*(t_1 + t_2) = \text{ínf}\{\alpha : d_{fg}(\alpha) \leq t_1 + t_2\} \leq f^*(t_1)g^*(t_2).$$

7) El último punto se deduce utilizando la propiedad correspondiente de la función de distribución d_f. ■

Proposición 5 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido. Sea f una función medible definida sobre X a valores en $\mathbb{K}$. Entonces*

1) se tiene $f^*(d_f(\alpha)) \leq \alpha$ siempre y cuando $d_f(\alpha) < +\infty$;

2) si $f^*(t) < +\infty$ entonces

$$d_f(f^*(t)) = \mu(\{x \in X : |f(x)| > f^*(t)\}) \leq t \leq \mu(\{x \in X : |f(x)| \geq f^*(t)\}),$$

3) para $0 < p < +\infty$ se tiene

$$\sup_{t>0} \left\{t^p f^*(t)\right\} = \sup_{\alpha>0} \left\{\alpha d_f^p(\alpha)\right\},$$

4) las funciones f y f^* son equidistribuidas, *es decir $d_f(\alpha) = d_{f^*}(\alpha)$, o de forma equivalente*

$$\mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}) = |\{t \in [0, +\infty[: f^*(t) > \alpha\}|$$

5) si $A \subset X$ es un conjunto μ-medible y si la función f es positiva, entonces

$$(f\mathbb{1}_A)^*(t) \leq f^*(t)\mathbb{1}_{[0,\mu(A)[}(t),$$

para $t \geq 0$. En particular, si $\mu(A) < +\infty$, se tiene $(\mathbb{1}_A)^*(t) = \mathbb{1}_{[0,\mu(A)[}(t)$.

Prueba.

1) Hemos visto en la Proposición 3 que se tiene $d_f(f^*(t)) \leq t$, en este punto estudiamos en cambio la función $f^*(d_f(\alpha))$ y tenemos directamente $f^*(d_f(\alpha)) = \underset{\nu>0}{\text{ínf}}\{d_f(\nu) \leq d_f(\alpha)\} \leq \alpha$.

2) La primera desigualdad no es más que la primera parte de la Proposición 3, de manera que nos concentramos en la segunda desigualdad. Definimos el conjunto $A_n = \{x \in X : |f(x)| > f^*(t) - 1/n\}$ y observamos que para todo $n \geq 1$ se tiene por construcción $\mu(A_n) \geq t$ pues basta reemplazar f^* por su definición. Los conjuntos A_n forman una sucesión decreciente si n aumenta y su intersección tendrá una medida mayor o igual a t, la continuidad de las medidas permite concluir.

3) Para el tercer punto, solo debemos demostrar el caso cuando $p = 1$ puesto que el caso general se deduce de este caso particular. En efecto, si tenemos

$$\sup_{t>0} \left\{ tf^*(t) \right\} = \sup_{\alpha>0} \left\{ \alpha d_f(\alpha) \right\}, \tag{9}$$

entonces, utilizando el punto 3) de la Proposición 4, podemos escribir

$$\sup_{t>0} \left\{ t^p f^*(t) \right\} = \sup_{t>0} \left\{ \left(t f^{*\frac{1}{p}}(t) \right)^p \right\} = \sup_{t>0} \left\{ \left(t (|f|^{\frac{1}{p}})^*(t) \right)^p \right\},$$

de manera que si se tiene la relación (9), podemos escribir utilizando la definición de la función de distribución d_f:

$$\sup_{t>0} \left\{ \left(t(|f|^{\frac{1}{p}})^*(t) \right)^p \right\} \quad = \quad \sup_{\alpha>0} \left\{ \left(\alpha d_{|f|^{\frac{1}{p}}}(\alpha) \right)^p \right\} = \sup_{\nu>0} \left\{ \left(\nu^{\frac{1}{p}} d_f(\nu) \right)^p \right\} = \sup_{\nu>0} \left\{ \nu d_f^p(\nu) \right\}.$$

Pasemos ahora a la demostración del caso $p = 1$. Suponemos sin pérdida de generalidad que $d_f(\alpha) < +\infty$ y $f^*(t) < +\infty$. Tenemos entonces para todo $\beta > 0$ la desigualdad $\sup\limits_{\alpha>0} \{\alpha\, d_f(\alpha)\} \geq \beta\, d_f(\beta)$ y usando el primer punto anterior para controlar β, obtenemos la desigualdad uniforme $\sup\limits_{\alpha>0} \{\alpha\, d_f(\alpha)\} \geq f^*(d_f(\beta))\, d_f(\beta)$, que nos permite escribir $\sup\limits_{\alpha>0} \{\alpha\ d_f(\alpha)\} \geq \sup\limits_{t>0} \{ tf^*(t)\}$. Para obtener la estimación recíproca procedemos de forma totalmente similar y consideramos la desigualdad $\sup\limits_{t>0} \{tf^*(t)\} \geq \beta f^*(\beta)$, de manera que por la Proposición 3 controlamos el parámetro β y escribimos $\sup\limits_{t>0} \{tf^*(t)\} \geq d_f(f^*(\beta))\ f^*(\beta)$, lo que a su vez nos proporciona la desigualdad

$$\sup_{t>0} \{tf^*(t)\} \geq \sup_{\alpha>0} \{\alpha d_f(\alpha)\}.$$

4) Verifiquemos ahora que las funciones f y f^* son equidistribuidas. Empezamos fijando $\alpha > 0$ y vemos que se tiene

$$d_{f^*}(\alpha) = |\{t \in [0, +\infty[: f^*(t) > \alpha\}| = \sup_{c>0} \{f^*(c) > \alpha\},$$

puesto que f^* es decreciente. Por la continuidad por la derecha de esta función podemos escribir

$$\sup_{c>0} \{f^*(c) > \alpha\} \leq \inf_{\beta>0} \{f^*(\beta) \leq \alpha\},$$

pero dado que por el punto 1) demostrado anteriormente tenemos la estimación $f^*(d_f(\alpha)) \leq \alpha$, se deduce entonces $d_{f^*}(\alpha) \leq d_f(\alpha)$.

La desigualdad recíproca se obtiene fijando $t > d_{f^*}(\alpha) = \sup\limits_{c>0} \{f^*(c) > \alpha\}$. Se tiene entonces por el decrecimiento de la función de reordenamiento decreciente $f^*(t) \leq \alpha$ y $d_f(\alpha) \leq d_f(f^*(t)) \leq t$, en donde la primera desigualdad anterior es válida por el decrecimiento de la función d_f y la segunda se tiene por el punto 2). Si escribimos ahora $t = d_{f^*}(\alpha) + \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$, obtenemos $d_f(\alpha) \leq d_f(f^*(t)) \leq d_{f^*}(\alpha) + \varepsilon$ y utilizando la continuidad por la derecha de la función de reordenamiento decreciente tenemos la estimación $d_f(\alpha) \leq d_{f^*}(\alpha)$. Concluimos entonces que $d_{f^*}(\alpha) = d_f(\alpha)$, para todo $\alpha > 0$.

5) Dado que $f\mathbb{1}_A \leq f$ obtenemos $(f\mathbb{1}_A)^* \leq (f)^*$ y puesto que se tiene para todo $\alpha > 0$ la mayoración $\mu(\{x \in X : |f\mathbb{1}_A(x)| > \alpha\}) \leq \mu(A)$, de esta manera, como la función f^* es decreciente obtenemos $(f\mathbb{1}_A)^*(t) = 0$ si $t > \mu(A)$, y por lo tanto se tiene $(f\mathbb{1}_A)^*(t) \leq f^*(t)\mathbb{1}_{[0,\mu(A)[}(t)$.

