Lección n°3: Espacios de Lorentz $L^{p,q}$: propiedades y generalizaciones EPN, septiembre 2018

Índice

1. La función maximal f_r^{**}

Tenemos dos definiciones de los espacios de Lorentz $L^{p,q}$ con $0 < p < +\infty$ y $0 < q \leq +\infty$:

- ya sea utilizando la función de distribución d_f:

$$\|f\|_{L^{p,q}} = p^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^{+\infty} \left(\alpha\, d_f(\alpha)^{\frac{1}{p}}\right)^q \frac{d\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{1}{q}},$$

- ya sea por medio de la función de reordenamiento decreciente f^*:

$$\|f\|_{L^{p,q}} = \left(\int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}},$$

con las modificaciones del caso en ambas expresiones cuando $q = +\infty$.

Sin embargo, ninguna de estas dos expresiones permitía obtener *directamente* la desigualdad triangular para esta funcional pues no se tiene a disposición estimaciones *puntuales* del tipo

$$d_{f+g}(\alpha) \leq d_f(\alpha) + d_g(\alpha) \quad \text{o} \quad (f+g)^*(t) \leq f^*(t) + g^*(t),$$

como hemos visto con los contraejemplos correspondientes.

La idea es entonces reemplazar las funciones de distribución d_f y de reordenamiento decreciente f^* por una función diferente, que notaremos f_r^{**}, que sí nos permita obtener este tipo de desigualdades puntales.

1.1. Definición y justificación

Definición 1 (Función maximal f_r^{**}) *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido y sea r un real tal que verifica la condición $0 < r < +\infty$. Si f es una función medible definida sobre X y a valores en $\mathbb{K}$, definimos entonces la función maximal $f_r^{**} :]0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ por medio de la expresión*

$$f_r^{**}(t) = \left(\frac{1}{t} \int_0^t (f^*)^r(s) ds \right)^{\frac{1}{r}}. \tag{1}$$

En el caso cuando $r = 1$, notaremos más simplemente $f^{**} = f_1^{**}$.

Vamos a justificar su denominación de *función maximal* y para ello fijaremos $r = 1$. Sabemos por la desigualdad de Hardy-Littlewood, que si f y g son dos funciones integrables definidas sobre el espacio medido $(X, \mathscr{A}, \mu)$ a valores en $\mathbb{K}$, entonces

$$\int_X |f(x)g(x)| d\mu(x) \leq \int_0^{+\infty} f^*(s)g^*(s)ds.$$

Fijemos ahora la función $g(x) = \mathbb{1}_A(x)$ con $\mu(A) = t$. Sabemos entonces que se tiene $g^*(s) = \mathbb{1}_{[0,\mu(A)[}(s) = \mathbb{1}_{[0,t[}(s)$, y por lo tanto la desigualdad anterior se escribe

$$\int_A |f(x)| d\mu(x) \leq \int_0^t f^*(s)ds,$$

de manera que dividiendo ambas partes de esta estimación por $\mu(A) = t$ obtenemos

$$\frac{1}{\mu(A)} \int_A |f(x)| d\mu(x) \leq \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s)ds = f^{**}(t). \tag{2}$$

Esto significa que el promedio de la función $|f|$ sobre todos los conjuntos de medida t es siempre controlado por el correspondiente promedio de su función de reordenamiento decreciente f^*, que es por definición igual al valor de la función f^{**} evaluada en t.

Pero esto no es todo, por la misma desigualdad de Hardy-Littlewood, aplicada esta vez al caso del intervalo $]0, +\infty[$, tenemos que la cantidad $\frac{1}{t} \int_0^t f^*(s)ds$ es maximal (por ser la función f^* decreciente) si se la compara con todos los promedios posibles de la función f^* sobre intervalos de tamaño t. Es entonces esta propiedad de "doble" maximalidad que explica el nombre dado a la función f^{**}.

1.2. Ejemplos

Consideremos ahora un par de ejemplos de determinación de la función f_r^{**}.

(i) Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido y sea A un conjunto de μ-medida finita. Si consideramos su función indicatriz $f(x) = \mathbb{1}_A(x)$, sabemos que la función de reordenamiento decreciente asociada es $f^*(s) = \mathbb{1}_{[0,\mu(A)[}(s)$ y por lo tanto tenemos

$$f_r^{**}(t) = \left(\frac{1}{t} \int_0^t (f^*)^r(s) ds \right)^{\frac{1}{r}} = \left(\frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{1}_{[0,\mu(A)[}(s) ds \right)^{\frac{1}{r}},$$

y a partir de esta expresión vemos que si se tiene $0 < t < \mu(A)$ entonces $f_r^{**}(t) = 1$, mientras que si $\mu(A) \leq t$ obtenemos $f_r^{**}(t) = \left(\frac{\mu(A)}{t}\right)^{\frac{1}{r}}$. En la figura a continuación representamos esta función:

Es decir, tenemos para esta función indicatriz

$$f_r^{**}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < t < \mu(A), \\ \left(\frac{\mu(A)}{t}\right)^{\frac{1}{r}} & \text{si } \mu(A) \leq t. \end{cases} \tag{3}$$

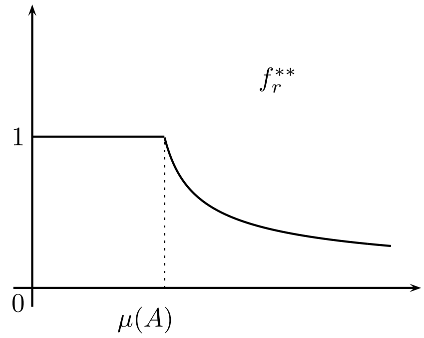

Figura 1: La función f_r^{**} asociada a una función indicatriz.

(ii) Veamos ahora otro ejemplo. Fijemos un real $0 < r < +\infty$ y sobre el intervalo $]0, +\infty[$ dotado de su estructura natural consideramos la función $f(x) = x^{-\frac{1}{p}}$ con $0 < r < p < +\infty$, que es una función real, continua y estrictamente decreciente, obtenemos entonces que es igual a su función de reordenamiento decreciente, es decir $f^*(s) = s^{-\frac{1}{p}}$. A partir de estas observaciones, es sencillo deducir la expresión explícita de la función maximal correspondiente y aplicando directamente la definición (1) se obtiene

$$f_r^{**}(t) = \frac{p}{p-r} t^{-\frac{1}{p}}.$$

Nótese bien aquí el rol del parámetro r y de la condición $0 < r < p$: esto permite evaluar la integral que define la función f_r^{**}. En particular, es importante observar que no es posible considerar el caso cuando $p = r$ pues en esta situación la integral de la expresión (1) no estaría definida.

Este ejemplo muestra que, salvo una constante multiplicativa, la función maximal f_r^{**} preserva las funciones (reales) del tipo $x^{-\frac{1}{p}}$ cuando se tiene la condición $0 < r < p < +\infty$. En las líneas siguientes veremos la utilidad de esta propiedad.

1.3. Propiedades

Proposición 1 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido, sea $0 < r < +\infty$ un real y sean f y g dos funciones medibles definidas sobre X a valores en $\mathbb{K}$. Tenemos entonces los puntos siguientes.*

1) *Se tiene $(|f|)_r^{**} = f_r^{**}$ y la función maximal f_r^{**} es una función positiva, decreciente y continua sobre $]0, +\infty[$. Además, si f y $\tilde{f}$ son dos funciones equidistribuidas, entonces se tiene $f_r^{**} = \tilde{f}_r^{**}$,*

2) *para todo $\lambda \in \mathbb{K}^*$, tenemos la identidad $(\lambda f)_r^{**} = |\lambda| f_r^{**}$,*

3) *si se tiene la estimación $|g| \leq |f|$ en μ-casi todas partes entonces para todo $t > 0$ se tiene $g_r^{**}(t) \leq f_r^{**}(t)$,*

4) *si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente de funciones medibles tal que se tiene la estimación $|f_n(x)| \leq |f(x)|$ en μ-casi todas partes y si además se tiene el límite $\lim\limits_{n\to+\infty} |f_n| = |f|$ en μ-casi todas partes, entonces tenemos la desigualdad ${f_r^{**}}_n(t) \leq f_r^{**}(t)$ y $\lim\limits_{n\to+\infty} {f_r^{**}}_n(t) = f_r^{**}(t)$ para todo $t > 0$,*

5) *La función maximal f_r^{**} es idénticamente nula si y solo si se tiene $f = 0$ en μ-casi todas partes.*

Prueba.

1) La identidad $(|f|)_r^{**} = f_r^{**}$ se deduce directamente la propiedad correspondiente $(|f|)^* = f^*$ de las funciones de reordenamiento decreciente. A partir de este hecho se obtiene sin problema que la función f_r^{**} es positiva.

El hecho que la función maximal es decreciente se deduce del siguiente hecho general que enunciamos por separado en el lema a continuación.

Lema 1 *Sea φ una función a valores reales definida sobre $]0,+\infty[$, decreciente y positiva. Si x, y son dos reales tales $0 < x \leq y$, entonces tenemos la estimación*

$$\frac{1}{y}\int_0^y \varphi(s)ds \leq \frac{1}{x}\int_0^x \varphi(s)ds.$$

Prueba. Como la función φ es decreciente tenemos por un lado la mayoración

$$x\int_x^y \varphi(s)ds \leq x\int_x^y \varphi(x)ds = (y-x)x\varphi(x),$$

y por otro lado la estimación $0 \leq \int_0^x \big(\varphi(s) - \varphi(x)\big)ds$, pues sobre el intervalo $s \in]0, x]$ se tiene el control $\varphi(s) \geq \varphi(x)$, lo que a su vez implica la estimación $xf(x) \leq \int_0^x \varphi(s)ds$, de esta manera la primera mayoración aquí arriba se reescribe $x\int_x^y \varphi(s)ds \leq (y-x)\int_0^x \varphi(s)ds$, y por la linealidad de la integral obtenemos $x\int_x^y \varphi(s)ds + x\int_0^x \varphi(s)ds \leq y\int_0^x \varphi(s)ds$, de donde se deduce sin problema la desigualdad $x\int_0^y \varphi(s)ds \leq y\int_0^x \varphi(s)ds$, lo que concluye la prueba de este lema. ■

De esta manera, para obtener que la función maximal f_r^{**} definida por medio de la fórmula (1) es decreciente, es suficiente aplicar este lema a la función $(f^*)^r$ que verifica todas las hipótesis necesarias.

La continuidad de esta función f_r^{**} se obtiene por la continuidad de la integral con respecto a la cota superior. Finalmente, si f y $\tilde{f}$ son dos funciones equidistribuidas, se tiene $f^* = \tilde{f}^*$, de donde se obtiene por definición de la función maximal la identidad $f_r^{**} = \tilde{f}_r^{**}$.

2) El segundo punto se deduce sin problema de la propiedad $(\lambda f)^* = |\lambda| f^*$ de la función de reordenamiento decreciente.

3) Se obtiene este punto reconstruyendo la función maximal f_r^{**} dada en (1).

4) Gracias al punto 3) anterior obtenemos la mayoración $f_{r\,n}^{**}(t) \leq f_r^{**}(t)$ y el paso al límite se basa en el teorema de convergencia monótona.

5) Para el último punto, se tiene $f_r^{**} \equiv 0$ si y solo si la función de reordenamiento decreciente f^* es nula, lo que es equivalente al hecho que la función inicial f es nula en μ-casi todas partes. ■

Proposición 2 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido, sea $0 < r < +\infty$ un real y sea f una función medible definida sobre X a valores en $\mathbb{K}$. Entonces se tiene la desigualdad*

$$f^*(t) \leq f_r^{**}(t),$$

para todo $0 < t < +\infty$.

Prueba. Como la función f^* es decreciente se tiene sobre el intervalo $0 < s \leq t$ que $f^*(s) \geq f^*(t)$, de manera que podemos escribir

$$f_r^{**}(t) = \left(\frac{1}{t}\int_0^t (f^*)^r(s)ds\right)^{\frac{1}{r}} \geq \left((f^*)^r(t)\frac{1}{t}\int_0^t ds\right)^{\frac{1}{r}} = f^*(t),$$

lo que termina la verificación de esta proposición. ■

Vemos entonces que la función maximal f_r^{**} siempre controla a la función de reordenamiento decreciente f^*. Una consecuencia particular de este hecho es el siguiente resultado.

Proposición 3 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido, sea $0 < r < +\infty$ un real y sea f una función medible definida sobre X a valores en $\mathbb{K}$. Si $f \in L^\infty(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$, entonces se tiene*

$$\|f\|_{L^\infty} = \sup_{t>0} f_r^{**}(t).$$

Prueba. Por el resultado anterior tenemos $\sup\limits_{t>0} f^*(t) \leq \sup\limits_{t>0} f_r^{**}(t)$, pero como la función f^* es decreciente se tienen las identidades $\sup\limits_{t>0} f^*(t) = f^*(0) = \|f\|_{L^\infty}$, de donde se obtiene la mayoración $\|f\|_{L^\infty} \leq \sup\limits_{t>0} f_r^{**}(t)$. Por otro lado, por la definición de la función f_r^{**} y utilizando el decrecimiento de la función f^*, tenemos

$$f_r^{**}(t) = \left(\frac{1}{t}\int_0^t (f^*)^r(s)ds\right)^{\frac{1}{r}} \leq f^*(0)\left(\frac{1}{t}\int_0^t ds\right)^{\frac{1}{r}} = f^*(0) = \|f\|_{L^\infty},$$

de donde se obtiene el control $\sup\limits_{t>0} f_r^{**}(t) \leq \|f\|_{L^\infty}$. ■

Proposición 4 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido y sean r, t dos reales tales que $0 < r < +\infty$ y $0 < t \leq \mu(X)$. Sea f una función medible definida sobre X a valores en $\mathbb{K}$.*

1) Si el espacio medido es resonante, entonces tenemos la identidad

$$f_r^{**}(t) = \sup_{\mu(A)=t}\left(\frac{1}{\mu(A)}\int_A |f(x)|^r d\mu(x)\right)^{\frac{1}{r}}.$$

2) Si el espacio medido es fuertemente resonante, entonces existe un conjunto medible A tal que $\mu(A) = t$ y tal que se tenga la identidad

$$f_r^{**}(t) = \left(\frac{1}{t}\int_A |f(x)|^r d\mu(x)\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Prueba.