   La identidad $(\mathbb{1}_A)^*(t) = \mathbb{1}_{[0,\mu(A)[}(t)$ si $\mu(A) < +\infty$, se obtiene directamente por definición de la función de reordenamiento decreciente. ■

El punto 4) de la Proposición 5 tiene la consecuencia siguiente.

Corolario 2 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido y sea f una función medible definida sobre X a valores en $\mathbb{K}$. Si $f \in L^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ con $0 < p < +\infty$ entonces*

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_0^{+\infty} f^{*p}(t)dt\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{10}$$

En el caso cuando $p = +\infty$ tenemos

$$\|f\|_{L^\infty} = f^*(0). \tag{11}$$

Prueba. Empezamos con la primera identidad. Utilizando el hecho que las funciones f y f^* son equidistribuidas podemos escribir

$$\int_0^{+\infty} f^{*p}(t)dt = p\int_0^{+\infty} \alpha^{p-1} d_{f^*}(\alpha)d\alpha = p\int_0^{+\infty} \alpha^{p-1} d_f(\alpha)d\alpha = \|f\|_{L^p}^p,$$

de donde se obtiene la identidad deseada al extraer la raíz p-ésima en estas igualdades. La segunda aserción es consecuencia de la definición de la función de reordenamiento decreciente y de la definición de la funcional $\|\cdot\|_{L^\infty}$: basta escribir

$$f^*(0) = \inf_{\alpha>0} \{\alpha : \mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}) = 0\} = \|f\|_{L^\infty},$$

para obtener el resultado buscado. ■

Estudiamos ahora la unicidad del reordenamiento decreciente.

Teorema 2 (Unicidad del reordenamiento) *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido y sea f una función medible definida sobre X a valores en $\mathbb{K}$. Existe una sola función continua por la derecha, decreciente que es equidistribuida con f. Dicho de otra manera, el reordenamiento decreciente de una función es único.*

Demostración. Sea f una función medible definida sobre X. Vamos a suponer que existen dos funciones distintas f_1^* y f_2^* que son decrecientes, continuas por la derecha y que son equimedibles con f. Existe por lo tanto un t_0 tal que $f_1^*(t_0) \neq f_2^*(t_0)$, y sin pérdida de generalidad, podemos considerar que $f_1^*(t_0) > f_2^*(t_0)$. Fijemos ahora un real $\varepsilon > 0$ tal que $f_1^*(t_0) > f_2^*(t_0) + \varepsilon$. Por la continuidad a la derecha de las funciones de reordenamiento decreciente, existe un intervalo no vacío $[t_0, t_1]$ tal que, para todo $t \in [t_0, t_1]$ se tenga $f_1^*(t) > f_2^*(t_0) + \varepsilon$. Utilizando el hecho de que estas funciones son decrecientes obtenemos que, por un lado $|\{t \geq 0 : f_1^*(t) > f_2^*(t_0) + \varepsilon\}| \geq t_1$ pero por otro lado se tiene $|\{t \geq 0 : f_2^*(t) > f_2^*(t_0) + \varepsilon\}| \leq t_0 < t_1$ y esto contradice la equimedibilidad con respecto a f. Concluímos por lo tanto que $f_1^*(t) = f_2^*(t)$ y que el reordenamiento decreciente es único. ■

Antes de terminar el estudio de las propiedades de la función de reordenamiento decreciente, enunciamos un par de resultados adicionales.

Proposición 6 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido y sea f una función medible definida sobre X a valores en $\mathbb{K}$. Si la función de distribución d_f es continua y estrictamente decreciente, entonces f^* es la función inversa de d_f.*

Prueba. En efecto, si $d_f(\alpha) < +\infty$, por definición se tiene

$$f^*(d_f(\alpha)) = \inf_{\beta>0}\{\beta : d_f(\beta) \leq d_f(\alpha)\},$$

pero dado que por hipótesis d_f es estrictamente decreciente y continua, de donde se deduce que $f^*(d_f(\alpha)) = \alpha$. ■

Proposición 7 *Si $f : [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ es una función continua estrictamente decreciente, entonces se tiene la identidad $f(t) = f^*(t)$.*

Prueba. Por definición tenemos

$$f^*(t) = \inf_{\alpha>0}\big\{\alpha : |\{x \in [0, +\infty[: |f(x)| > \alpha\}| \leq t\big\},$$

pero como la función f es estrictamente decreciente y continua, se obtiene que la expresión a la derecha corresponde con el valor de $f(t)$. ■

No se tiene en toda generalidad (puntualmente), para dos funciones medibles f y g, la desigualdad triangular

$$(f+g)^*(t) \leq f^*(t) + g^*(t).$$

Veamos un contraejemplo: sean $f(x) = 1-x$ y $g(x) = x$ dos funciones definidas sobre el intervalo $[0,1]$. Un cálculo evidente muestra que $(f+g)^*(t) = \mathbb{1}_{[0,1]}(t)$ y que $f^*(t) = g^*(t) = (1-t)\mathbb{1}_{[0,1]}(t)$, de modo que no se cumple la estimación $(f+g)^*(t) \leq f^*(t) + g^*(t)$.

¿Qué significa esto? Si bien la función de reordenamiento decreciente es una función de distribución, esta transformación de las funciones posee *muchas* otras propiedades adicionales y en la sección que sigue vamos a exponer algunas características que nos permitirán verificar que los espacios de Lorentz $L^{p,q}$ son espacios normados para ciertos valores particulares de p y q.

2.3. El Teorema de Hardy-Littlewood y espacios resonantes

Teorema 3 (Hardy-Littlewood) *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido y sean f y g dos funciones integrables definidas sobre X a valores en $\mathbb{K}$ tal que su producto sea de módulo integrable. Se tiene entonces la desigualdad*

$$\int_X |f(x)g(x)|d\mu(x) \leq \int_0^{+\infty} f^*(t)g^*(t)dt. \tag{12}$$

Demostración. Dado que las cantidades al interior de las integrales son todas positivas, podemos suponer sin pérdida de generalidad[1] que las funciones f, g son a valores en $[0, +\infty[$. Escribimos entonces

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{\{f(x)>\alpha\}} d\alpha \qquad \text{y} \qquad g(x) = \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{\{g(x)>\sigma\}} d\sigma,$$

de manera que se tiene

$$\int_X f(x)g(x)d\mu(x) = \int_X \left(\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{\{f(x)>\alpha\}} d\alpha\right)\left(\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{\{g(x)>\sigma\}} d\sigma\right) d\mu(x),$$

y aplicando el Teorema de Fubini podemos escribir

$$\begin{aligned}
\int_X f(x)g(x)d\mu(x) &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \left(\int_X \mathbb{1}_{\{f(x)>\alpha\}}\mathbb{1}_{\{g(x)>\sigma\}} d\mu(x)\right) d\alpha d\sigma \\
&= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \left(\int_X \mathbb{1}_{\{f(x)>\alpha\}\cap\{g(x)>\sigma\}} d\mu(x)\right) d\alpha d\sigma \\
&\leq \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \text{mín}\big(\mu(\{f(x)>\alpha\}),\, \mu(\{g(x)>\sigma\})\big) d\alpha d\sigma \\
&\leq \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \text{mín}\big(d_f(\alpha),\, d_g(\sigma)\big) d\alpha d\sigma,
\end{aligned}$$

pero como las funciones f y g son equidistribuidas con sus funciones de reordenamiento decreciente f^* y g^*, tenemos

$$\int_X f(x)g(x)d\mu(x) \leq \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \text{mín}\big(d_{f^*}(\alpha),\, d_{g^*}(\sigma)\big) d\alpha d\sigma.$$

En este punto observamos que, por el decrecimiento de las funciones f^* y g^*, la cantidad $\text{mín}\big(d_{f^*}(\alpha),\, d_{g^*}(\sigma)\big)$ verifica $\text{mín}\big(d_{f^*}(\alpha),\, d_{g^*}(\sigma)\big) = \text{mín}\big(|\{f^* > \alpha\}|,\, |\{g^* > \sigma\}|\big) = |\{f^* > \alpha\} \cap \{g^* > \sigma\}|$, de manera que se tiene

$$\begin{aligned}
\int_X f(x)g(x)d\mu(x) &\leq \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} |\{f^* > \alpha\} \cap \{g^* > \sigma\}| d\alpha d\sigma \\
&\leq \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{\{f^*(t)>\alpha\}}\mathbb{1}_{\{g^*(t)>\sigma\}} dt\right) d\alpha d\sigma,
\end{aligned}$$

[1] Por el punto 1) de la Proposición 4, página 7.

aplicando una vez más el Teorema de Fubini escribimos

$$\int_X f(x)g(x)d\mu(x) \quad \leq \quad \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{\{f^*(t)>\alpha\}} d\alpha\right) \left(\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{\{g^*(t)>\sigma\}} d\sigma\right) dt \leq \int_0^{+\infty} f^*(t)g^*(t)dt,$$

lo que termina la demostración de la desigualdad de Hardy-Littlewood. ■

Corolario 3 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido y sean f, g dos funciones integrables definidas sobre X a valores en $\mathbb{K}$. Para toda función $\tilde{g} : X \longrightarrow \mathbb{K}$ que es equidistribuida con g se tiene*

$$\int_X |f(x)\tilde{g}(x)|d\mu(x) \leq \int_0^{+\infty} f^*(t)g^*(t)dt.$$

¿Bajo qué condiciones se tiene la igualdad en la desigualdad anterior? Es decir, es posible que la función g no permita obtener de manera directa la igualdad en la desigualdad anterior, pero quizás una transformación adecuada (en el sentido de que se mantiene la misma función de distribución) de esta función sí lo permita.

Veamos un ejemplo de esta situación: en el caso de sucesiones *finitas* $(a_j)_{1\leq j\leq n}$ y $(b_j)_{1\leq j\leq n}$ de reales estrictamente positivos la respuesta es positiva y muy sencilla de conceptualizar, es decir que no es muy difícil verificar que se tiene la identidad

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \tilde{b}_j = \sum_{j=1}^{n} a_j^* b_j^*,$$

en donde la sucesión $(\tilde{b}_j)_{1\leq j\leq n}$ no es más que una permutación adecuada de la sucesión original $(b_j)_{1\leq j\leq n}$.

El caso general (medidas generales) es un poco más delicado de estudiar y es por eso que presentamos las dos definiciones a continuación.

Definición 4 (Espacio resonante) *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido, diremos que este espacio medido es* resonante *si para todo par de funciones integrables $f, g : X \longrightarrow \mathbb{K}$ se tiene la identidad*

$$\int_0^{+\infty} f^*(t)g^*(t)dt = \sup_{\tilde{g}:d_{\tilde{g}}=d_g} \int_X |f(x)\tilde{g}(x)|d\mu(x), \tag{13}$$

en donde el supremo corre sobre todas las funciones medibles $\tilde{g}$ que son equidistribuidas con g.

Observación 1 Sabemos que las funciones $\tilde{g}$ y $|\tilde{g}|$ son equidistribuidas. De esta manera, es posible *ajustar* la función $\tilde{g}$, tomando por ejemplo en el caso real $\tilde{\tilde{g}} = -\tilde{g}$ en los conjuntos en los cuales f es negativa, de tal manera que se tenga la identidad

$$\sup_{\tilde{g}:d_{\tilde{g}}=d_g} \int_X |f(x)\tilde{g}(x)|d\mu(x) = \sup_{\tilde{\tilde{g}}:d_{\tilde{\tilde{g}}}=d_g} \left|\int_X f(x)\tilde{\tilde{g}}(x)d\mu(x)\right|.$$

En lo que sigue utilizaremos principalmente la primera expresión anterior, pero la segunda será de utilidad posteriormente.

En el caso en que el supremo es alcanzado se tiene al concepto siguiente.

Definición 5 (Espacio fuertemente resonante) *Un espacio medido $(X, \mathscr{A}, \mu)$ es* fuertemente resonante *si para todo par $f, g : X \longrightarrow \mathbb{K}$ de funciones integrables existe una función $\tilde{g}$ que es equidistribuida con g tal que*

$$\int_0^{+\infty} f^*(t)g^*(t)dt = \int_X |f(x)\tilde{g}(x)|d\mu(x). \tag{14}$$

Evidentemente, se puede ver sin ningún problema que todo espacio medido fuertemente resonante es resonante pero no se tiene la recíproca.

Definición 6 (Espacio completamente atómico) *Diremos que un espacio medido σ-finito $(X, \mathscr{A}, \mu)$ es* completamente atómico *si todos los elementos de la σ-álgebra $\mathscr{A}$ son átomos*[2]*.*

El ejemplo de base de espacio medido completamente atómico está dado por el conjunto de números naturales $\mathbb{N}$ dotado de la medida de conteo.

Proposición 8 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido σ-finito de masa total finita que verifica uno de los dos puntos siguientes*

1) el espacio medido es no atómico,

2) el espacio medido es completamente atómico y cada átomo es de igual medida.

Entonces el espacio medido $(X, \mathscr{A}, \mu)$ es fuertemente resonante.

Proposición 9 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido σ-finito que verifica uno de los dos puntos a continuación:*

1) el espacio medido es no atómico,

2) el espacio medido es completamente atómico y cada átomo es de igual medida,

entonces el espacio medido $(X, \mathscr{A}, \mu)$ es resonante.

Como vemos con estos dos resultados, los ejemplos más usuales de espacios medidos como son los conjuntos $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{N}$ o $\mathbb{Z}$ dotados de sus estructuras naturales son espacios resonantes y disponemos entonces de la importante identidad (13) que será utilizada en la Sección 3.

Demos ahora dos ejemplos que ilustran las proposiciones anteriores y la diferencia existente entre espacios resonantes y espacios fuertemente resonantes.

(i) Empecemos pues considerando la función $f(x) = 1 - e^{-x}$ definida sobre el intervalo $[0, +\infty[$ dotado de la medida de Lebesgue. De la misma manera que con la función dada en la expresión (**??**) de la página **??**, vemos sin mayor problema que la función de reordenamiento decreciente f^* es constante e igual a 1. Si fijamos ahora la función g como la función indicatriz del intervalo $[0, 1[$ tenemos $g = g^* = \mathbb{1}_{[0,1[}$ y vemos que si $\tilde{g}$ es equidistribuida con g, entonces $|\tilde{g}|$ es la función indicatriz de algún conjunto $A \subset [0, +\infty[$ de medida igual a 1. De esta manera tenemos la desigualdad estricta

$$\int_0^{+\infty} |f(x)\tilde{g}(x)|dx = \int_A 1 - e^{-x}dx < 1 = \int_0^{+\infty} f^*(t)g^*(t)dt.$$

Sabemos por los teoremas demostrados en las líneas anteriores que el espacio medido $([0, +\infty[, \mathcal{B}or([0, +\infty[), dx)$ es resonante y los cálculos anteriores muestran que este espacio no es fuertemente resonante. De esta manera concreta vemos que un espacio resonante no es necesariamente un espacio fuertemente resonante.