1) Debemos verificar que se tiene la identidad

$$f_r^{**}(t) = \left(\frac{1}{t}\int_0^t (f^*)^r(s)ds\right)^{\frac{1}{r}} = \sup_{\mu(A)=t}\left(\frac{1}{\mu(A)}\int_A |f(x)|^r d\mu(x)\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Tenemos $(f^*)^r = (|f|^r)^*$, de manera que si definimos $|h| = |f|^r$, podemos reescribir la identidad buscada de la siguiente manera:

$$\left(\frac{1}{t}\int_0^t h^*(s)ds\right)^{\frac{1}{r}} = \sup_{\mu(A)=t}\left(\frac{1}{\mu(A)}\int_A |h(x)|d\mu(x)\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Ahora, como se tiene $0 < t \leq \mu(X)$ y como el espacio medido es resonante, existe un conjunto medible $A \subset X$ tal que se tenga $\mu(A) = t$. Si definimos $g(x) = \mathbb{1}_A(x)$, entonces la función de reordenamiento decreciente está dada por $g^*(s) = \mathbb{1}_{[0,\mu(A)[}(s) = \mathbb{1}_{[0,t[}(s)$. En este punto observamos que una función $\tilde{g}$ es equidistribuida con g si y solo si $|\tilde{g}|$ es igual en μ-casi todas partes a la función característica de algún conjunto medible B tal que $\mu(B) = \mu(A) = t$. Entonces, como por hipótesis el espacio medido es resonante tenemos

$$\int_0^{+\infty} h^*(s)\mathbb{1}_{[0,t[}(s)ds = \sup_{\mu(A)=t}\int_X |h(x)|\mathbb{1}_A(x)d\mu(x),$$

de manera que dividiendo esta identidad por t, reemplazando la expresión de la función h y extrayendo la raíz r-ésima en ambas partes de esta fórmula se obtiene la identidad deseada.

2) El caso de espacios fuertemente resonantes es totalmente similar y hasta un poco más sencillo de estudiar puesto que en esta situación no hace falta tomar el supremo: por hipótesis de resonancia fuerte disponemos de una función que realiza la identidad. ■

Corolario 1 (Subaditividad de la función maximal f^{**})
Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido resonante y sean f, g dos funciones medibles definidas sobre X a valores en $\mathbb{K}$. Si $1 \leq r < +\infty$, entonces se tiene la siguiente desigualdad puntual

$$(f+g)_r^{**}(t) \leq f_r^{**}(t) + g_r^{**}(t),$$

dicho de otra manera, en los espacios medidos resonantes, la función maximal f_r^{**} es subaditiva.

Prueba. Por el primer punto de la Proposición 4 anterior, si $r \geq 1$ tenemos:

$$(f+g)_r^{**}(t) = \left(\sup_{\mu(A)=t} \frac{1}{\mu(A)} \int_A |f(x)+g(x)|^r d\mu(x) \right)^{\frac{1}{r}},$$

de manera que usando la desigualdad de Minkowski y la subaditividad del supremo obtenemos la mayoración

$$(f+g)^{**}(t) \leq \left(\sup_{\mu(A)=t} \frac{1}{\mu(A)} \int_A |f(x)|^r d\mu(x) \right)^{\frac{1}{r}} + \left(\sup_{\mu(A)=t} \frac{1}{\mu(A)} \int_A |g(x)|^r d\mu(x) \right)^{\frac{1}{r}},$$

aplicando una vez más la Proposición 4 escribimos $(f+g)_r^{**}(t) \leq f_r^{**}(t) + g_r^{**}(t)$, es decir que hemos obtenido la subaditividad de la función maximal cuando $1 \leq r < +\infty$. ■

En el caso cuando $0 < r < 1$, no se tiene la desigualdad de Minkowski que permite obtener la subaditividad, pero se tiene el resultado a continuación.

Corolario 2 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido resonante y sean f, g dos funciones medibles definidas sobre X a valores en $\mathbb{K}$. Si $0 < r < 1$ es un parámetro real, entonces tenemos la desigualdad*

$$\left((f+g)_r^{**}\right)^r(t) \leq \left(f_r^{**}\right)^r(t) + \left(g_r^{**}\right)^r(t).$$

Prueba. La verificación de este hecho es muy similar a la del corolario anterior y se basa en la Proposición 4. En efecto, aplicando el primer punto de esta proposición podemos escribir

$$\left((f+g)_r^{**}\right)^r(t) = \sup_{\mu(A)=t} \frac{1}{\mu(A)} \int_A |f(x)+g(x)|^r d\mu(x),$$

pero como $0 < r < 1$, tenemos la desigualdad puntual $|f(x)+g(x)|^r \leq |f(x)|^r + |g(x)|^r$ de manera que por la subaditividad del supremo obtenemos

$$\left((f+g)_r^{**}\right)^r(t) \leq \sup_{\mu(A)=t} \frac{1}{\mu(A)} \int_A |f(x)|^r d\mu(x) + \sup_{\mu(A)=t} \frac{1}{\mu(A)} \int_A |g(x)|^r d\mu(x),$$

es decir, utilizando otra vez la identidad del primer punto de la Proposición 4, hemos obtenido la mayoración $\left((f+g)_r^{**}\right)^r(t) \leq \left(f_r^{**}\right)^r(t) + \left(g_r^{**}\right)^r(t)$, lo que termina la prueba del corolario. ■

Es posible generalizar el resultado anterior a espacios medidos generales.

Teorema 1 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido σ-finito. Si f y g son dos funciones medibles definidas sobre el conjunto X a valores en $\mathbb{K}$, entonces tenemos la desigualdad puntual siguiente para todo $0 < t < +\infty$ y todo $0 < r < 1$:*

$$\big((f+g)_r^{**}\big)^r(t) \leq \big(f_r^{**}\big)^r(t) + \big(g_r^{**}\big)^r(t).$$

En el caso cuando $1 \leq r < +\infty$ tenemos en cambio la mayoración

$$\big((f+g)_r^{**}\big)(t) \leq \big(f_r^{**}\big)(t) + \big(g_r^{**}\big)(t),$$

en particular, cuando $r = 1$ la función maximal f^{**} es subaditiva.

2. Tercera definición de los espacios de Lorentz $L^{p,q}$

Definición 2 (Funcional $|||\cdot|||_{p,q,r}$) *Sea $(X,\mathscr{A},\mu)$ un espacio medido y sea f una función medible definida sobre X a valores en $\mathbb{K}$. Sean r,p,q tres índices reales tales que $0<r<p<+\infty$ y $r\leq q\leq+\infty$. Definimos entonces la funcional $|||\cdot|||_{p,q,r}$ por medio de la expresión*

$$|||f|||_{p,q,r}=\left(\int_0^{+\infty}\left(t^{\frac{1}{p}}f_r^{**}(t)\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{4}$$

En el caso $0<r<p<+\infty$ y $q=+\infty$ tenemos

$$|||f|||_{p,\infty,r}=\sup_{t>0}\left\{t^{\frac{1}{p}}f_r^{**}(t)\right\}. \tag{5}$$

Cuando $r=1$, por simplicidad notaremos $|||f|||_{p,q}$ en vez de $|||f|||_{p,q,1}$.

(i) Sobre el espacio medido $(X,\mathscr{A},\mu)$ consideramos la función indicatriz $f(x)=\mathbb{1}_A(x)$, en donde A es un subconjunto de μ-medida finita de X y suponemos que se tiene $0<r<p,q<+\infty$. Entonces, de forma inmediata tenemos $\|f\|_{L^p}=\mu(A)^{\frac{1}{p}}$ y $\|f\|_{L^{p,q}}=\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{q}}\mu(A)^{\frac{1}{p}}$. Gracias a la expresión de f_r^{**} calculada en la página 2, obtenemos sin dificultad

$$\begin{aligned}|||f|||_{p,q,r} &= \left(\int_0^{+\infty}\left(t^{\frac{1}{p}}\left(\mathbb{1}_{]0,\mu(A)[}(t)+\mathbb{1}_{[\mu(A),+\infty[}(t)\left(\frac{\mu(A)}{t}\right)^{\frac{1}{r}}\right)\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}\\ &= \left(\int_0^{+\infty}\left(t^{\frac{1}{p}}\mathbb{1}_{]0,\mu(A)[}(t)+t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}\mu(A)^{\frac{1}{r}}\mathbb{1}_{[\mu(A),+\infty[}(t)\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

Utilizando el soporte disjunto de las dos funciones que conforman la integral anterior y el hecho que se tiene $0<r<p$, obtenemos

$$\begin{aligned}|||f|||_{p,q,r} &= \left(\int_0^{\mu(A)}t^{\frac{q}{p}-1}dt+\int_{\mu(A)}^{+\infty}t^{\frac{q}{p}-\frac{q}{r}-1}\mu(A)^{\frac{q}{r}}dt\right)^{\frac{1}{q}}\\ &= \left(\left(\frac{p}{q}\right)\mu(A)^{\frac{q}{p}}+\left(\frac{pr}{q(p-r)}\right)\mu(A)^{\frac{q}{r}}\mu(A)^{\frac{q}{p}-\frac{q}{r}}\right)^{\frac{1}{q}}=\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\frac{p}{p-r}\right)^{\frac{1}{q}}\mu(A)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Todos estos cálculos, a pesar de ser sencillos, son muy reveladores del comportamiento de la funcional $|||\cdot|||_{p,q,r}$. Observamos primero que cuando se tiene $0<p,q<+\infty$, las tres funcionales $\|\cdot\|_{L^p}$, $\|\cdot\|_{L^{p,q}}$ y $|||\cdot|||_{p,q,r}$ miden el tamaño de las funciones indicatrices de manera muy similar: en cada una de estas funcionales la información relevante está dada por $\mu(A)^{\frac{1}{p}}$.

Una segunda observación tiene que ver con la condición $0<r<p$ exigida en la Definición 2: dado que la función maximal f_r^{**} asociada a una función indicatriz de un conjunto de medida finita no es una función a soporte finito, esta condición es indispensable para poder evaluar la segunda integral en el cálculo de la funcional $|||\cdot|||_{p,q,r}$ realizado aquí arriba. Nótese que la condición $r\leq q$ no interviene en los cálculos anteriores y será considerada más adelante.

(ii) Sobre el intervalo $]0,+\infty[$ estudiamos ahora funciones reales del tipo $f(x)=x^{-\frac{1}{p}}$ con $0<r<p<+\infty$. Estas funciones no pertenecen a los espacios de Lebesgue L^p pero tenemos que $\|f\|_{L^{p,\infty}}=1$, es decir que estas funciones sí pertenecen a los espacios de Lorentz $L^{p,\infty}$.

Vamos ahora a evaluar la cantidad $|||f|||_{p,\infty,r}$ según la fórmula (5). Sabemos por el ejemplo (ii) de la página 3 que se tiene $f_r^{**}(t)=\frac{p}{p-r}t^{-\frac{1}{p}}$, de manera que

$$|||f|||_{p,\infty,r}=\sup_{t>0}\left\{t^{\frac{1}{p}}f_r^{**}(t)\right\}=\sup_{t>0}\left\{t^{\frac{1}{p}}\left(\frac{p}{p-r}\right)t^{-\frac{1}{p}}\right\}=\frac{p}{p-r},$$

como vemos, la funcional $|||\cdot|||_{p,\infty,r}$ también tiene sentido al estudiar las funciones de este tipo, y la única diferencia con la funcional $\|\cdot\|_{L^{p,\infty}}$ está dada por la constante $\frac{p}{p-r}$.

Proposición 5 (Hardy) *Sea f una función positiva definida sobre el intervalo $]0,+\infty[$ dotado de su estructura natural. Si α y β son dos parámetros reales tales que $1\leq\alpha<+\infty$ y $0<\beta<+\infty$, entonces tenemos las desigualdades siguientes*

$$\left(\int_0^{+\infty}\left(\int_0^t f(s)ds\right)^\alpha \frac{dt}{t^{\beta+1}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\leq\frac{\alpha}{\beta}\left(\int_0^{+\infty}(s\,f(s))^\alpha\frac{ds}{s^{\beta+1}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \tag{6}$$

$$\left(\int_0^{+\infty}\left(\int_t^{+\infty} f(s)\frac{ds}{s}\right)^\alpha \frac{dt}{t^{1-\beta}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\leq\frac{\alpha}{\beta}\left(\int_0^{+\infty}f(s)^\alpha\frac{ds}{s^{1-\beta}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{7}$$

Prueba. Para la desigualdad (6), tenemos al elevar a la potencia α-ésima:

$$\int_0^{+\infty}\left(\int_0^t f(s)ds\right)^\alpha\frac{dt}{t^{\beta+1}}=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^t f(s)t^{-\frac{\beta}{\alpha}}ds\right)^\alpha t^{-1}dt, \tag{8}$$

y nos interesamos en la integral entre paréntesis, que reescribimos de la siguiente manera

$$\left(\int_0^t f(s)t^{-\frac{\beta}{\alpha}}ds\right)^\alpha = \left(\frac{\displaystyle\int_0^t f(s)ds}{\displaystyle\frac{\beta}{\alpha}\int_0^t s^{\frac{\beta}{\alpha}-1}ds}\right)^\alpha=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\alpha\left(\frac{\displaystyle\int_0^t\left[f(s)\;s^{-\frac{\beta}{\alpha}+1}\right]s^{\frac{\beta}{\alpha}-1}ds}{\displaystyle\int_0^t s^{\frac{\beta}{\alpha}-1}ds}\right)^\alpha.$$

Ahora aplicamos a esta última expresión la desigualdad de Jensen (ver el Teorema 4.3.4 del Volumen 1) con respecto a la medida $\frac{s^{\frac{\beta}{\alpha}-1}ds}{\int_0^t s^{\frac{\beta}{\alpha}-1}ds}$ -notar que la medida del intervalo $[0,t]$ con respecto a esta medida es exactamente 1- para obtener