(ii) Veamos un segundo ejemplo. Sobre el espacio medible $(\mathbb{R}, \mathcal{B}or(\mathbb{R}))$ consideramos la medida μ definida sobre dos átomos 0 y 1 con los valores $\mu(0) = 1$ y $\mu(1) = 3$. Definimos luego las funciones $f = \mathbb{1}_{\{1\}}$ y $g = \mathbb{1}_{\{0\}}$ y un cálculo directo determina que $f^* = \mathbb{1}_{[0,3[}$ y $g^* = \mathbb{1}_{[0,1[}$, de esta manera tenemos $\displaystyle\int_0^{+\infty} f^*(t)g^*(t)dt = 1$. Pero para toda función $\tilde{g}$ equidistribuida con g tenemos que la integral $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(x)\tilde{g}(x)|d\mu(x)$ es nula puesto que las funciones f y $\tilde{g}$ deben tener soporte disjunto. Este ejemplo muestra que ningún espacio medido que contiene dos átomos con pesos distintos es resonante.

[2]Recordar que $A \subset \mathscr{A}$ es un *átomo* para la medida μ si $\mu(A) > 0$ y si todo subconjunto B de A o tiene la misma medida que A o es de medida nula.

3. Segunda definición de los espacios de Lorentz $L^{p,q}$

Definición 7 (Espacios de Lorentz) *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido. Sean p y q dos índices reales. Si $0 < p \leq +\infty$ y $0 < q < +\infty$, los espacios de Lorentz $L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ están constituidos por las funciones medibles f definidas sobre X y a valores en $\mathbb{K}$ tales que la cantidad a continuación sea finita:*

$$\|f\|_{L^{p,q}} = \left(\int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{15}$$

En el caso $0 < p \leq +\infty$ y $q = +\infty$ escribimos

$$\|f\|_{L^{p,\infty}} = \sup_{t>0} \left\{t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right\}. \tag{16}$$

Es necesario verificar que la cantidad $\|\cdot\|_{L^{p,q}}$ definida con las fórmulas (15) y (16) coincide con la funcional dada en la Definición 1 de la página 1.

Para ello consideramos primero el caso $0 < p < +\infty$ y $0 < q < +\infty$. Por el punto 3) de la Proposición 4, página 7, tenemos las identidades:

$$\int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right)^q \frac{dt}{t} = \int_0^{+\infty} t^{\frac{q}{p}-1}(f^*)^q(t)dt = \int_0^{+\infty} t^{\frac{q}{p}-1}(|f|^q)^*(t)dt,$$

ahora por la Proposición 3, página 7, se tiene la identidad $(|f|^q)^* = d_{d_{|f|^q}}$ y escribimos

$$\int_0^{+\infty} t^{\frac{q}{p}-1}(|f|^q)^*(t)dt \;=\; \int_0^{+\infty} t^{\frac{q}{p}-1} d_{d_{|f|^q}}(t)dt = \int_0^{+\infty} t^{\frac{q}{p}-1}\left(\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{\{d_{|f|^q}(\alpha)>t\}} d\alpha\right) dt,$$

aplicando el Teorema de Fubini obtenemos

$$\begin{aligned} &= \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{d_{|f|^q}(\alpha)} t^{\frac{q}{p}-1}dt\right) d\alpha = \frac{p}{q}\int_0^{+\infty} \left(d_{|f|^q}\right)^{\frac{q}{p}} d\alpha = \frac{p}{q}\int_0^{+\infty} \left(\mu(\{x \in X : |f(x)|^q > \alpha\})\right)^{\frac{q}{p}} d\alpha \\ &= \frac{p}{q}\int_0^{+\infty} \left(\mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha^{\frac{1}{q}}\})\right)^{\frac{q}{p}} d\alpha. \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $\beta^q = \alpha$, se tiene

$$= \frac{p}{q}\int_0^{+\infty} (\mu(\{x \in X : |f(x)| > \beta\}))^{\frac{q}{p}} q\beta^{q-1}d\beta = p\int_0^{+\infty} \left(\beta\, d_f(\beta)^{\frac{1}{p}}\right)^q \frac{d\beta}{\beta},$$

de donde finalmente obtenemos la identidad

$$\int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right)^q \frac{dt}{t} = p\int_0^{+\infty} \left(\beta\, d_f(\beta)^{\frac{1}{p}}\right)^q \frac{d\beta}{\beta},$$

lo que demuestra, extrayendo la raíz q-ésima de la expresión anterior que se tiene la igualdad entre las expresiones (15) y (1).

Pasemos ahora al caso $0 < p < +\infty$ y $q = +\infty$, por el punto 3) de la Proposición 5, página 8, se tiene la identidad

$$\sup_{t>0} \left\{t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right\} = \sup_{\alpha>0} \left\{\alpha d_f^{\frac{1}{p}}(\alpha)\right\},$$

de donde se deduce directamente la igualdad entre (16) y (2).

Estudiemos el caso $p = +\infty$ y $q = +\infty$. En esta situación la fórmula (16) se escribe $\sup\limits_{t>0} \{f^*(t)\}$, pero como la función f^* es decreciente y continua por la derecha se tiene $\sup\limits_{t>0} \{f^*(t)\} = f^*(0)$, y esta cantidad corresponde por la identidad (11) del Corolario 2, página 10, a la norma $\|\cdot\|_{L^\infty}$.

Con esto vemos que la funcional $\|\cdot\|_{L^{p,q}}$ que se basa en la función de distribución d_f como indicado en la Definición 1, también puede ser caracterizada por medio de la función de reordenamiento decreciente f^* como en la Definición 7.

Observación 2 El caso cuando $p = +\infty$ y $0 < q < +\infty$ no estaba tratado en la Definición 1 pero sí puede estudiarse con la Definición 7. Sin embargo, cuando la medida es *no atómica* los espacios $L^{\infty,q}$ con $0 < q < +\infty$ están reducidos al elemento nulo y por lo tanto no presentan ningún interés.

En efecto, para los valores $p = +\infty$ y $0 < q < +\infty$, si la cantidad $\displaystyle\int_0^{+\infty} f^*(t)^q \frac{dt}{t}$ es finita se tiene que $f = 0$ en μ-casi todas partes. Para verificarlo procedemos por el absurdo y suponemos que $f \neq 0$. En este caso existe al menos un $c > 0$ y un conjunto A de medida positiva y finita tales que $|f(x)| > c$ para todo $x \in A$. Por el punto 5) de la Proposición 5, página 8 y por la monotonía de la función de distribución (ver el punto 4) de la Proposición 4, página 7) tenemos entonces las mayoraciones

$$\int_0^{+\infty} f^*(t)^q \frac{dt}{t} \geq \int_0^{+\infty} (f\mathbb{1}_A)^*(t)^q \frac{dt}{t} \geq \int_0^{\mu(A)} c^q \frac{dt}{t} = +\infty,$$

de donde se deduce que $L^{\infty,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K}) = \{0\}$ para todo $0 < q < +\infty$.

Observación 3 Es muy importante notar aquí que, gracias al Teorema 2 de unicidad del reordenamiento decreciente, las funciones que pertenecen a los espacios de Lorentz están totalmente caracterizadas por medio de la función de reordenamiento decreciente f^*.