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\alpha\left(\frac{\displaystyle\int_0^t\left[f(s)\;s^{-\frac{\beta}{\alpha}+1}\right]s^{\frac{\beta}{\alpha}-1}ds}{\displaystyle\int_0^t s^{\frac{\beta}{\alpha}-1}ds}\right)^\alpha\leq\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\alpha\int_0^t\left(f(s)s^{-\frac{\beta}{\alpha}+1}\right)^\alpha\frac{s^{\frac{\beta}{\alpha}-1}ds}{\displaystyle\int_0^t s^{\frac{\beta}{\alpha}-1}ds},$$

de donde se tiene

$$\left(\int_0^t f(s)t^{-\frac{\beta}{\alpha}}ds\right)^\alpha\leq\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\alpha-1}\int_0^t\left(f(s)s^{-\frac{\beta}{\alpha}+1}\right)^\alpha s^{\frac{\beta}{\alpha}-1}ds\;t^{-\frac{\beta}{\alpha}}.$$

A partir de esta estimación reconstruimos la expresión (8) para obtener la desigualdad

$$\int_0^{+\infty}\left(\int_0^t f(s)t^{-\frac{\beta}{\alpha}}ds\right)^\alpha t^{-1}dt\leq\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\alpha-1}\int_0^{+\infty}\int_0^t\left(f(s)s^{-\frac{\beta}{\alpha}+1}\right)^\alpha s^{\frac{\beta}{\alpha}-1}ds\;\frac{dt}{t^{\frac{\beta}{\alpha}+1}}$$

$$\leq\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\alpha-1}\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}(sf(s))^\alpha s^{-\beta-1}s^{\frac{\beta}{\alpha}}\mathbb{1}_{\{s<t\}}(s)ds\right)\frac{dt}{t^{\frac{\beta}{\alpha}+1}}.$$

Finalmente, aplicando el teorema de Fubini se tiene

$$\int_0^{+\infty}\left(\int_0^t f(s)ds\right)^\alpha\frac{dt}{t^{\beta+1}}\leq\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\alpha\int_0^{+\infty}(sf(s))^\alpha s^{-\beta-1}ds,$$

lo que termina la demostración de la primera desigualdad al extraer la raíz α-ésima de esta expresión.

La segunda desigualdad (7) sigue exactamente los mismos argumentos anteriores de manera que los detalles son dejados al lector. ■

Es importante notar que para poder aplicar la desigualdad de Jensen son necesarias las dos condiciones $\alpha \geq 1$ y $\beta > 0$.

Teorema 2 (Caracterización equivalente) *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido. Sean p, q, r tres índices reales tales que*

$$0 < r < p < +\infty \ \ y \ \ r \leq q \leq +\infty.$$

Para toda función f que pertenece al espacio de Lorentz $L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ tenemos las desigualdades

$$\|f\|_{L^{p,q}} \leq |||f|||_{p,q,r} \leq \left(\frac{p}{p-r}\right)^{\frac{1}{r}} \|f\|_{L^{p,q}}. \tag{9}$$

Es decir que las cantidades $\|\cdot\|_{L^{p,q}}$ y $|||\cdot|||_{p,q,r}$ definen espacios equivalentes.

Demostración. La primera estimación es inmediata gracias a la Proposición 2 en donde se tiene el control puntual $f^*(t) \leq f_r^{**}(t)$: en efecto, a partir de esta desigualdad, y utilizando las propiedades de monotonía de las integrales consideradas, es suficiente reconstruir las funcionales para obtener, en el caso $0 < r < p < +\infty$ y $r \leq q < +\infty$:

$$\|f\|_{L^{p,q}} = \left(\int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{1}{p}} f_r^{**}(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} = |||f|||_{p,q,r}.$$

En el caso $0 < r < p < +\infty$ y $q = +\infty$ tenemos $\|f\|_{L^{p,\infty}} = \sup\limits_{t>0} \left\{t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right\} \leq \sup\limits_{t>0} \left\{t^{\frac{1}{p}} f_r^{**}(t)\right\} = |||f|||_{p,\infty,r}$. Para la segunda parte de (9), en el caso $0 < r < p < +\infty$ y $r \leq q < +\infty$, utilizamos la definición de la función maximal f_r^{**} dada en la expresión (1) para escribir

$$\int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{1}{p}} f_r^{**}(t)\right)^q \frac{dt}{t} \ \ = \ \ \int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)^r ds\right)^{\frac{1}{r}}\right)^q \frac{dt}{t} = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^t f^*(s)^r ds\right)^{\frac{q}{r}} \frac{dt}{t^{\frac{q}{r} - \frac{q}{p} + 1}}.$$

En este punto aplicamos ahora la desigualdad de Hardy (6), con $\alpha = \frac{q}{r}$ y $\beta = \frac{q}{r} - \frac{q}{p}$, para obtener

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_0^t f^*(s)^r ds\right)^{\frac{q}{r}} \frac{dt}{t^{\frac{q}{r} - \frac{q}{p} + 1}} \leq \left(\frac{p}{p-r}\right)^{\frac{q}{r}} \int_0^{+\infty} \left(s^{\frac{1}{p}} f^*(s)\right)^q \frac{ds}{s},$$

es decir que se tiene

$$|||f|||_{p,q,r}^q = \int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{1}{p}} f_r^{**}(t)\right)^q \frac{dt}{t} \ \ \leq \ \ \left(\frac{p}{p-r}\right)^{\frac{q}{r}} \int_0^{+\infty} \left(s^{\frac{1}{p}} f^*(s)\right)^q \frac{ds}{s} \leq \left(\frac{p}{p-r}\right)^{\frac{q}{r}} \|f\|_{L^{p,q}}^q,$$

y al extraer la raíz q-ésima de estas estimaciones se obtiene la cadena de desigualdades (9).

En el caso cuando $0 < r < p < +\infty$ y $r < q = +\infty$ escribimos

$$\begin{aligned}
|||f|||_{p,\infty,r} &= \sup_{t>0} \left\{t^{\frac{1}{p}} f_r^{**}(t)\right\} = \sup_{t>0} \left\{t^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)^r ds\right)^{\frac{1}{r}}\right\} = \sup_{t>0} \left\{t^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)^r s^{\frac{r}{p}} s^{-\frac{r}{p}} ds\right)^{\frac{1}{r}}\right\} \\
&\leq \sup_{s>0} \left\{s^{\frac{1}{p}} f^*(s)\right\} \sup_{t>0} \left\{t^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{t}\int_0^t s^{-\frac{r}{p}} ds\right)^{\frac{1}{r}}\right\} \\
&\leq \|f\|_{L^{p,\infty}} \sup_{t>0} \left\{t^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{t}\left(\frac{p}{p-r}\right) t^{1-\frac{r}{p}}\right)^{\frac{1}{r}}\right\} = \left(\frac{p}{p-r}\right)^{\frac{1}{r}} \|f\|_{L^{p,\infty}},
\end{aligned}$$

lo que termina la demostración del teorema. ■

Observación 1 Las condiciones $r < p$ y $r \leq q$ exigidas para obtener la equivalencia de estas funcionales provienen de las desigualdades de Hardy enunciadas en la Proposición 5. Pero esto no es un simple detalle técnico pues en caso de no tener estas relaciones entre los índices p, q y r es posible exhibir contraejemplos que muestran que las funcionales $\|\cdot\|_{L^{p,q}}$ y $|||\cdot|||_{p,q,r}$ no son equivalentes, en efecto, se puede ver sin problema que se tiene $|||\cdot|||_{1,\infty,1} = \|\cdot\|_{L^1}$ y sabemos que el espacio L^1 es muy diferente al espacio $L^{1,\infty}$.

2.1. Distancias en los espacios de Lorentz

Teorema 3 (Distancias en los espacios de Lorentz) *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido. Sean r, p y q tres índices reales tales que se tenga $0 < r < p < +\infty$ y $r \leq q \leq +\infty$. Entonces los espacios de Lorentz $L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ son metrizables con la métrica definida por*

$$d(f, g) = |||f - g|||_{p,q,r}^r.$$

Demostración. Empezamos con el caso cuando $0 < r < p < +\infty$ y $r \leq q < +\infty$. Si $f, g \in L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$, tenemos entonces

$$d(f, g) = |||f - g|||_{p,q,r}^r = \left(\int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{1}{p}}(f - g)_r^{**}(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{r}{q}}.$$

Se tiene sin problema la propiedad de simetría $d(f, g) = d(g, f)$ y la propiedad de separabilidad, $d(f, g) = 0 \iff f = g$, se obtiene por el punto 5) de la Proposición 1, página 3.

Solo queda por verificar entonces la desigualdad triangular para esta distancia, es decir $d(f, g) \leq d(f, h) + d(h, g)$, en donde $f, g, h \in L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$. Para ello escribimos

$$d(f, g)^{\frac{q}{r}} = \int_0^{+\infty} t^{\frac{q}{p}-1} \left[\left((f - h + h - g)_r^{**}\right)^r(t)\right]^{\frac{q}{r}} dt,$$

y aplicamos el Corolario 2, página 6, que nos proporciona la desigualdad puntual

$$\left((f - h + h - g)_r^{**}\right)^r(t) \leq \left((f - h)_r^{**}\right)^r(t) + \left((h - g)_r^{**}\right)^r(t),$$

lo que nos permite escribir $d(f, g)^{\frac{q}{r}} \leq \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{\frac{q}{p}-1} \left[\left((f - h)_r^{**}\right)^r(t) + \left((h - g)_r^{**}\right)^r(t)\right]^{\frac{q}{r}} dt$. Escribiendo la expresión anterior de una forma más adecuada se tiene

$$d(f, g)^{\frac{q}{r}} \leq \int_0^{+\infty} \left[t^{(\frac{q}{p}-1)\frac{r}{q}} \left((f - h)_r^{**}\right)^r(t) + t^{(\frac{q}{p}-1)\frac{r}{q}} \left((h - g)_r^{**}\right)^r(t)\right]^{\frac{q}{r}} dt,$$

si notamos $\varphi(t) = t^{(\frac{q}{p}-1)\frac{r}{q}} \left((f - h)_r^{**}\right)^r(t)$ y $\psi(t) = t^{(\frac{q}{p}-1)\frac{r}{q}} \left((h - g)_r^{**}\right)^r(t)$, tenemos $d(f, g)^{\frac{q}{r}} \leq \displaystyle\int_0^{+\infty} [\varphi(t) + \psi(t)]^{\frac{q}{r}} dt$.

Luego extrayendo la raíz $\frac{r}{q}$-ésima se tiene $d(f, g) \leq \left(\displaystyle\int_0^{+\infty} [\varphi(t) + \psi(t)]^{\frac{q}{r}} dt\right)^{\frac{r}{q}}$, pero dado que $r \leq q$, se tiene $1 \leq \frac{q}{r}$ y entonces podemos aplicar la desigualdad de Minkoswki usual en la integral anterior para obtener

$$d(f, g) \leq \left(\int_0^{+\infty} \varphi(t)^{\frac{q}{r}} dt\right)^{\frac{r}{q}} + \left(\int_0^{+\infty} \psi(t)^{\frac{q}{r}} dt\right)^{\frac{r}{q}}.$$

Volviendo a las definiciones de las funciones auxiliares φ y ψ, obtenemos la estimación:

$$\begin{aligned} d(f, g) &\leq \left(\int_0^{+\infty} \left(t^{(\frac{q}{p}-1)\frac{r}{q}} \left((f - h)_r^{**}\right)^r(t)\right)^{\frac{q}{r}} dt\right)^{\frac{r}{q}} + \left(\int_0^{+\infty} \left(t^{(\frac{q}{p}-1)\frac{r}{q}} \left((h - g)_r^{**}\right)^r(t)\right)^{\frac{q}{r}} dt\right)^{\frac{r}{q}} \\ &\leq \left(\int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{1}{p}}(f - h)_r^{**}(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{r}{q}} + \left(\int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{1}{p}}(h - g)_r^{**}(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{r}{q}} \leq d(f, h) + d(h, g), \end{aligned}$$

de manera que hemos obtenido la desigualdad triangular para esta distancia.

En el caso cuando $0 < r < p < +\infty$ y $r < q = +\infty$, utilizando el Corolario 2 escribimos

$$t^{\frac{r}{p}} \left((f - g)_r^{**}\right)^r(t) \;=\; t^{\frac{r}{p}} \left((f - h + h - g)_r^{**}\right)^r(t) \leq t^{\frac{r}{p}} \left((f - h)_r^{**}\right)^r(t) + t^{\frac{r}{p}} \left((h - g)_r^{**}\right)^r(t),$$

tomando el supremo sobre $t > 0$ y gracias a la definición de la funcional $|||\cdot|||_{p,\infty,r}$ dada en la fórmula (5) obtenemos

$$d(f, g) = |||f - g|||_{p,\infty,r}^r \leq |||f - h|||_{p,\infty,r}^r + |||h - g|||_{p,\infty,r}^r = d(f, h) + d(h, g),$$

y esto termina la demostración del teorema. ■

Observación 2 Este resultado hace que todos los espacios de Lorentz $L^{p,q}$ con $0 < p < +\infty$ y $0 < q \leq +\infty$ son espacios métricos completos.

2.2. Normas en los espacios de Lorentz

Teorema 4 (Normabilidad de los espacios de Lorentz) *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido no atómico. Si los índices p, q que determinan los espacios de Lorentz verifican las condiciones*

1) $1 < p < +\infty$ *y* $1 \leq q \leq +\infty$,

2) $p = q = 1$ *o* $p = q = +\infty$,

entonces los espacios de Lorentz $(L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K}), |||\cdot|||_{p,q})$ son espacios normados.

Demostración. Solo nos interesamos al primer punto pues el segundo corresponde a los espacios de Lebesgue L^1 y L^∞ que ya han sido tratados. Recuérdese que por simplicidad hemos notado $|||\cdot|||_{p,q} = |||\cdot|||_{p,q,1}$, de manera que la función maximal que interviene en esta funcional dada en la Definición 2 es la función $f^{**} = f_1^{**}$. Con esta observación en mente, debemos pues verificar los tres axiomas de norma para la funcional $|||\cdot|||_{p,q}$. La *separabilidad* de esta funcional, es decir $|||f|||_{p,q} = 0 \iff f = 0$ en μ-casi todas partes, se obtiene por el punto 5) de la Proposición 1, página 3, mientras que la *homogeneidad*, es decir $|||\lambda f|||_{p,q} = |\lambda|\,|||f|||_{p,q}$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}^*$, se deduce sin problema del punto 2) de la misma Proposición 1. Basta verificar que la desigualdad triangular es válida para la funcional $|||\cdot|||_{p,q}$. Entonces, si $f, g : X \longrightarrow \mathbb{K}$ son dos funciones medibles que pertenecen al espacio de Lorentz $L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$, debemos demostrar la mayoración $|||f+g|||_{p,q} \leq |||f|||_{p,q} + |||f|||_{p,q}$. Para ello utilizamos el Corolario 1 de la página 6, que nos proporciona la desigualdad puntual $(f+g)^{**}(t) \leq f^{**}(t) + g^{**}(t)$. Nótese bien que esta estimación se tiene bajo las condiciones $1 < p < +\infty$ y $1 \leq q \leq +\infty$, lo que corresponde con las condiciones exigidas en el primer punto del teorema. Ahora, a partir de esta estimación reconstruimos la funcional $|||\cdot|||_{p,q}$ y podemos escribir, en el caso cuando $1 < q < +\infty$:

$$
\begin{aligned}
|||f+g|||_{p,q} &= \left(\int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{1}{p}}(f+g)^{**}(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{1}{p}}\left(f^{**}(t) + g^{**}(t)\right)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left(\int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} f^{**}(t) + t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} g^{**}(t)\right)^q dt\right)^{\frac{1}{q}},
\end{aligned}
$$

y como se tiene $1 < q < +\infty$, podemos aplicar la desigualdad de Minkowski usual en la integral anterior para obtener $|||f+g|||_{p,q} \leq \left(\int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} f^{**}(t)\right)^q dt\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} g^{**}(t)\right)^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \leq |||f|||_{p,q} + |||g|||_{p,q}$ lo que demuestra la desigualdad triangular cuando $1 < q < +\infty$.

Cuando $q = +\infty$, utlizamos la misma estimación puntual y la subaditividad del supremo para escribir

$$
|||f+g|||_{p,\infty} = \sup_{t>0}\left\{t^{\frac{1}{p}}(f+g)^{**}(t)\right\} \leq \sup_{t>0}\left\{t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t)\right\} + \sup_{t>0}\left\{t^{\frac{1}{p}} g^{**}(t)\right\} \leq |||f|||_{p,\infty} + |||g|||_{p,\infty},
$$

lo que termina la demostración del teorema. ■

Corolario 3 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido no atómico. Si los índices p, q son tales que*

1) $1 < p < +\infty$ *y* $1 \leq q \leq +\infty$,

2) $p = q = 1$ *o* $p = q = +\infty$,

entonces los espacios de Lorentz $(L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K}), |||\cdot|||_{p,q})$ son espacios de Banach.

2.3. Problemas de normabilidad

Teorema 5 (Espacios de Lorentz no normables) *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido no atómico. Los espacios de Lorentz $L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ no son normables para los siguientes valores de los índices p y q:*

1) $0 < p < 1$ *y* $1 \leq q \leq +\infty$,

2) $0 < p < +\infty$ *y* $0 < q < 1$,

3) $p = 1$ *y* $1 < q \leq +\infty$.

Demostración. La idea general de la demostración es construir una sucesión de funciones $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tales que

$$\frac{\left\|\sum_{j=1}^{n} f_j\right\|_{L^{p,q}}}{\sum_{j=1}^{n} \|f_j\|_{L^{p,q}}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty, \tag{10}$$

y esto muestra que no existe ninguna norma equivalente a $\|\cdot\|_{L^{p,q}}$ pues nunca se obtendrá la desigualdad triangular. Para verificarlo vamos a exhibir contra ejemplos adaptados a cada uno de los casos considerados en el Teorema 5.

Es importante precisar que, puesto que estos espacios son invariantes por reordenamiento decreciente y dado que la medida es no atómica, es suficiente estudiar la no normabilidad cuando $X = [0, 1]$ ó $X = [0, +\infty[$ (dotado de la medida de Lebesgue). En efecto, las propiedades estudiadas aquí de las funciones definidas originalmente sobre un espacio medido arbitrario $(X, \mathscr{A}, \mu)$ pueden transportarse al dominio de definición de la función de distribución y es así que se obtienen uno de estos dos casos anteriores según si la medida del conjunto X es finita o no.

Con estas observaciones preliminares pasemos ahora sí a la verificación del teorema.

1) Caso $0 < p < +\infty$ y $0 < q < 1$. Vamos a considerar la sucesión de funciones $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ definida sobre $[0, +\infty[$ por

$$f_j(x) = \begin{cases} \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}} 2^j & \text{si} \quad 0 < x < 2^{-jp}, \\ 0 & \text{sino.} \end{cases}$$

Vemos fácilmente que $\|f_j\|_{L^{p,q}} = 1$ para cada $j = 1, 2, ...$, en efecto $\|f_j\|_{L^{p,q}}^q = \left(\frac{q}{p}\right) 2^{jq} \int_0^{+\infty} t^{\frac{q}{p}-1} \mathbb{1}_{[0,2^{-jp}[}(t)dt = 1$. De esta manera obtenemos que el denominador de la expresión (10) es igual a n.

Ocupémonos ahora del numerador, es decir de la expresión $\left\|\sum_{j=1}^{n} f_j\right\|_{L^{p,q}}$. Para ello notamos $\psi_n(x) = \sum_{j=1}^{n} f_j$ y calculamos la función de reordenamiento decreciente $\psi_n^*(t)$. El lector puede darse cuenta sin mucho esfuerzo (al tratarse de funciones indicatrices de conjuntos) que se tiene la siguiente expresión

$$\psi_n^*(t) = \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}} \left[\mathbb{1}_{[0,2^{-np}[}(t) \left(\sum_{k=1}^{n} 2^k\right) + \sum_{j=1}^{n-1} \mathbb{1}_{[2^{-(j+1)p},2^{-jp}[}(t) \left(\sum_{k=1}^{j} 2^k\right)\right],$$

de donde se deduce el siguiente cálculo

$$\|\psi_n\|_{L^{p,q}}^q = \left(\frac{q}{p}\right) \int_0^{2^{-np}} t^{\frac{q}{p}-1} \left(\sum_{k=1}^{n} 2^k\right)^q dt + \left(\frac{q}{p}\right) \sum_{j=1}^{n-1} \int_{2^{-(j+1)p}}^{2^{-jp}} t^{\frac{q}{p}-1} \left(\sum_{k=1}^{j} 2^k\right)^q dt,$$

es decir

$$\begin{aligned}\|\psi_n\|^q_{L^{p,q}} &= 2^{-nq}\left(\sum_{k=1}^n 2^k\right)^q + \sum_{j=1}^{n-1} 2^{-jq}(1-2^{-q})\left(\sum_{k=1}^j 2^k\right)^q = \left(\sum_{k=1}^n 2^{-(n-k)}\right)^q + (1-2^{-q})\sum_{j=1}^{n-1}\left(\sum_{k=1}^j 2^{-(j-k)}\right)^q\\ &= 2^q\left(1-2^{-n}\right)^q + (1-2^{-q})\sum_{j=1}^{n-1} 2^q\left(1-2^{-j}\right)^q.\end{aligned}$$

Puesto que $0<q<1$ y que $(1-2^{-j})<1$ podemos escribir $(1-2^{-j})<(1-2^{-j})^q$ y obtener

$$\|\psi_n\|^q_{L^{p,q}} \geq 2^q\left(1-2^{-n}\right)^q + (2^q-1)\sum_{j=1}^{n-1}\left(1-2^{-j}\right) \geq (2^q-1)\left(n-2+2^{-n+1}\right),$$

y se tiene entonces la minoración $\|\psi_n\|_{L^{p,q}} \geq (2^q-1)^{\frac{1}{q}}(n-2+2^{-n+1})^{\frac{1}{q}}$. De esta manera, volviendo a la expresión (10) se obtiene, dado que $0<q<1$:

$$\frac{\left\|\sum_{j=1}^n f_j\right\|_{L^{p,q}}}{\sum_{j=1}^n \|f_j\|_{L^{p,q}}} \geq \frac{(n-2+2^{-n+1})^{\frac{1}{q}}}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

de donde se deduce que en este caso los espacios de Lorentz $L^{p,q}$ no son normables.

2) Caso $0<p<1$ y $1\leq q\leq+\infty$. Supongamos primero que $q<+\infty$ y fijemos un parámetro real ε tal que $1<\varepsilon<\frac{1}{p}$. Definimos entonces las funciones f_j sobre $[0,+\infty[$ por

$$f_j(x) = \begin{cases} \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}} j^{-\frac{1}{p}+\varepsilon} & \text{si} \quad j-1<x<j,\\ 0 & \text{sino.}\end{cases}$$

Observemos que, para todo $j=1,2,...$, se tiene $\|f_j\|_{L^{p,q}}\leq 1$ pues $1<\varepsilon<\frac{1}{p}$. En efecto:

$$\|f_j\|^q_{L^{p,q}} = \left(\frac{q}{p}\right)\int_0^{+\infty} t^{\frac{q}{p}-1}\mathbb{1}_{[0,1[}(t) j^{-\frac{q}{p}+q\varepsilon}dt = j^{-\frac{q}{p}+q\varepsilon},$$

es decir $\|f_j\|_{L^{p,q}} = \frac{1}{j^{\frac{1}{p}-\varepsilon}} \leq 1$. Pasemos ahora al cálculo de $\left\|\sum_{j=1}^n f_j\right\|_{L^{p,q}}$. De la misma manera que anteriormente, escribimos $\psi_n(x)=\sum_{j=1}^n f_j(x) = \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}}\sum_{j=1}^n j^{-\frac{1}{p}+\varepsilon}\mathbb{1}_{[j-1,j[}(x)$. Puesto que estamos trabajando con funciones indicatrices de conjuntos no es difícil ver que se tienen la identidad $\psi_n^*=\psi_n$, por lo tanto

$$\|\psi_n\|^q_{L^{p,q}} = \left(\frac{q}{p}\right)\int_0^{+\infty} t^{\frac{q}{p}-1}\left(\sum_{j=1}^n j^{-\frac{1}{p}+\varepsilon}\mathbb{1}_{[j-1,j[}(t)\right)^q dt = \sum_{j=1}^n j^{q\varepsilon}\left(1-\left(\frac{j-1}{j}\right)^{\frac{q}{p}}\right).$$

Ahora, como $0<p<1$ y $1\leq q+\infty$ tenemos $(\frac{j-1}{j})^{\frac{q}{p}} \leq \frac{j-1}{j}$, es decir $\|\psi_n\|_{L^{p,q}} \geq \left(\sum_{j=1}^n j^{q\varepsilon-1}\right)^{\frac{1}{q}}$, y haciendo una comparación suma-integral obtenemos $\|\psi_n\|_{L^{p,q}} \geq Cn^{\varepsilon}$. Por lo tanto, regresando a la expresión (10) podemos escribir

$$\frac{\left\|\sum_{j=1}^n f_j\right\|_{L^{p,q}}}{\sum_{j=1}^n \|f_j\|_{L^{p,q}}} \geq n^{\varepsilon-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

pues habíamos fijado $1<\varepsilon<\frac{1}{p}$, de donde se obtiene que en este caso los espacios de Lorentz no son normables.

Estudiemos ahora la situación cuando $0<p<1$ y $q=+\infty$. Para ello consideramos esencialmente las mismas funciones:
$$f_j(x)=\begin{cases} j^{-\frac{1}{p}+\varepsilon} & \text{si} \quad j-1<x<j,\\ 0 & \text{sino.}\end{cases}$$
Tenemos entonces para todo $j=1,2,...$ la estimación $\|f_j\|_{L^{p,\infty}}=\sup\limits_{0<t<1} t^{\frac{1}{p}}f_j^*(t)\leq 1$. Sin embargo se tiene
$$\left\|\sum_{j=1}^n f_j\right\|_{L^{p,\infty}}=\sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{[j-1,j[}(t)j^{-\frac{1}{p}+\varepsilon}\right)=n^\varepsilon,$$
por lo tanto, regresando con estas estimaciones a la expresión (10) obtenemos $\dfrac{\left\|\sum_{j=1}^n f_j\right\|_{L^{p,\infty}}}{\sum_{j=1}^n\|f_j\|_{L^{p,\infty}}}=n^{\varepsilon-1}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$, y entonces el espacio de Lorentz $L^{p,\infty}$ no es normable cuando $0<p<1$.

3) Caso $p=1$ y $1<q\leq+\infty$. Empecemos con el caso $p=1$ y $q=+\infty$. Fijemos n un entero y definamos sobre $[0,1[$ la función
$$f_\sigma(x)=\sum_{j=1}^n\frac{n}{\sigma(j)}\mathbb{1}_{[(j-1)/n,j/n[}(x), \tag{11}$$
en donde $\sigma(j)$ es una permutación del conjunto $\{1,2,...,n\}$. Notaremos por S_n el conjunto de todas las permutaciones de este conjunto y por id la identidad (es decir que no modifica el orden del conjunto), recordamos además que el cardinal de S_n es $n!$.

Verifiquemos que se tiene $\|f_\sigma\|_{L^{1,\infty}}=1$. Obsérvese que la función de reordenamiento decreciente f_σ^* es la misma para toda permutación σ pues por la expresión (11) se tiene una suma de funciones indicatrices de conjuntos disjuntos que tienen todos la misma medida, por lo tanto es suficiente tratar el caso de f_{id} para calcular $\|f_\sigma\|_{L^{1,\infty}}$. Entonces, por construcción la función f_{id} es decreciente y tenemos por lo tanto $f_{id}^*=f_{id}$. Es decir $f_{id}^*(t)=\sum_{j=1}^n\frac{n}{j}\mathbb{1}_{[(j-1)/n,j/n[}(t)$ y se tiene $\|f_{id}\|_{L^{1,\infty}}=\sup\limits_{t>0} t\,f_{id}^*(t)=1$. De esta forma vemos que se tiene para toda permutación $\sigma\in S_n$ la identidad $\|f_\sigma\|_{L^{1,\infty}}$ y entonces obtenemos $\sum_{\sigma\in S_n}\|f_\sigma\|_{L^{1,\infty}}=n!$.