3.1. Propiedades adicionales de la funcional $\|\cdot\|_{L^{p,q}}$

Proposición 10 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido y sea f una función medible definida sobre el conjunto X a valores en $\mathbb{K}$. Entonces, para todo $0 < p, r < +\infty$ y para todo $0 < q \leq +\infty$ se tiene la identidad*

$$\||f|^r\|_{L^{p,q}} = \|f\|^r_{L^{pr,qr}}.$$

Prueba. La demostración de esta identidad es totalmente directa gracias al punto 3) de la Proposición 4, página 7. Empecemos con el caso cuando $0 < q < +\infty$, por la definición (15) escribimos

$$\||f|^r\|^q_{L^{p,q}} = \int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{1}{p}} \left(|f|^r\right)^* (t)\right)^q \frac{dt}{t} = \int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{1}{p}} \left(f^*(t)\right)^r\right)^q \frac{dt}{t} = \int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{1}{rp}} f^*(t)\right)^{rq} \frac{dt}{t} = \|f\|^{rq}_{L^{rp,rq}},$$

de manera que al extraer la raíz q-ésima de esta expresión se obtiene el resultado buscado. En el caso cuando $q = +\infty$, utilizamos la fórmula (16) y tenemos de manera totalmente similar las identidades

$$\||f|^r\|_{L^{p,\infty}} = \sup_{t>0} \left\{t^{\frac{1}{p}}(|f|^r)^*(t)\right\} = \sup_{t>0} \left\{t^{\frac{1}{p}}(f^*)^r(t)\right\} = \sup_{t>0} \left\{\left(t^{\frac{1}{rp}} f^*(t)\right)^r\right\} = \|f\|^r_{L^{rp,\infty}},$$

lo que termina la verificación de esta proposición. ■

Presentamos ahora una primera versión de las importantes desigualdades de Hölder en los espacios de Lorentz generales.

Teorema 4 (Desigualdades de Hölder) *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido. Sean p y q dos índices tales que $1 \leq p < +\infty$ y $1 \leq q \leq +\infty$ y sean p' y q' sus conjugados armónicos respectivos. Si f y g son dos funciones medibles tales que $f \in L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ y $g \in L^{p',q'}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$, entonces tenemos la desigualdad*

$$\left|\int_X f(x)g(x)d\mu(x)\right| \leq \|f\|_{L^{p,q}}\|g\|_{L^{p',q'}}. \tag{17}$$

Demostración. En la verificación de este resultado vamos utilizar la caracterización de los espacios de Lorentz por medio de la función de reordenamiento decreciente junto con la desigualdad de Hardy-Littlewood presentada en el Teorema 3, en efecto por la mayoración (12), página 11 podemos escribir

$$\int_X |f(x)g(x)|d\mu(x) \leq \int_0^{+\infty} f^*(t)g^*(t)dt.$$

Suponemos para empezar que $1 < q, q' < +\infty$, entonces dado que se tienen las relaciones $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$, tenemos la igualdad

$$\int_0^{+\infty} f^*(t)g^*(t)dt = \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} f^*(t)\, t^{\frac{1}{p'}-\frac{1}{q'}} g^*(t)dt.$$

En este punto es suficiente aplicar la desigualdad de Hölder usual (ver el Teorema 4.2.3 del Volumen 1) en los espacios de Lebesgue con índices q y q' a las dos funciones $\varphi(t) = t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} f^*(t)$ y $\psi(t) = t^{\frac{1}{p'}-\frac{1}{q'}} g^*(t)$ para obtener

$$\int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} f^*(t)\, t^{\frac{1}{p'}-\frac{1}{q'}} g^*(t)dt \;=\; \int_0^{+\infty} \varphi(t)\psi(t)dt \leq \left(\int_0^{+\infty} \varphi(t)^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^{+\infty} \psi(t)^{q'} dt\right)^{\frac{1}{q'}}.$$

Reemplazando los valores de las funciones φ y ψ y junto con la caracterización (15) de la funcional $\|\cdot\|_{L^{p,q}}$ se tiene

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} f^*(t)\right)^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{1}{p'}-\frac{1}{q'}} g^*(t)\right)^{q'} dt\right)^{\frac{1}{q'}} \\
&\leq \left(\int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{1}{p'}} g^*(t)\right)^{q'} \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q'}} \leq \|f\|_{L^{p,q}}\|g\|_{L^{p',q'}},
\end{aligned}$$

lo que termina la demostración de las desigualdades de Hölder en el caso cuando $1 < q, q' < +\infty$. Cuando $q = +\infty$, se tiene entonces $q' = 1$ y escribimos utilizando la fórmula (16)

$$\int_0^{+\infty} f^*(t)g^*(t)dt \;=\; \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\, t^{\frac{1}{p'}-1} g^*(t)dt \leq \sup_{t>0}\left\{t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right\} \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{p'}} g^*(t)\frac{dt}{t},$$

de donde se deduce la estimación $\displaystyle\int_X |f(x)g(x)|d\mu(x) \leq \|f\|_{L^{p,\infty}}\|g\|_{L^{p',1}}$, evidentemente, el mismo razonamiento se aplica cuando $q = 1$ y $q' = +\infty$. ■

3.2. Propiedades relativas a la teoría de la medida

Teorema 5 (Lema de Fatou) *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido y sean p, q dos parámetros reales tales que $0 < p < +\infty$ y $0 < q \leq +\infty$. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada de funciones positivas que pertenecen al espacio de Lorentz $L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$, si se tiene $\liminf\limits_{n\to+\infty} f_n = f$ en μ-casi todas partes, entonces la función f pertenece al espacio de Lorentz $L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ y tenemos la desigualdad*

$$\|f\|_{L^{p,q}} \leq \liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|_{L^{p,q}}.$$

Demostración. La demostración es directa una vez que se tiene el resultado clásico para la integral de Lebesgue (ver el Teorema 3.3.2 del Volumen 1) y el punto 7) de la Proposición 4, página 7. En efecto, dado que tenemos la estimación $f^* \leq \liminf\limits_{n\to+\infty} f_n^*$, al construir la funcional $\|\cdot\|_{L^{p,q}}$ cuando $0 < q < +\infty$ se obtiene

$$\int_0^{+\infty} t^{\frac{q}{p}-1}(f^*)^q(t)dt \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} t^{\frac{q}{p}-1}(f_n^*)^q(t)dt,$$

es decir $\|f\|_{L^{p,q}} \leq \liminf\limits_{n\to+\infty} \|f_n\|_{L^{p,q}}$. El caso cuando $q = +\infty$ se estudia de manera similar y se tiene la mayoración $t^{\frac{1}{p}} f^*(t)dt \leq \liminf\limits_{n\to+\infty} t^{\frac{1}{p}} f_n^*(t)$ de donde se deduce sin problema que $\|f\|_{L^{p,+\infty}} \leq \liminf\limits_{n\to+\infty} \|f_n\|_{L^{p,+\infty}}$. ■

Teorema 6 (de convergencia dominada) *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido. Sean $0 < p < +\infty$ y $0 < q \leq +\infty$ dos reales y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones que pertenecen al espacio $L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ tal que se tienen el límite $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$ en μ-casi todas partes.*

Si existe una función $g \in L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ tal que $|f_n(x)| \leq g(x)$ en μ-casi todas partes (que es la condición de acotación), entonces se tiene que la función f pertenece al espacio $L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ y además $\|f_n - f\|_{L^{p,q}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Demostración. De la misma forma que en los espacios de Lebesgue la demostración de este resultado se basa en el Lema de Fatou. En efecto, por la hipótesis de dominación, la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada por la función $g \in L^{p,q}$, luego por el punto 4) de la Proposición 4, página 7, se obtiene que la función límite f también pertenece al espacio de Lorentz $L^{p,q}$. Tenemos entonces $f^{*\,q} \leq g^{*\,q}$ y por lo tanto $f^{*\,q} + g^{*\,q} \geq 0$, de manera que aplicando el Lema de Fatou podemos escribir

$$\int_0^{+\infty} (f^{*\,q}(t) + g^{*\,q}(t))\, t^{\frac{q}{p}-1} dt \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} (f_n^{*\,q}(t) + g^{*\,q}(t))\, t^{\frac{q}{p}-1} dt,$$

y puesto que la función g pertenece al espacio de Lorentz $L^{p,q}$ obtenemos

$$\int_0^{+\infty} f^{*\,q}(t) t^{\frac{q}{p}-1} dt \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n^{*\,q}(t) t^{\frac{q}{p}-1} dt.$$