Definimos ahora, para todo $n\geq 1$, la función $\psi_n=\sum\limits_{\sigma\in S_n} f_\sigma$ y pasemos al cálculo de $\|\psi_n\|_{L^{1,\infty}}=\left\|\sum\limits_{\sigma\in S_n} f_\sigma\right\|_{L^{1,\infty}}$. Vemos en particular que, por definición de las funciones f_σ, se tiene la identidad
$$\psi_n(x)=\sum_{\sigma\in S_n}\left(\sum_{j=1}^n\frac{n}{\sigma(j)}\mathbb{1}_{[(j-1)/n,j/n[}(x)\right)=\left(n!\sum_{j=1}^n\frac{1}{j}\right)\mathbb{1}_{[0,1[}(x),$$
por lo tanto, se obtiene sin ninguna dificultad que $\|\psi_n\|_{L^{1,\infty}}=\left(n!\sum_{j=1}^n\frac{1}{j}\right)$. Para terminar nuestra construcción, volvemos a la expresión (10) y obtenemos
$$\frac{\left\|\sum_{\sigma\in S_n} f_\sigma\right\|_{L^{1,\infty}}}{\sum_{\sigma\in S_n}\|f_\sigma\|_{L^{1,\infty}}}=\frac{n!\displaystyle\sum_{j=1}^n\frac{1}{j}}{n!}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty,$$
lo que muestra que en el caso $p=1$ y $q=+\infty$, los espacios de Lorentz $L^{1,\infty}$ no son normables.

Sigamos con el caso $p=1$ y $1<q<+\infty$. Sea n un entero fijo y definamos, para $1\leq j\leq n$, las funciones siguientes sobre $[0,+\infty[$:
$$f_j(x)=\sum_{i=1}^n\frac{n}{1+[(i+j)]mod(n)}\mathbb{1}_{[(i-1)/n,i/n[}(x).$$

Observemos para empezar que para todo $1 \leq j \leq n$ se tiene la igualdad $f_j^*(t) = f_1^*(t)$; en efecto, como para la función definida en (11), las funciones f_j se deducen a partir de f_1 mediante un reordenamiento especial dado por la función $mod(n)$ y esto nos permite concentrarnos en calcular únicamente la cantidad $\|f_1\|_{L^{1,q}}$. Así se obtiene

$$\|f_1\|_{L^{1,q}}^q = \int_0^{+\infty} t^{q-1} f_1^{*\,q}(t)dt = \int_0^{+\infty} t^{q-1} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{n}{i}\right)^q \mathbb{1}_{](i-1)/n, i/n[}(t)dt = \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{n}\left(1 - \left(\frac{i-1}{i}\right)^q\right).$$

Notemos que tenemos la estimación $\frac{1}{q}\sum_{i=1}^{n}\left(1-\left(\frac{i-1}{i}\right)^q\right) \leq \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$, y para convercerse de ello el lector puede estudiar la función $g(x) = qx^{q-1} + (x-1)^q - x^q$ y verificar que esta función auxiliar es siempre positiva. Obtenemos entonces la mayoración $\|f_1\|_{L^{1,q}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\right)^{\frac{1}{q}}$, es decir:

$$\sum_{j=1}^{n} \|f_j\|_{L^{1,q}} \leq n\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{12}$$

Pasemos ahora a la segunda parte que nos interesa para la construcción de nuestro contra ejemplo. Puesto que se tiene $\sum_{j=1}^{n} f_j(x) = n\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$, escribimos

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} f_j\right\|_{L^{1,q}} = \left(\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{q}} n\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} \tag{13}$$

Juntando las fórmulas (12) y (13) tenemos $\dfrac{\left\|\sum_{j=1}^{n} f_j\right\|_{L^{1,q}}}{\sum_{j=1}^{n}\|f_j\|_{L^{1,q}}} \geq \dfrac{\left(\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{q}} n\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}}{n\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\right)^{\frac{1}{q}}} = \left(\dfrac{1}{q}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\right)^{1-\frac{1}{q}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$

$\blacksquare$

*

En el siguiente cuadro resumimos el estudio de la normabilidad de los espacios de Lorentz $L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$, donde el espacio medido $(X, \mathscr{A}, \mu)$ es σ-finito y no atómico.

	$0 < p < 1$	$p = 1$	$1 < p < +\infty$	$p = +\infty$
$0 < q < 1$	NO	NO	NO	no definido
$q = 1$	NO	SI: $L^{1,1} = L^1$	SI	no definido
$1 < q < +\infty$	NO	NO	SI	no definido
$q = +\infty$	NO	NO	SI	SI: $L^{\infty,\infty} = L^\infty$

Figura 2: Normabilidad de los espacios de Lorentz $L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$.

3. Algunas generalizaciones

3.1. Desigualdades de Hölder

Teorema 6 (Desigualdad de Hölder) *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido y sean $0 < p, p_1, p_2 < +\infty$ y $0 < q, q_1, q_2 \leq +\infty$ reales positivos tales que $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$ y $\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}$. Si $f, g : X \longrightarrow \mathbb{K}$ dos fuciones medibles que pertenecen a los espacios de Lorentz $L^{p_1,q_1}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ y $L^{p_2,q_2}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ respectivamente, entonces el producto fg pertenece al espacio de Lorentz $L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ y se tiene la desigualdad*

$$\|fg\|_{L^{p,q}} \leq 2^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^{p_1,q_1}} \|g\|_{L^{p_2,q_2}} \tag{14}$$

Demostración. Empecemos con el caso cuando $0 < q, q_1, q_2 < +\infty$. Escribimos entonces

$$\|fg\|_{L^{p,q}}^q = \int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{1}{p}} (fg)^*(t) \right)^q \frac{dt}{t},$$

utilizamos ahora la desigualdad puntual $(fg)^*(t/2 + t/2) \leq f^*(t/2) g^*(t/2)$ para obtener

$$\|fg\|_{L^{p,q}}^q \leq 2^{\frac{q}{p}} \int_0^{+\infty} \left((t/2)^{\frac{1}{p}} f^*(t/2) g^*(t/2) \right)^q \frac{dt}{t},$$

dado que se tiene la identidad $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$, escribimos $\|fg\|_{L^{p,q}}^q \leq 2^{\frac{q}{p}} \int_0^{+\infty} \left((t/2)^{\frac{1}{p_1}} f^*(t/2) (t/2)^{\frac{1}{p_2}} g^*(t/2) \right)^q \frac{dt}{t}$. Con un cambio de variable reescribimos la estimación anterior de esta manera

$$\|fg\|_{L^{p,q}}^q \leq 2^{\frac{q}{p}} \int_0^{+\infty} s^{\frac{q}{p_1}} f^{*q}(s)\, s^{\frac{q}{p_2}} g^{*q}(s) \frac{ds}{s}. \tag{15}$$

Sea ahora $\alpha = \frac{q_1}{q}$ y $\beta = \frac{q_2}{q}$, por la relación entre los índices q, q_1 y q_2 tenemos entonces $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ y aplicamos en la integral aquí arriba la desigualdad de Hölder con respecto a la medida $d\mu(s) = \frac{ds}{s}$ para obtener

$$\|fg\|_{L^{p,q}}^q \leq 2^{\frac{q}{p}} \left(\int_0^{+\infty} s^{\frac{q}{p_1}\alpha} f^{*q\alpha}(s) \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\int_0^{+\infty} s^{\frac{q}{p_2}\beta} g^{*q\beta}(s) \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{\beta}},$$

de manera que reemplazando los valores de α y β tenemos

$$\|fg\|_{L^{p,q}}^q \leq 2^{\frac{q}{p}} \left(\int_0^{+\infty} s^{\frac{q_1}{p_1}} f^{*q_1}(s) \frac{ds}{s} \right)^{\frac{q}{q_1}} \left(\int_0^{+\infty} s^{\frac{q_2}{p_2}} g^{*q_2}(s) \frac{ds}{s} \right)^{\frac{q}{q_2}},$$

en este punto, basta extraer la raíz q-ésima de esta estimación para obtener

$$\|fg\|_{L^{p,q}} \leq 2^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{+\infty} s^{\frac{q_1}{p_1}} f^{*q_1}(s) \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{q_1}} \left(\int_0^{+\infty} s^{\frac{q_2}{p_2}} g^{*q_2}(s) \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{q_2}} \leq 2^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^{p_1,q_1}} \|g\|_{L^{p_2,q_2}},$$

que es el resultado deseado cuando $0 < q, q_1, q_2 < +\infty$.

Estudiemos ahora el caso cuando $q_1 = +\infty$ o $q_2 = +\infty$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $q_2 = +\infty$, y en ese caso tenemos $q = q_1$. Volviendo a la desigualdad (15) escribimos

$$\|fg\|_{L^{p,q}}^q \leq 2^{\frac{q}{p}} \int_0^{+\infty} s^{\frac{q}{p_1}} f^{*q}(s)\, s^{\frac{q}{p_2}} g^{*q}(s) \frac{ds}{s} \leq 2^{\frac{q}{p}} \sup_{s>0} \left\{ s^{\frac{1}{p_2}} g^*(s) \right\}^q \int_0^{+\infty} s^{\frac{q}{p_1}} f^{*q}(s) \frac{ds}{s},$$

de manera que, con la definición de los espacios $L^{p,\infty}$ que se basa en la función de reordenamiento decreciente, y extrayendo la raíz q-ésima en la expresión anterior tenemos la desigualdad buscada:

$$\|fg\|_{L^{p,q}} \leq 2^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^{p_1,q}} \|g\|_{L^{p_2,\infty}}.$$

El último caso corresponde cuando $q = q_1 = q_2 = +\infty$ y si bien este caso ha sido ya tratado utilizando la definición de los espacios de Lorentz que utiliza la función de distribución, ahora vamos a dar una demostración diferente utilizando la función de reordenamiento decreciente. Tenemos entonces, con los mismos argumentos anteriores:

$$\begin{aligned}\|fg\|_{L^{p,\infty}} &= \sup_{t>0}\left\{t^{\frac{1}{p}}(fg)^*(t)\right\} \leq 2^{\frac{1}{p}}\sup_{t>0}\left\{(t/2)^{\frac{1}{p_1}}f^*(t/2)\ (t/2)^{\frac{1}{p_1}}g^*(t/2)\right\}\\ &\leq 2^{\frac{1}{p}}\sup_{t>0}\left\{(t/2)^{\frac{1}{p_1}}f^*(t/2)\right\}\ \sup_{t>0}\left\{(t/2)^{\frac{1}{p_1}}g^*(t/2)\right\} \leq 2^{\frac{1}{p}}\|f\|_{L^{p_1,\infty}}\|g\|_{L^{p_2,\infty}}.\end{aligned}$$

El lector comparará esta demostración con un resultado anterior: este es un ejemplo en donde los cálculos se simplifican considerablemente al considerar el punto de vista adecuado. ■

Una aplicación directa de las estimaciones anteriores es la siguiente.

Corolario 4 (Desigualdad de Interpolación en espacios de Lorentz) *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido. Consideremos los parámetros reales siguientes $0 < p, p_1, p_2 < +\infty$ y $0 < q, q_1, q_2 \leq +\infty$. Si f es una función tal que $f \in L^{p_1,q_1}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K}) \cap L^{p_2,q_2}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ entonces la función f pertenece a todos los espacios de Lorentz $L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ intermedios, es decir con $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_1} + \frac{1-\theta}{p_2}$ y $\frac{1}{q} = \frac{\theta}{q_1} + \frac{1-\theta}{q_2}$ en donde $0 < \theta < 1$ es un real, y se tiene la desigualdad*

$$\|f\|_{L^{p,q}} \leq 2^{\frac{1}{p}}\|f\|^{\theta}_{L^{p_1,q_1}}\|f\|^{1-\theta}_{L^{p_2,q_2}}$$

Prueba. Empecemos escribiendo $\|f\|_{L^{p,q}} = \||f|\|_{L^{p,q}} = \||f|^{\theta}|f|^{1-\theta}\|_{L^{p,q}}$ y definamos los parámetros siguientes $\alpha_1 = \frac{p_1}{\theta}$, $\beta_1 = \frac{q_1}{\theta}$ y $\alpha_2 = \frac{p_2}{(1-\theta)}$, $\beta_2 = \frac{q_1}{(1-\theta)}$. Notamos que se tiene $\frac{1}{p} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}$ y $\frac{1}{q} = \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2}$ y entonces podemos aplicar las desigualdades de Hölder (14) para obtener $\|f\|_{L^{p,q}} = \||f|^{\theta}|f|^{1-\theta}\|_{L^{p,q}} \leq 2^{\frac{1}{p}}\||f|^{\theta}\|_{L^{\alpha_1,\beta_1}}\||f|^{1-\theta}\|_{L^{\alpha_2,\beta_2}}$ y podemos entonces escribir

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^{p,q}} &\leq 2^{\frac{1}{p}}\||f|^{\theta}\|_{L^{\alpha_1,\beta_1}}\||f|^{1-\theta}\|_{L^{\alpha_2,\beta_2}} \leq 2^{\frac{1}{p}}\||f|\|^{\theta}_{L^{\theta\alpha_1,\theta\beta_1}}\||f|\|^{1-\theta}_{L^{(1-\theta)\alpha_2,(1-\theta)\beta_2}}\\ &\leq 2^{\frac{1}{p}}\||f|\|^{\theta}_{L^{p_1,q_1}}\||f|\|^{1-\theta}_{L^{p_2,q_2}} = 2^{\frac{1}{p}}\|f\|^{\theta}_{L^{p_1,q_1}}\|f\|^{1-\theta}_{L^{p_2,q_2}},\end{aligned}$$

lo que termina la demostración de estas desigualdades. ■

3.2. Propiedades de densidad

Recordemos que sobre un espacio medido $(X, \mathscr{A}, \mu)$ toda función simple integrable se escribe de la forma $\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\alpha_j\mathbb{1}_{A_j}$ en donde $(\alpha_j)_{0\leq j\leq n}$ son escalares y $(A_j)_{0\leq j\leq n}$ son conjuntos medibles tales que $0 < \mu(A_j) < +\infty$.

Teorema 7 (densidad - funciones simples integrables) *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido en donde la medida μ es no atómica. Entonces, el conjunto formado por todas las funciones simples integrables es denso en el espacio de Lorentz $L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ para $0 < p < +\infty$ y $0 < q < +\infty$.*

Demostración. Para demostrar que el conjunto de funciones simples integrables es denso en el espacio $L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ mostramos que, para toda función arbitraria f de este espacio, es posible encontrar una sucesión de funciones simples $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $\|f - \varphi_j\|_{L^{p,q}} \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Dado que se tiene $\|f\|_{L^{p,q}} = \||f|\|_{L^{p,q}}$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que la función f es a valores reales y positiva y existe por lo tanto una sucesión de funciones simples integrables tales que $0 \leq \varphi_j \leq f$ para todo $j \geq 1$ y $\varphi_j \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} f$ en μ-casi todas partes.

Ahora, puesto que se tiene la mayoración $(f - \varphi_j)(x) \leq f(x) + \varphi_j(x)$, por las propiedades de la función de reordenamiento decreciente obtenemos las desigualdades $(f - \varphi_j)^*(t) \leq f^*(t/2) + \varphi_j^*(t/2) \leq 2f^*(t/2)$, y aplicamos entonces el Teorema usual de convergencia dominada de Lebesgue para obtener

$$\lim_{j\to+\infty}\|f - \varphi_j\|^q_{L^{p,q}} = \lim_{j\to+\infty}\int_0^{+\infty}\left(t^{\frac{1}{p}}(f - \varphi_j)^*(t)\right)^q\frac{dt}{t} = 0,$$

de donde se obtiene el resultado de densidad deseado. ■

Cuando se trabaja sobre un espacio X que posee un poco más de estructura, tenemos el resultado a continuación que nos proporciona un segundo teorema de densidad en los espacios de Lorentz.

Teorema 8 (densidad - funciones continuas de soporte compacto) *Sea X un espacio topológico separado localmente compacto a base numerable y sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido regular. Entonces el espacio de funciones continuas a soporte compacto $\mathcal{C}_c^0(X, \mathbb{K})$ es denso en el espacio de Lorentz $L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ para $0 < p < +\infty$ y $0 < q < +\infty$.*

Demostración. Siguiendo las ideas del Teorema 4.5.2 del Volumen 1, empezamos verificando que el espacio de funciones continuas a soporte compacto es denso (con respecto a la funcional $\|\cdot\|_{L^{p,q}}$) en el espacio de las funciones simples integrables.

Sin pérdida de generalidad podemos considerar el caso de funciones a valores reales, es decir $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, y concentrarnos en una función indicatriz $\mathbb{1}_A$ en donde $0 < \mu(A) < +\infty$. Como el espacio medido $(X, \mathscr{A}, \mu)$ es regular, para todo $\varepsilon > 0$ existe un conjunto cerrado F y un conjunto abierto U tales que $F \subset A \subset U$ y tales que $\mu(U \setminus F) < \varepsilon$ (ver el Teorema 2.4.2 del Volumen 1). Por el lema de Urysohn existe una función continua $\psi : X \longrightarrow [0, 1]$ tal que $\psi(F) = 1$ y $\psi(U^c) = 0$ y por lo tanto $\psi \in \mathcal{C}_c^0(X, \mathbb{R})$. Tenemos entonces $|\mathbb{1}_A(x) - \psi(x)| \leq \mathbb{1}_{U\setminus F}(x)$, de donde se deduce, utilizando las propiedades de la función de reordenamiento decreciente:

$$\|\mathbb{1}_A - \psi\|_{L^{p,q}}^q = \int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{1}{p}}(|\mathbb{1}_A - \psi|)^*(t)\right)^q \frac{dt}{t} \leq \int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{1}{p}}(\mathbb{1}_{U\setminus F})^*(t)\right)^q \frac{dt}{t} \leq \int_0^{\varepsilon} t^{\frac{q}{p}-1} dt = \frac{p}{q}\varepsilon^{\frac{q}{p}}.$$

Obtenemos entonces que las funciones continuas a soporte compacto son densas en el espacio de funciones simples integrables que son a su vez densas en los espacios de Lorentz $L^{p,q}$, de manera que, por la transitividad de la densidad (ver la Proposición 4.5.1 del Volumen 1) se deduce el resultado deseado. ■

Recordemos la noción de *σ-álgebra numerablemente generada*: si $\mathscr{A}$ es una σ-álgebra sobre un conjunto X, diremos que $\mathscr{A}$ es numerablemente engendrada si existe un conjunto de cardinal numerable $\mathcal{K} \in \mathscr{A}$ tal que $\sigma(\mathcal{K}) = \mathscr{A}$.

Teorema 9 (Separabilidad de los espacios de Lorentz) *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido y sean p, q dos reales tales que $0 < p < +\infty$ y $0 < q < +\infty$. Si la medida μ es σ-finita y si la σ-álgebra $\mathscr{A}$ es numerablemente generada, entonces el espacio de Lorentz $L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ es separable.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer considerar $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (para el caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ basta estudiar las partes reales e imaginarias por separado). Sea entonces $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función que pertenece a los espacios de Lorentz $L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ con $0 < p < +\infty$ y $0 < q < +\infty$. Por el Teorema 7 anterior sabemos que para todo $\varepsilon > 0$ existe una función simple integrable $g = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \mathbb{1}_{A_j}$, con $\alpha_j \in \mathbb{R}$ y $\mu(A_j) < +\infty$, tal que se tenga $\|f - g\|_{L^{p,q}} \leq \varepsilon$ y por el Teorema 3, sabemos que la funcional $|||\cdot|||_{p,q,r}^r$ definida con la fórmula (4), página 7, con $0 < r < p$ y $0 < r \leq q$, es una distancia equivalente sobre los espacios de Lorentz $L^{p,q}$, de manera que tenemos $|||f - g|||_{p,q,r}^r \leq C\varepsilon^r$, en donde la constante $C > 0$ proviene de la equivalencia entre las funcionales $\|\cdot\|_{L^{p,q}}$ y $|||\cdot|||_{p,q,r}$. Podemos ahora encontrar sin problema números racionales $(q_j)_{0\leq j\leq n}$ tales que se tenga

$$|||g - \sum_{j=0}^{n} q_j \mathbb{1}_{A_j}|||_{p,q,r}^r = |||\sum_{j=0}^{n} \alpha_j \mathbb{1}_{A_j} - \sum_{j=0}^{n} q_j \mathbb{1}_{A_j}|||_{p,q,r}^r \leq \sum_{j=0}^{n} |\alpha_j - q_j|^r \; |||\mathbb{1}_{A_j}|||_{p,q,r}^r \leq C\varepsilon^r.$$

Finalmente, dado que la σ-álgebra es numerablemente engendrada, existe una familia numerable de conjuntos medibles $\mathcal{D} = (D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tales que para todo $\varepsilon > 0$ y para todo $A \in \mathscr{A}$, existe un conjunto D_{k_0} de esta familia tal que $\mu(A\Delta D_{k_0}) \leq \varepsilon$. Pero, como se tiene $\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{A\Delta B}$, gracias a esta familia numerable $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ podemos escribir $|||\sum_{j=0}^{n} q_j \mathbb{1}_{A_j} - \sum_{j=0}^{n} q_j \mathbb{1}_{D_j}|||_{p,q,r}^r = |||\sum_{j=0}^{n} q_j \mathbb{1}_{A_j\Delta D_j}|||_{p,q,r}^r \leq C\varepsilon^r$. Con todas estas estimaciones vamos a demostrar que el conjunto (numerable) de funciones simples integrables de la forma $\psi = \sum_{j=0}^{n} q_j \mathbb{1}_{D_j}$, en donde q_j es un número racional y los conjuntos D_j pertenecen a la familia numerable $\mathcal{D}$, es denso en los espacios de Lorentz $L^{p,q}$: en efecto, gracias a los cálculos anteriores tenemos entonces

$$|||f - \sum_{j=0}^{n} q_j \mathbb{1}_{D_j}|||_{p,q,r}^r \leq |||f - g|||_{p,q,r}^r + |||g - \sum_{j=0}^{n} q_j \mathbb{1}_{A_j}|||_{p,q,r}^r + |||\sum_{j=0}^{n} q_j \mathbb{1}_{A_j} - \sum_{j=0}^{n} q_j \mathbb{1}_{D_j}|||_{p,q,r}^r \leq 3C\varepsilon^r,$$

y de esta manera hemos demostrado que cuando la σ-álgebra es numerablemente generada, entonces los espacios de Lorentz $L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ son separables. ■

Teorema 10 (Problemas de densidad) *Sea* $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{K})$. *Para todo* $0 < p < +\infty$, *el conjunto de funciones simples integrables no es denso en el espacio de Lorentz* $L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{K})$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Vamos a utilizar un resultado que nos dice que un subconjunto del espacio $L^{p,\infty}$ es denso si y solo si el conjunto de todas las formas lineales continuas que se anulan sobre este subconjunto está reducido al elemento nulo: vamos pues a construir una forma lineal continua que se anula sobre todas las funciones simples integrables y que no es trivial. Consideremos el subconjunto $\mathscr{L}$ del espacio $L^{p,\infty}$ tal que la cantidad $T(f) = \lim\limits_{x\to 0}|x|^{\frac{n}{p}}f(x)$, es finita, es decir $\mathscr{L} = \{f \in L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{R}) : \lim\limits_{x\to 0}|x|^{\frac{n}{p}}f(x) < +\infty\}$. Este conjunto no es vacío pues la función $|x|^{-\frac{n}{p}}$ pertenece al espacio $L^{p,\infty}$ y al subconjunto $\mathscr{L}$. Se verifica sin dificultad que este conjunto $\mathscr{L}$ es un espacio vectorial y además se tiene que todas las funciones simples integrables pertenecen al conjunto $\mathscr{L}$. Observamos también que para toda función simple integrable g se tiene $T(g) = 0$.

Tenemos finalmente que la aplicación T anterior es una forma lineal continua definida sobre el espacio $\mathscr{L}$: en efecto tenemos que si la imagen por T de toda sucesión que pertenece al espacio $\mathscr{L}$ y que es convergente hacia 0 es acotada (lo cual es el caso por definición), entonces la aplicación T es continua. En este punto aplicamos el Teorema de Hahn-Banach que permite *prolongar* la aplicación lineal continua T definida inicialmente sobre el espacio $\mathscr{L}$ a todo el espacio $L^{p,\infty}$. De esta forma hemos construido una forma lineal continua definida sobre todo el espacio de Lorentz $L^{p,\infty}$ que se anula sobre el conjunto de las funciones simples integrables y que no es trivial: se deduce que este conjunto de funciones simples integrables no es denso en el espacio de Lorentz $L^{p,\infty}$. ■

3.3. Convolución en los espacios de Lorentz

De ahora en adalente consideraremos únicamente el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ dotado de su estructura de espacio medido natural. El producto de convolución está entonces dado por la expresión

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy.$$

Indiquemos que esta fórmula es por el momento puramente formal pues no disponemos de suficiente información sobre las funciones f y g para determinar si la función $f * g$ está correctamente definida: es decir que las funciones f y g pueden ser *simpáticas* y a pesar de esto tener $f * g(x) = +\infty$ para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$.

A) Desigualdades de base para funciones simples integrables

Si consideramos f y g dos funciones simples integrables, es decir si[1]

$$f(x) = \sum_{i=0}^{m}\alpha_i \mathbb{1}_{A_i}(x) \quad \text{y} \quad g(x) = \sum_{j=0}^{n}\beta_j \mathbb{1}_{B_j}(x), \tag{16}$$

entonces el producto de convolución $f * g$ está siempre bien definido.

Proposición 6 *Si* $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ *son dos funciones simples integrables, entonces para todo* $t > 0$ *tenemos las desigualdades siguientes*

1) $$(f * g)^{**}(t) \leq C\left(tf^{**}(t)g^{**}(t) + \int_t^{+\infty} f^*(s)g^*(s)ds\right),$$

2) $$(f * g)^{**}(t) \leq C\int_t^{+\infty} f^{**}(s)g^{**}(s)ds.$$

Prueba.

[1]Donde $(\alpha_i)_{0\leq i\leq m}$, $(\beta_j)_{0\leq j\leq n}$ son escalares y $(A_i)_{0\leq i\leq m}$, $(B_j)_{0\leq j\leq n}$ son conjuntos de medida positiva finita.

1) Empezamos con el caso cuando $f = \mathbb{1}_A$ y $g = \mathbb{1}_B$, en donde los conjuntos A y B son de medida finita. Recordemos que en este caso se tiene

$$f^*(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } s \leq \mu(A), \\ 0 & \text{si } s > \mu(A), \end{cases} \qquad f^{**}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \leq \mu(A), \\ \frac{\mu(A)}{t} & \text{si } t > \mu(A), \end{cases} \tag{17}$$

y se tiene exactamente lo mismo para las funciones $g^*(s)$ y $g^{**}(t)$, es decir

$$g^*(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } s \leq \mu(B), \\ 0 & \text{si } s > \mu(B), \end{cases} \qquad g^{**}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \leq \mu(B), \\ \frac{\mu(A)}{t} & \text{si } t > \mu(B). \end{cases} \tag{18}$$

Sin pérdida de generalidad se puede suponer que $\mu(A) \leq \mu(B)$. Tenemos entonces tres casos:

- Si $t > \mu(B)$, entonces tenemos $tf^{**}(t)g^{**}(t) + \displaystyle\int_t^{+\infty} f^*(s)g^*(s)ds = t\frac{\mu(A)}{t}\frac{\mu(B)}{t} = \frac{\mu(A)\mu(B)}{t}$ pero como se tiene, por la identidad $\displaystyle\int_0^{+\infty} (f * g)^*(s)ds = \|f * g\|_{L^1}$, podemos escribir

$$t(f * g)^{**}(t) = \int_0^t (f * g)^*(s)ds \leq \|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1} = \mu(A)\mu(B),$$

  de donde se deduce $(f * g)^{**}(t) \leq \frac{\mu(A)\mu(B)}{t}$, y por lo tanto tenemos

$$(f * g)^{**}(t) \leq tf^{**}(t)g^{**}(t) + \int_t^{+\infty} f^*(s)g^*(s)ds.$$

- Si $\mu(A) \leq t \leq \mu(B)$, se tiene la identidad $tf^{**}(t)g^{**}(t) + \displaystyle\int_t^{+\infty} f^*(s)g^*(s)ds = t\,\frac{\mu(A)}{t} = \mu(A)$. Por otro lado, por el decrecimiento de la función $(f * g)^*$ y utilizando las desigualdades de Young (pues se trata de funciones simples integrables que pertenecen a todos los espacios de Lebesgue y de Lorentz) tenemos la estimación

$$(f * g)^{**}(t) \;=\; \frac{1}{t}\int_0^t (f * g)^*(s)ds \leq (f * g)^*(0)\frac{1}{t}\int_0^t ds = \|f * g\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^\infty} = \mu(A), \tag{19}$$

  de donde se obtiene sin problema $(f * g)^{**}(t) \leq tf^{**}(t)g^{**}(t) + \displaystyle\int_t^{+\infty} f^*(s)g^*(s)ds$.