Razonando de forma similar tenemos que $g^{*\,q} - f^{*\,q} \geq 0$ y

$$\int_0^{+\infty} (g^{*\,q}(t) - f^{*\,q}(t))\, t^{\frac{q}{p}-1} dt \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} (g^{*\,q}(t) - f_n^{*\,q}(t))\, t^{\frac{q}{p}-1} dt,$$

es decir, sustrayendo $g^{*\,q}$, se tiene por el Lema de Fatou

$$\int_0^{+\infty} -f^{*\,q}(t) t^{\frac{q}{p}-1} dt \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} -f_n^{*\,q}(t) t^{\frac{q}{p}-1} dt,$$

lo que es equivalente a

$$\int_0^{+\infty} f^{*\,q}(t) t^{\frac{q}{p}-1} dt \geq \limsup_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n^{*\,q}(t) t^{\frac{q}{p}-1} dt.$$

Hemos entonces construido las acotaciones siguientes:

$$\limsup_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n^{*\,q}(t) t^{\frac{q}{p}-1} dt \leq \int_0^{+\infty} f^{*\,q}(t) t^{\frac{q}{p}-1} dt \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n^{*\,q}(t) t^{\frac{q}{p}-1} dt,$$

lo que termina la demostración del teorema de convergencia dominada en los espacios de Lorentz $L^{p,q}$. ■

3.3. Relaciones entre los espacios de Lorentz

Proposición 11 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido. Sea $0 < p < +\infty$ un parámetro real y sea $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ una función medible que pertenece al espacio de Lorentz $L^{p,q_0}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ para algún índice q_0 tal que $p \leq q_0 < +\infty$. Entonces tenemos el límite $\lim\limits_{q_0\to+\infty} \|f\|_{L^{p,q_0}} = \|f\|_{L^{p,\infty}}$.*

Prueba. Una vez que disponemos de la caracterización de los espacios de Lorentz dada en la Definición 7, página 14, que se basa en las función de reordenamiento decreciente, la prueba de este resultado es muy similar al caso de los espacios de Lebesgue L^p . En efecto, por la fórmula (15) tenemos

$$\|f\|_{L^{p,q_0}} = \left(\int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right)^{q_0} \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q_0}} = \left(\int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q_0}} f^*(t)\right)^{q_0} dt\right)^{\frac{1}{q_0}},$$

cantidad que puede verse como la norma L^{q_0} de la función $t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q_0}} f^*(t)$, de esta manera aplicando el Teorema 4.2.8 del Volumen 1, podemos hacer tender $q_0 \to +\infty$ para obtener el resultado deseado. ■

Teorema 7 (Inclusiones entre espacios de Lorentz) *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido y sean p, q_1, q_2 tres índices reales tales que $0 < p < +\infty$ y $0 < q_1 < q_2 \leq +\infty$. Entonces el espacio de Lorentz $L^{p,q_1}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ está estrictamente incluído en el espacio $L^{p,q_2}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$, es decir que los espacios de Lorentz son* crecientes *con respecto al segundo índice. Al nivel de las normas, esta propiedad se refleja por la estimación*

$$\|f\|_{L^{p,q_2}} \leq C\|f\|_{L^{p,q_1}}. \tag{18}$$

con $C = \left(\frac{q_1}{p}\right)^{\frac{1}{q_1}}$ si $q_2 = +\infty$ y $C = \left(\frac{q_1}{p}\right)^{\frac{q_2-q_1}{q_1 q_2}}$ si $0 < q_2 < +\infty$.

Demostración. Consideremos primero el caso $q_2 = +\infty$, $0 < p < +\infty$ y $0 < q_1 < +\infty$. Podemos escribir entonces bajo estas hipótesis la identidad

$$t^{\frac{1}{p}} f^*(t) = \left(\frac{q_1}{p}\int_0^t \left(s^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right)^{q_1} \frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{q_1}}.$$

Dado que la función de reordenamiento es decreciente, tenemos la desigualdad $f^*(t) \leq f^*(s)$ para todo $0 \leq s \leq t$, de donde obtenemos la mayoración

$$t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \leq \left(\frac{q_1}{p}\int_0^t \left(s^{\frac{1}{p}} f^*(s)\right)^{q_1} \frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{q_1}}.$$

a partir de la cual se obtiene sin problema la estimación siguiente que es uniforme con respecto a la variable t

$$t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \leq \left(\frac{q_1}{p}\int_0^{+\infty} \left(s^{\frac{1}{p}} f^*(s)\right)^{q_1} \frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{q_1}},$$

es decir, utilizando la Definición 7 página 14 de los espacios de Lorentz obtenemos

$$\|f\|_{L^{p,\infty}} = \sup_{t>0}\{t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\} \leq \left(\frac{q_1}{p}\right)^{\frac{1}{q_1}} \|f\|_{L^{p,q_1}}, \tag{19}$$

y se tiene la inclusión de espacios $L^{p,q_1} \subset L^{p,\infty}$ para todo $0 < q_1 < +\infty$.

Estudiemos ahora el caso $0 < p < +\infty$ y $0 < q_1 < q_2 < +\infty$. Para ello escribimos

$$\|f\|_{L^{p,q_2}} = \left(\int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right)^{q_2-q_1+q_1} \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q_2}} \leq \sup_{t>0}\{t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\}^{\frac{q_2-q_1}{q_2}} \left(\int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right)^{q_1} \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q_2}},$$

y dado que acabamos de verificar que se tiene la inclusión $L^{p,q_1} \subset L^{p,\infty}$, utilizando la estimación (19) tenemos

$$\|f\|_{L^{p,q_2}} \leq \left(\left(\frac{q_1}{p}\right)^{\frac{1}{q_1}} \|f\|_{L^{p,q_1}}\right)^{\frac{q_2-q_1}{q_2}} \|f\|_{L^{p,q_1}}^{\frac{q_1}{q_2}} \leq \left(\frac{q_1}{p}\right)^{\frac{q_2-q_1}{q_1 q_2}} \|f\|_{L^{p,q_1}}^{1-\frac{q_1}{q_2}} \|f\|_{L^{p,q_1}}^{\frac{q_1}{q_2}} \leq \left(\frac{q_1}{p}\right)^{\frac{q_2-q_1}{q_1 q_2}} \|f\|_{L^{p,q_1}},$$

hemos entonces demostrado que si una función f pertenece al espacio de Lorentz L^{p,q_1} entonces también pertenece al espacio L^{p,q_2} con $0 < q_1 < q_2 < +\infty$.