- Si $t \leq \mu(A)$, tenemos por un lado $tf^{**}(t)g^{**}(t) + \displaystyle\int_t^{+\infty} f^*(s)g^*(s)ds = t + \int_t^{\mu(A)} ds = \mu(A)$ y por otro lado, por la misma cadena de estimaciones dada en la expresión (19), tenemos $(f * g)^{**}(t) \leq \mu(A)$, de donde se obtiene

$$(f * g)^{**}(t) \leq tf^{**}(t)g^{**}(t) + \int_t^{+\infty} f^*(s)g^*(s)ds.$$

Pasemos ahora al caso de funciones simples integrables *positivas*, que se escriben de la forma (16). Reescribimos estas funciones de la forma $f^*(s) = \displaystyle\sum_{i=0}^m f_i^*(s)$, $g^*(s) = \displaystyle\sum_{j=0}^n g_j^*(s)$, y entonces escribimos, por la linealidad de la convolución $f * g(x) = \sum_{i,j} f_i * g_i(x)$ de donde obtenemos, por la sublinealidad de la función maximal

$$(f * g)^{**}(t) = \left(\sum_{i,j} f_i * g_i\right)^{**}(t) \leq \sum_{i,j}(f_i * g_i)^{**}(t),$$

y aplicando las desigualdades obtenidas anteriormente podemos escribir

$$\begin{aligned}(f*g)^{**}(t) &\leq \sum_{i,j}\left(tf_i^{**}(t)g_j^{**}(t)+\int_t^{+\infty} f_i^*(s)g_j^*(s)ds\right)\leq t\sum_{i,j} f_i^{**}(t)g_j^{**}(t)+\int_t^{+\infty}\sum_{i,j} f_i^*(s)g_j^*(s)ds\\ &\leq tf^{**}(t)g^{**}(t)+\int_t^{+\infty} f^*(s)g^*(s)ds,\end{aligned}$$

lo que es el resultado buscado. Finalmente, cuando las funciones simples integrables toman valores negativos, tenemos la descomposición $f=f^+-f^-$, en donde las funciones f^+, f^- son positivas, de manera que tenemos

$$f*g=f^+*g^+-f^+*g^--f^-*g^++f^-*g^-.$$

Dado que se tiene $(f^\pm)^*\leq f^*$, entonces por las propiedades expuestas en la Proposición 1, página 3, se tiene $(f^\pm)^{**}\leq f^{**}$ y por la subaditividad de la función maximal se termina la prueba del punto 1).

2) Esta desigualdad se verifica de manera muy similar. En efecto, si $f=\mathbb{1}_A$ y $g=\mathbb{1}_B$ son funciones indicatrices de conjuntos y si suponemos además $\mu(A)\leq\mu(B)$, entonces:

- si $t>\mu(B)$, podemos escribir $\displaystyle\int_t^{+\infty} f^{**}(s)g^{**}(s)ds=\int_t^{+\infty}\frac{\mu(A)}{s}\frac{\mu(B)}{s}ds=\frac{\mu(A)\mu(B)}{t}$ pero se tiene $\displaystyle t(f*g)^{**}(t)=\int_0^t(f*g)^*(s)ds\leq\|f*g\|_{L^1}\leq\|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}=\mu(A)\mu(B)$ de donde se deduce la mayoración $\displaystyle(f*g)^{**}(t)\leq\int_t^{+\infty} f^{**}(s)g^{**}(s)ds$.
- si $t\leq\mu(B)$, tenemos $\displaystyle\int_t^{+\infty} f^{**}(s)g^{**}(s)ds\geq\int_{\mu(B)}^{+\infty} f^{**}(s)g^{**}(s)ds=\mu(A)$ pero como se tiene la estimación (19), obtenemos sin problema que $\displaystyle(f*g)^{**}(t)\leq\int_t^{+\infty} f^{**}(s)g^{**}(s)ds$. La generalización a las funciones simples integrables generales sigue las mismas etapas explicitadas en el punto anterior. ■

B) Desigualdades de Young-O'Neil en $L^{p,q}$ con $1<p<+\infty$ y $1\leq q<+\infty$

Proposición 7 (Convolución $L^{p,q}\times L^1\hookrightarrow L^{p,\sigma}$) *Si $f\in L^{p,q}(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}or(\mathbb{R}^n),\mu,\mathbb{K})$ con $1<p<+\infty$ y $1\leq q<+\infty$ y si $g\in L^1(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}or(\mathbb{R}^n),\mu,\mathbb{K})$, entonces el producto de convolución $f*g$ pertenece al espacio de Lorentz $L^{p,\sigma}(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}or(\mathbb{R}^n),\mu,\mathbb{K})$ con $1\leq q\leq\sigma<+\infty$ y además se tiene:*

1) las estimaciones puntuales

$$\begin{aligned}(f*g)^{**}(t) &\leq C\left(tf^{**}(t)g^{**}(t)+\int_t^{+\infty} f^*(s)g^*(s)ds\right),\\ (f*g)^{**}(t) &\leq C\int_t^{+\infty} f^{**}(s)g^{**}(s)ds,\end{aligned}$$

2) y la desigualdad

$$\|f*g\|_{L^{p,\sigma}}\leq C(p,q,\sigma)\|f\|_{L^{p,q}}\|g\|_{L^1}.$$

Prueba. Dado que si $q\leq\sigma<+\infty$, se tienen las inclusiones $\|f*g\|_{L^{p,\sigma}}\leq C(p,q,\sigma)\|f*g\|_{L^{p,q}}$, podemos entonces suponer sin pérdida de generalidad que $\sigma=q$ y vamos por lo tanto a estudiar la desigualdad $\|f*g\|_{L^{p,q}}\leq C\|f\|_{L^{p,q}}\|g\|_{L^1}$.

Para demostrar esta mayoración seguiremos las siguientes etapas.

- Empezamos considerando f,g dos funciones simples integrables. Entonces por la Proposición 6, tenemos las dos desigualdades puntuales anteriores, lo que demuestra directamente el punto 1) en el caso de funciones simples integrables. En este marco de trabajo, verifiquemos el punto 2): dado que la función f^* es decreciente y se tiene el control $f^*(t) \leq f^{**}(t)$, escribimos

$$\begin{aligned}(f*g)^{**}(t) &\leq C\left(tf^{**}(t)g^{**}(t)+f^{**}(t)\int_t^{+\infty}g^*(s)ds\right)\leq C\left(f^{**}(t)\int_0^t g^*(s)ds+f^{**}(t)\int_t^{+\infty}g^*(s)ds\right)\\ &\leq Cf^{**}(t)\int_0^{+\infty}g^*(s)ds=Cf^{**}(t)\|g\|_{L^1}.\end{aligned}$$

A partir de esta estimación reconstruimos la funcional $|||\cdot|||_{p,q}$ y por la equivalencia de las funcionales $|||\cdot|||_{p,q}$ y $\|\cdot\|_{L^{p,q}}$ tenemos $\|f*g\|_{L^{p,q}} \leq C(p,q)\|f\|_{L^{p,q}}\|g\|_{L^1}$.

- Consideremos ahora $f \in L^{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{K})$ y fijemos g una función simple integrable.

  Sea φ una función simple integrable que pertenece al espacio de Lorentz $L^{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{K})$. Por un lado tenemos que el producto $\varphi*g$ está bien definido y tenemos la desigualdad $\|\varphi*g\|_{L^{p,q}} \leq C(p,q)\|\varphi\|_{L^{p,q}}\|g\|_{L^1}$. Por otro lado, dado que por el Teorema 7, página 17, el conjunto de funciones simples integrables es denso en el espacio de Lorentz $L^{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{K})$, podemos extender la estimación anterior para obtener la desigualdad $\|f*g\|_{L^{p,q}} \leq C(p,q)\|f\|_{L^{p,q}}\|g\|_{L^1}$, lo que demuestra el punto 2) de la proposición en este caso.

  Para el punto 1), procedemos de la siguiente manera: sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones simples integrables que converge hacia la función f en el sentido de la métrica $|||\cdot|||_{p,q}$. Por la linealidad de la convolución tenemos $f*g=(f-f_n)*g+f_n*g$ y entonces, por la subaditividad de la función maximal, escribimos $(f*g)^{**}(t) \leq \big((f-f_n)*g\big)^{**}(t)+(f_n*g)^{**}(t)$, de donde se obtiene la mayoración puntual

$$(f*g)^{**}(t)-(f_n*g)^{**}(t) \leq \big((f-f_n)*g\big)^{**}(t),$$

  a partir de la cual podemos obtener, reconstruyendo la funcional $|||\cdot|||_{p,q}$ la desigualdad

$$\begin{aligned}\left(\int_0^{+\infty}\left(t^{\frac{1}{p}}\big((f*g)^{**}(t)-(f_n*g)^{**}(t)\big)\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} &\leq \left(\int_0^{+\infty}\left(t^{\frac{1}{p}}\big((f-f_n)*g\big)^{**}(t)\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}\\ &\leq |||(f-f_n)*g|||_{p,q} \leq |||(f-f_n)|||_{p,q}\|g\|_{L^1},\end{aligned}$$

  y esta última cantidad tiende hacia cero cuando $n \to +\infty$. De esta forma, considerando una subsucesión podemos escribir, por el Teorema de convergencia monótona

$$\begin{aligned}(f*g)^{**}(t) &= \lim_{k\to+\infty}(f_{n_k}*g)^{**}(t) \leq \lim_{k\to+\infty} C\left(f_{n_k}^{**}(t)g^{**}(t)+\int_t^{+\infty}f_{n_k}^*(s)g^*(s)ds\right)\\ &\leq C\left(f^{**}(t)g^{**}(t)+\int_t^{+\infty}f^*(s)g^*(s)ds\right),\end{aligned}$$

  lo que nos proporciona la primera desigualdad del punto 1) en el caso cuando $f \in L^{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{K})$ y g es una función simple. La segunda desigualdad se obtiene de exactamente la misma manera, de manera que los detalles son dejados al lector.

- El caso general, es decir cuando $f \in L^{p,q}$ y $g \in L^1$ se estudia de manera muy similar al punto anterior: fijemos esta vez $f \in L^{p,q}$ y sea φ una función simple integrable, tenemos $\|f*\varphi\|_{L^{p,q}} \leq C(p,q)\|f\|_{L^{p,q}}\|\varphi\|_{L^1}$, dado que las funciones simples integrables son densas en los espacios L^1, obtenemos sin problema el punto 2) de la proposición.

  Para la primera desigualdad del primer punto consideramos $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones simples integrables que converge hacia la función g en el sentido de la norma $\|\cdot\|_{L^1}$. Por la linealidad de la convolución y por la subatividad de la función maximal tenemos $(f*g)^{**}(t)-(f*g_n)^{**}(t) \leq \big(f*(g-g_n)\big)^{**}(t)$ y reconstruyendo la funcional $|||\cdot|||_{p,q}$ escribimos

$$\begin{aligned}\left(\int_0^{+\infty}\left(t^{\frac{1}{p}}\big((f*g)^{**}(t)-(f*g_n)^{**}(t)\big)\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} &\leq \left(\int_0^{+\infty}\left(t^{\frac{1}{p}}\big(f*(g-g_n)\big)^{**}(t)\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}\\ &\leq |||f*(g-g_n)|||_{p,q} \leq |||f|||_{p,q}\|g-g_n\|_{L^1},\end{aligned}$$

que es una cantidad que tiende a cero si $n \to +\infty$, y entonces, por los mismos argumentos utilizados anteriormente tenemos

$$
\begin{aligned}
(f*g)^{**}(t) &= \lim_{k\to+\infty}(f*g_{n_k})^{**}(t) \leq \lim_{k\to+\infty} C\left(f^{**}(t)g_{n_k}^{**}(t) + \int_t^{+\infty} f^*(s)g_{n_k}^*(s)ds\right)\\
&\leq C\left(f^{**}(t)g^{**}(t) + \int_t^{+\infty} f^*(s)g^*(s)ds\right).
\end{aligned}
$$

La segunda desigualdad del primer punto se obtiene de formar similar y de esta manera terminamos la prueba de la proposición. ■

Corolario 5 (Convolución $L^{p,q}\times L^1 \hookrightarrow L^{p,\infty}$) *Si $f \in L^{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{K})$ con $1 < p < +\infty$ y $1 \leq q < +\infty$ y si $g \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{K})$, entonces el producto de convolución $f * g$ pertenece al espacio de Lorentz $L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{K})$ y se tiene*

$$\|f*g\|_{L^{p,\infty}} \leq C(p,q,\sigma)\|f\|_{L^{p,q}}\|g\|_{L^1}.$$

La verificación es inmediata y se deduce del resultado anterior pues se tiene la estimación $\|f*g\|_{L^{p,\infty}} \leq \|f*g\|_{L^{p,\sigma}}$ para todo $1 \leq \sigma < +\infty$.