Para terminar la demostración del teorema necesitamos demostrar que las inclusiones son estrictas y para ello vamos a exhibir una función tal que, para todo parámetro $0 < p < +\infty$ y para todos dos índices $0 < q_1 < q_2 \leq +\infty$, se tiene que f pertenece al espacio L^{p,q_2} pero f no pertenece al espacio L^{p,q_1}. Por simplicidad, consideramos como marco general de trabajo la recta real $\mathbb{R}$ dotada de su estructura natural. Empezamos con el caso $0 < q_1 < q_2 < +\infty$ y sea entonces la función

$$\begin{array}{rcl} f :]0, e^{-\frac{\beta}{\alpha}}[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{1}{x^{\alpha}|\ln(x)|^{\beta}}, \end{array} \tag{20}$$

en donde los parámetros α y β son reales positivos que serán determinados posteriormente en función de los índices p, q_1 y q_2. Observamos que esta función es continua y estrictamente decreciente, por lo tanto por la Proposición 7, página 10, tenemos $f = f^*$ lo que nos permite escribir por un lado

$$\|f\|_{L^{p,q_1}}^{q_1} \;=\; \int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{1}{p}} f(t)^*\right)^{q_1} \frac{dt}{t} = \int_0^{e^{-\frac{\beta}{\alpha}}} t^{\frac{q_1}{p}-1} \frac{1}{t^{\alpha q_1} |\ln(t)|^{\beta q_1}} dt = \int_0^{e^{-\frac{\beta}{\alpha}}} \frac{1}{t^{1+\alpha q_1 - \frac{q_1}{p}} |\ln(t)|^{\beta q_1}} dt,$$

y por otro lado, por los mismos argumentos tenemos:

$$\|f\|_{L^{p,q_2}}^{q_2} = \int_0^{e^{-\frac{\beta}{\alpha}}} \frac{1}{t^{1+\alpha q_2 - \frac{q_2}{p}} |\ln(t)|^{\beta q_2}} dt.$$

Estas integrales, conocidas como *integrales de Bertrand*[3], son finitas si la potencia de la variable t es estrictamente inferior a 1 o si esta potencia es igual a 1 y la potencia del logaritmo es estrictamente mayor a 1. De esta manera, si fijamos $\alpha = \frac{1}{p}$ y si fijamos el parámetro β de tal manera que se tenga $q_1 < \frac{1}{\beta} < q_2$, entonces tenemos que la cantidad $\|f\|_{L^{p,q_2}}$ es finita mientras que la cantidad $\|f\|_{L^{p,q_1}}$ no lo es y de esta manera podemos evidenciar que las inclusiones entre espacios de Lorentz son estrictas.

Falta considerar el caso cuando $0 < p < +\infty$ y $0 < q_1 < q_2 = +\infty$. Vamos pues a mostrar una función que pertenece al espacio de Lorentz $L^{p,\infty}$ pero que no pertenece al espacio L^{p,q_1}, en efecto si consideramos la función

$$\begin{array}{rcl} f :]0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = x^{-\frac{1}{p}}, \end{array}$$

que es estrictamente decreciente, por la Proposición 7 página 10 tenemos la identidad $f = f^*$ y entonces la cantidad $\|f\|_{L^{p,\infty}} = \sup\limits_{t>0}\{t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\}$ es finita. Pero se tiene que la cantidad $\|f\|_{L^{p,q_1}} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right)^{q_1} \frac{dt}{t} = \int_0^1 \frac{dt}{t}$ nunca es finita y así mismo tenemos que las inclusiones entre espacios de Lorentz demostradas anteriormente son estrictas. ■

En el siguiente gráfico ilustramos las inclusiones existentes de los espacios de Lebesgue y de Lorentz, en donde los parámetros reales p_0, p_1, q, r verifican $0 < p_0 < 1$, $1 < p_1 < +\infty$, $0 < r < 1$ y $1 < q < +\infty$.

$p = p_0$	$p = 1$	$p = p_1$	$p = +\infty$
$L^{p_0,r}$	$L^{1,r}$	$L^{p_1,r}$	$L^{\infty,r} = \{0\}$
$\cap$	$\cap$	$\cap$	
$L^{p_0,p_0} = L^{p_0}$	$\vdots$	$\vdots$	
$\cap$	$\cap$	$\cap$	
$L^{p_0,1}$	$L^{1,1} = L^1$	$L^{p_1,1}$	$L^{\infty,1} = \{0\}$
$\cap$	$\cap$	$\cap$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$L^{\infty,q} = \{0\}$
$\cap$	$\cap$	$\cap$	
$\vdots$	$\vdots$	$L^{p_1,p_1} = L^{p_1}$	
$\cap$	$\cap$	$\cap$	
$L^{p_0,q}$	$L^{1,q}$	$\vdots$	
$\cap$	$\cap$	$\cap$	
$L^{p_0,\infty}$	$L^{1,\infty}$	$L^{p_1,\infty}$	$L^{\infty,\infty} = L^\infty$

Figura 3: Relaciones entre espacios de Lorentz $L^{p,q}$.

[3] Joseph Bertrand (1822-1900), matemático francés.

Recordamos que las inclusiones dentro de cada columna son estrictas y que en el caso general no existe ninguna relación de inclusión entre columnas.

Veamos ahora un corolario que completa el Teorema 1 de la página 3.

Corolario 4 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido, sean $0 < p_0 < p_1 \leq +\infty$ dos parámetros reales y sea f una función medible tal que $f \in L^{p_0,q_0}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K}) \cap L^{p_1,q_1}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ donde $0 < q_0, q_1 \leq +\infty$, entonces $f \in L^{p,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ para todo $p_0 < p < p_1$ y se tiene la desigualdad de interpolación siguiente*

$$\|f\|_{L^{p,\infty}} \leq C(p_0, p, p_1, q_0, q_1)\|f\|^{\theta}_{L^{p_0,q_0}}\|f\|^{1-\theta}_{L^{p_1,q_1}},$$

donde $\theta = \frac{p_0(p_1-p)}{p(p_1-p_0)}$ si $p_1 < +\infty$ y donde $\theta = \frac{p_0}{p}$ si $p_1 = +\infty$.

Prueba. Por el Teorema 1 se tiene la desigualdad

$$\|f\|_{L^{p,q}} \leq C(p_0, p, p_1)\|f\|^{\theta}_{L^{p_0,\infty}}\|f\|^{1-\theta}_{L^{p_1,\infty}},$$

para algún $0 < q < +\infty$. Basta entonces aplicar a ambos lados de la desigualdad anterior la inclusión de espacios $L^{p,q} \subset L^{p,\infty}$ (que se traduce por la estimación $\|f\|_{L^{p,\infty}} \leq C\|f\|_{L^{p,q}}$). ■

Proposición 12 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido. Si p, q son dos parámetros reales tales que $0 < p, q < +\infty$, entonces los espacios de Lorentz generales $(L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K}), \|\cdot\|_{L^{p,q}})$ son espacios de cuasi-Banach.*

Prueba. El hecho que los espacios de Lorentz $(L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K}), \|\cdot\|_{L^{p,q}})$ son espacios cuasi-normados ya ha sido verificado en el Corolario 1, página 3, usando la caracterización de la funcional $\|\cdot\|_{L^{p,q}}$ basada en la función de distribución, de manera que lo único que queda por verificar es la completitud con respecto a esta funcional.

Consideramos únicamente el caso $0 < p, q < +\infty$. Sea pues $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en donde todas las funciones pertenecen al espacio de Lorentz $L^{p,q}$. Dado que se tiene la inclusión $L^{p,q} \subset L^{p,\infty}$, la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ también es una sucesión de Cauchy para el espacio $L^{p,\infty}$ y se tiene que también es una sucesión de Cauchy en μ-medida, entonces existe una subsucesión $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge en μ-casi todas partes hacia una función medible f. Fijemos $k_0 \in \mathbb{N}$, entonces como se tiene

$$|f(x) - f_{n_{k_0}}(x)| = \lim_{k\to+\infty} |f_{n_k}(x) - f_{n_{k_0}}(x)|,$$

podemos aplicar el punto 7) de la Proposición 4 y obtenemos

$$(f - f_{n_{k_0}})^*(t) \leq \liminf_{k\to+\infty} (f_{n_k} - f_{n_{k_0}})^*(t).$$

Reconstruyendo la funcional $\|\cdot\|_{L^{p,q}}$ a partir de esta estimación podemos escribir, aplicando el Lema de Fatou

$$\|f - f_{n_{k_0}}\|^q_{L^{p,q}} \leq \liminf_{k\to+\infty} \|f_{n_k} - f_{n_{k_0}}\|^q_{L^{p,q}},$$

hacemos ahora tender k_0 hacia el infinito y usamos el hecho que la sucesión es de Cauchy para obtener la la subsucesión $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge en los espacios de Lorentz $L^{p,q}$. Para terminar, como estamos trabajando sobre espacios cuasi-normados la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy es convergente hacia una función $f \in L^{p,q}$. ■

Proposición 13 (Inclusiones - Medida finita) *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido de masa total finita. Si $0 < p < q < +\infty$ entonces para todo $0 < r \leq +\infty$, los espacios de Lorentz $L^{q,r}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ están contenidos en los espacios $L^{p,s}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ para todo $0 < s \leq +\infty$.*

Prueba. Supongamos para empezar que $0 < s < +\infty$. Sabemos por el resultado general dado en el Teorema 7 que se tienen las inclusiones $L^{q,r} \subset L^{q,\infty}$ para todo $0 < r < +\infty$, lo que se refleja con la desigualdad (19), es decir $\|f\|_{L^{q,\infty}} \leq C\|f\|_{L^{q,r}}$. De esta manera, lo único que debemos verificar es la mayoración siguiente

$$\|f\|_{L^{p,s}} \leq C(s, p, q)\mu(X)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|f\|_{L^{q,\infty}}, \tag{21}$$

en donde se tiene $0 < p < q < +\infty$, $0 < s < +\infty$ y $C(s, p, q) = \left(\frac{pq}{s(q-p)}\right)^{\frac{1}{s}}$.

Ahora, como tenemos la identidad $f = f\mathbb{1}_X$, por el punto 5) de la Proposición 5, página 8, tenemos la mayoración $(f\mathbb{1}_X)^*(t) \leq f^*(t)\mathbb{1}_{[0,\mu(X)[}$ y como la medida del conjunto X es finita, podemos escribir

$$\|f\|_{L^{p,s}} = \|f\mathbb{1}_X\|_{L^{p,s}} = \left(\int_0^{+\infty}\left(t^{\frac{1}{p}}(f\mathbb{1}_X)^*(t)\right)^s \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{s}} \leq \left(\int_0^{+\infty}\left(t^{\frac{1}{p}}f^*(t)\mathbb{1}_{\mu(X)}\right)^s \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{s}} = \left(\int_0^{\mu(X)}\left(t^{\frac{1}{p}}f^*(t)\right)^s \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{s}},$$

como $0 < p < q < +\infty$, entonces

$$\left(\int_0^{\mu(X)}\left(t^{\frac{1}{p}}f^*(t)\right)^s \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{s}} = \left(\int_0^{\mu(X)} t^{\frac{s}{p}-\frac{s}{q}-1}\, t^{\frac{s}{q}}(f^*)^s(t)dt\right)^{\frac{1}{s}} \leq \sup_{t>0}\{t^{\frac{1}{q}}f^*(t)\}\left(\int_0^{\mu(X)} t^{\frac{s}{p}-\frac{s}{q}-1}dt\right)^{\frac{1}{s}},$$

y después de integrar se obtienen las mayoraciones

$$\|f\|_{L^{p,s}} \leq \|f\|_{L^{q,\infty}}\left(\frac{pq}{s(q-p)}\right)^{\frac{1}{s}}\mu(X)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}},$$

de donde se deducen las inclusiones $L^{q,\infty} \subset L^{p,s}$.

El caso cuando $s = +\infty$ es totalmente similar, en efecto: por los mismos argumentos utilizados aquí arriba tenemos (puesto que $0 < p < q < +\infty$)

$$\begin{aligned} t^{\frac{1}{p}}f^*(t) &= t^{\frac{1}{p}}(f\mathbb{1}_X)^*(t) \leq t^{\frac{1}{p}}f^*(t)\mathbb{1}_{[0,\mu(X)[} = t^{\frac{1}{q}}f^*(t)t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\mathbb{1}_{[0,\mu(X)[} \\ &\leq \sup_{t>0}\{t^{\frac{1}{q}}f^*(t)\}\mu(X)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}, \end{aligned}$$

hemos entonces verificado la mayoración $\|f\|_{L^{p,\infty}} \leq \mu(X)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|f\|_{L^{q,\infty}}$, que implica la inclusión $L^{q,\infty} \subset L^{p,\infty}$, lo que junto con las inclusiones generales dadas en el Teorema 7 permite terminar la demostración de la proposición. ■

Es importante notar que la hipótesis $p < q$ no puede ser dejada de lado, pues caso contrario es posible encontrar sin mayor dificultad contraejemplos para las inclusiones consideradas.

3.4. Un primer estudio de normabilidad de los espacios de Lorentz

El resultado siguiente nos proporciona pues un primer estudio sobre la normabilidad de los espacios de Lorentz.

Teorema 8 (Normabilidad) *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido resonante. Si los índices p, q verifican $1 \leq q \leq p < +\infty$ entonces el espacio de Lorentz $(L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K}), \|\cdot\|_{L^{p,q}})$ es un espacio normado.*

Demostración. Cuando $1 \leq p < +\infty$ y si $p = q$, entonces no hay nada que demostrar pues los espacios de Lorentz se reducen en este caso a los espacios de Lebesgue L^p que son espacios de Banach.

Suponemos entonces que $1 \leq q < p < +\infty$. En estas condiciones, la función $t \longmapsto t^{\frac{q}{p}-1}$ es continua y estrictamente decreciente sobre $[0, +\infty[$ y tenemos por la Proposición 7, página 10, la identidad $(t^{\frac{q}{p}-1})^* = t^{\frac{q}{p}-1}$. Ahora, como por hipótesis el espacio medido es resonante, disponemos por definición de la identidad (13), página 12, y podemos escribir

$$\|f+g\|_{L^{p,q}} = \left(\int_0^{+\infty} t^{\frac{q}{p}-1}(f+g)^{*\,q}(t)dt\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sup\int_X |f(x)+g(x)|^q|h(x)|d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}},$$

en donde el supremo es tomado sobre toda las funciones h equidistribuidas con la función $t^{\frac{q}{p}-1}$. Reescribimos ahora esta identidad anterior de la siguiente manera

$$\|f+g\|_{L^{p,q}} = \sup\left(\int_X \left|f(x)|h(x)|^{\frac{1}{q}} + g(x)|h(x)|^{\frac{1}{q}}\right|^q d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}},$$

y puesto que $1 \leq q < +\infty$, podemos aplicar la desigualdad de Minkowski usual y la subaditividad del supremo para obtener

$$\|f+g\|_{L^{p,q}} \leq \sup\left(\int_X |f(x)|^q|h(x)|d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}} + \sup\left(\int_X |g(x)|^q|h(x)|d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Utilizando una vez más el hecho de que el espacio medido es resonante, que se tiene la fórmula $(t^{\frac{q}{p}-1})^* = t^{\frac{q}{p}-1}$ y que se tiene la identidad (13) escribimos

$$\|f+g\|_{L^{p,q}} \leq \left(\int_0^{+\infty} t^{\frac{q}{p}-1}(|f|^q)^*(t)dt\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_0^{+\infty} t^{\frac{q}{p}-1}(|g|^q)^*(t)dt\right)^{\frac{1}{q}},$$

finalmente, utilizando el punto 3) de la Proposición 4, página 7, tenemos

$$\begin{aligned}\|f+g\|_{L^{p,q}} &\leq \left(\int_0^{+\infty} t^{\frac{q}{p}-1}(f^*(t))^q dt\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_0^{+\infty} t^{\frac{q}{p}-1}(g^*(t))^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\\ &\leq \|f\|_{L^{p,q}} + \|g\|_{L^{p,q}},\end{aligned}$$

lo que termina la demostración de la desigualdad triangular. ■