Proposición 8 (Convolución $L^{p_1,q_1}\times L^{p_2,q_2} \hookrightarrow L^{\infty}$) *Sean f, g dos funciones medibles que verifican $f \in L^{p_1,q_1}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{K})$ con $1 < p_1 < +\infty$, $1 \leq q_1 < +\infty$, y $g \in L^{p_2,q_2}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{K})$ con $1 < p_2 < +\infty$, $1 \leq q_2 < +\infty$.*

Si $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1$ y si $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} \geq 1$ entonces se tiene la mayoración

$$\|f*g\|_{L^{\infty}} \leq C(p_1,p_2)\|f\|_{L^{p_1,q_1}}\|g\|_{L^{p_2,q_2}}.$$

Prueba. Empecemos considerandos funciones simples. Tenemos entonces por la segunda desigualdad del primer punto de la Proposición 6:

$$(f*g)^{**}(t) \leq C\left(\int_t^{+\infty} f^{**}(s)g^{**}(s)ds\right),$$

como se tiene $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1$, podemos escribir $(f*g)^{**}(t) \leq C\left(\int_0^{+\infty} s^{\frac{1}{p_1}} f^{**}(s) s^{\frac{1}{p_2}} g^{**}(s)\frac{ds}{s}\right)$ de manera que aplicando la desigualdad de Hölder con $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = 1$ se tiene

$$
\begin{aligned}
(f*g)^{**}(t) &\leq C\left(\int_0^{+\infty}\left(s^{\frac{1}{p_1}}f^{**}(s)\right)^{q_1}\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{q_1}}\left(\int_0^{+\infty}\left(s^{\frac{1}{p_2}}g^{**}(s)\right)^{q_2}\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{q_2}}\\
&\leq C|||f|||_{p_1,q_1}|||g|||_{p_2,q_2} \leq C(p_1,p_2)\|f\|_{L^{p_1,q_1}}\|g\|_{L^{p_2,q_2}},
\end{aligned}
$$

y a partir de esta estimación uniforme, con la Proposición 3, página 5, se obtiene el resultado deseado en el caso de funciones simples integrables. Obtenemos el resultado en el caso general razonando de la misma manera que anteriormente, es decir utilizando el Teorema 7, página 17, de densidad de las funciones simples integrables en los espacios de Lorentz. ■

Teorema 11 (Desigualdades de Young-O'Neil - (I)) *Consideremos* $1 < p_1, p_2 < +\infty$ *y* $1 \leq q_1, q_2 < +\infty$ *cuatro índices reales. Si* $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ *son dos funciones tales que* $f \in L^{p_1,q_1}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{K})$ *y* $g \in L^{p_2,q_2}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{K})$ *y si los índices* p, q *verifican las condiciones*

$$\begin{aligned} \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} > 1 \qquad &y \qquad \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1 + \frac{1}{p}, \\ y \text{ si } \quad q \geq 1 \quad &es \text{ tal que } \quad \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} \geq \frac{1}{q}, \end{aligned} \tag{20}$$

entonces la función $f * g$*, que corresponde con el producto de convolución entre* f *y* g*, pertenece al espacio de Lorentz* $L^{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{K})$ *y se tiene la desigualdad*

$$\|f * g\|_{L^{p,q}} \leq C(p, p_1, p_2) \|f\|_{L^{p_1,q_1}} \|g\|_{L^{p_2,q_2}}. \tag{21}$$

Demostración. Empezamos considerando funciones simples integrables. Escribimos entonces

$$|||f * g|||_{p,q}^q = \int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{1}{p}} (f * g)^{**}(t) \right)^q \frac{dt}{t},$$

y utilizamos la segunda estimación del punto 1) de la Proposición 6 para obtener

$$|||f * g|||_{p,q}^q = \int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{1}{p}} \int_t^{+\infty} f^{**}(s) g^{**}(s) ds \right)^q \frac{dt}{t}.$$

Haciendo el cambio de variable $t = \frac{1}{\sigma}$ y $s = \frac{1}{\rho}$ tenemos

$$|||f * g|||_{p,q}^q = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{\sigma^{\frac{1}{p}}} \int_0^{\sigma} f^{**}\left(\frac{1}{\rho}\right) g^{**}\left(\frac{1}{\rho}\right) \frac{d\rho}{\rho^2} \right)^q \frac{d\sigma}{\sigma} = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{\sigma} f^{**}\left(\frac{1}{\rho}\right) g^{**}\left(\frac{1}{\rho}\right) \frac{d\rho}{\rho^2} \right)^q \frac{d\sigma}{\sigma^{\frac{q}{p}+1}},$$

de manera que aplicando las desigualdades de Hardy dadas en la Proposición 5, página 8, con $\alpha = q \geq 1$ y $\beta = \frac{q}{p} > 0$, obtenemos

$$|||f * g|||_{p,q}^q \leq p^q \int_0^{+\infty} \left(f^{**}\left(\frac{1}{s}\right) g^{**}\left(\frac{1}{s}\right) \right)^q \frac{ds}{s^{q+\frac{q}{p}+1}},$$

y con el cambio de variable $s = \frac{1}{y}$ escribimos

$$|||f * g|||_{p,q}^q \leq p^q \int_0^{+\infty} \left(f^{**}(y) g^{**}(y) \right)^q y^{q+\frac{q}{p}} \frac{dy}{y} \leq p^q \int_0^{+\infty} \left(y^{1+\frac{1}{p}} f^{**}(y) g^{**}(y) \right)^q \frac{dy}{y}. \tag{22}$$

Como tenemos la relación $\frac{q}{q_1} + \frac{q}{q_2} \geq 1$, existen números reales m_1 y m_2 tales que $\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = 1$ que verifican $\frac{1}{m_1} \leq \frac{q}{q_1}$, $\frac{1}{m_2} \leq \frac{q}{q_2}$, de donde se tiene que $q_1 \leq q m_1$ y $q_2 \leq q m_2$. Obtenemos entonces (recordando que se tiene $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1 + \frac{1}{p}$)

$$\begin{aligned} |||f * g|||_{p,q}^q &\leq p^q \int_0^{+\infty} \left(y^{1+\frac{1}{p}} f^{**}(y) g^{**}(y) \right)^q \frac{dy}{y} \leq p^q \int_0^{+\infty} \left(y^{\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}} f^{**}(y) g^{**}(y) \right)^q \frac{dy}{y^{\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}}} \\ &\leq p^q \int_0^{+\infty} \frac{\left(y^{\frac{1}{p_1}} f^{**}(y) \right)^q}{y^{\frac{1}{m_1}}} \frac{\left(y^{\frac{1}{p_2}} g^{**}(y) \right)^q}{\frac{1}{m_2}} dy, \end{aligned}$$

y aplicamos la desigualdad de Hölder usual en la última integral anterior para obtener

$$|||f * g|||_{p,q}^q \leq p^q \left(\int_0^{+\infty} \left(y^{\frac{1}{p_1}} f^{**}(y) \right)^{q m_1} \frac{dy}{y} \right)^{\frac{1}{m_1}} \left(\int_0^{+\infty} \left(y^{\frac{1}{p_2}} f^{**}(y) \right)^{q m_2} \frac{dy}{y} \right)^{\frac{1}{m_2}},$$

ahora, con la definición de la funcional $||| \cdot |||_{L^{p,q}}$ tenemos $|||f * g|||_{p,q}^q \leq p^q |||f|||_{p_1, q m_1}^q |||g|||_{p_2, q m_2}^q$ pero como se tiene $q_1 \leq q m_1$ y $q_2 \leq q m_2$, por las propiedades de inclusión de los espacios de Lorentz podemos finalmente escribir $|||f * g|||_{p,q} \leq p |||f|||_{p_1,q_1} |||g|||_{p_2,q_2}$ y una vez que tenemos estas estimaciones, podemos utilizar la equivalencia dada por la expresión (9) para obtener $\|f*g\|_{L^{p,q}} \leq C(p,p_1,p_2)\|f\|_{L^{p_1,q_1}}\|g\|_{L^{p_2,q_2}}$ lo que termina la demostración cuando $1 \leq q, q_1, q_2 < +\infty$ y cuando las funciones consideradas son funciones simples integrables.

Para el caso general basta proceder por densidad tal como se lo ha hecho en la Proposición 7: se empieza generalizando la desigualdad (21) al caso donde $f \in L^{p_1,q_1}$ y g es una función simple integrable, lo que permite extender en este caso la segunda desigualdad del punto 1) de la Proposición 6 para luego considerar el caso $g \in L^{p_2,q_2}$. ∎

C) Desigualdades de Young-O'Neil en $L^{p,q}$ con $q = +\infty$

En todos los resultados anteriores hemos estudiado el producto de convolución de funciones que pertenecen a los espacios de Lorentz $L^{p,q}$ tal que $1 < p < +\infty$ y $1 \leq q < +\infty$ y el método de demostración se basaba en un argumento de densidad de las funciones simples integrables en estos espacios de funciones. Lastimosamente, no es posible aplicar estos argumentos a los espacios $L^{p,\infty}$ pues por el Teorema 10, las funciones simples integrables no son densas en este caso.

Lema 2 *Sea $f \in L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{K})$ con $1 < p < +\infty$. Para un parámetro $0 < \lambda < +\infty$, definimos la función f^λ por medio de la expresión*

$$f^\lambda(x) = \begin{cases} f(x) & si\ |f(x)| > \lambda, \\ 0 & sino, \end{cases}$$

y definimos la función f_λ por la relación $f_\lambda(x) = f(x) - f^\lambda(x)$.

Tenemos la descomposición $f = f^\lambda + f_\lambda$ y si $1 \leq p_0 < p < p_1 < +\infty$ entonces

1) la función f^λ pertenece al espacio $f \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{K})$,

2) la función f_λ pertenece al espacio $f \in L^{p_1}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{K})$.

Notemos que si definimos el conjunto $A_\lambda = \{x \in X : |f(x)| > \lambda\}$, entonces se tiene $f^\lambda = f\mathbb{1}_{A_\lambda}$ y $f_\lambda = f\mathbb{1}_{A_\lambda^c}$, de donde se deduce $|f^\lambda| \leq |f|$, $|f_\lambda| \leq |f|$, $(f^\lambda)^* \leq f^*$, $(f_\lambda)^* \leq f^*$ y $(f^\lambda)^{**} \leq f^{**}$, $(f_\lambda)^{**} \leq f^{**}$.

Con esta descomposición, definimos el producto de convolución entre una función $f \in L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{K})$ con $1 < p < +\infty$ y una función simple integrable g por medio de la expresión

$$f * g = f_0 * g + f_1 * g, \tag{23}$$

en donde se tiene $f = f_0 + f_1$ y además $f_0 \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{K})$ y $f_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{K})$, con $1 < p_0 < p < p_1 < +\infty$: dado que cada término está correctamente definido (ya sea por las desigualdades de Young clásicas o por los resultados de la sección anterior), de esta manera podemos extender el producto de convolución $f * g$ en donde g es una función simple integrable y f pertenece al espacio de Lorentz $L^{p,\infty}$ con $1 < p < +\infty$.

Observemos que por el Lema 2, siempre existen funciones que permiten obtener esta descomposición y este tipo de descomposición permite caracterizar a las funciones que pertenecen a los espacios de Lorentz $L^{p,\infty}$ con $1 < p < +\infty$.

Con esta pequeña introducción, tenemos la siguiente generalización de la Proposición 6.

Proposición 9 *Sea $(\mathbb{G}, \mathcal{B}or(\mathbb{G}), \mu)$ un grupo topológico localmente compacto, unimodular, dotado de una medida de Haar σ-finita invariante por la izquierda. Si $f \in L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{K})$ con $1 < p < +\infty$ y si g es una función simple integrable entonces para todo $t > 0$ tenemos*

1) $f * g(t) \leq C\left(tf^{**}(t)g^{**}(t) + \int_t^{+\infty} f^*(s)g^*(s)ds\right)$, *2)* $f * g(t) \leq C \int_t^{+\infty} f^{**}(s) g^{**}(s) ds.$

Prueba.

1) Fijemos $0 < \lambda < +\infty$. Utilizando el Lema 2, empezamos descomponiendo la función f como la suma $f = f^\lambda + f_\lambda$ y por la subaditividad de la función maximal podemos escribir

$$(f * g)^{**}(t) \leq (f^\lambda * g)^{**}(t) + (f_\lambda * g)^{**}(t),$$

y aplicamos en cada una de estas dos partes el resultado de la Proposición 6 para obtener

$$(f * g)^{**}(t) \quad \leq \quad C \left(t (f^\lambda)^{**}(t) g^{**}(t) + \int_t^{+\infty} (f^\lambda)^*(s) g^*(s) ds \right) + C \left(t (f_\lambda)^{**}(t) g^{**}(t) + \int_t^{+\infty} (f_\lambda)^*(s) g^*(s) ds \right)$$

dado que se tiene $(f^\lambda)^{**}(t) \leq f^{**}(t)$ y $(f_\lambda)^{**}(t) \leq f^{**}(t)$ podemos escribir

$$(f * g)^{**}(t) \leq C \left(t f^{**}(t) g^{**}(t) + \int_t^{+\infty} f^*(s) g^*(s) ds \right).$$

2) El segundo punto sigue las mismas etapas: descomposición de la función $f \in L^{p,\infty}$ y aplicación de la Proposición 6 a cada término de esta descomposición. ■

Teorema 12 (Desigualdades de Young-O'Neil -(II)) *Sean $1 < p_1, p_2 < +\infty$ y $1 \leq q_1, q_2 \leq +\infty$ cuatro índices reales.*
Sean $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ dos funciones tales que $f \in L^{p_1,q_1}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{K})$ y $g \in L^{p_2,q_2}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{K})$.

1) Si $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} > 1$ y $q_1 = +\infty$, $1 \leq q_2 < +\infty$, y si los parámetros p, q verifican $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1 + \frac{1}{p}$ y $1 \leq q_2 \leq q$, entonces el producto de convolución $f * g$ está bien definido y pertenece al espacio $L^{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{K})$ y se tiene

$$\|f * g\|_{L^{p,q}} \leq C(p, p_1, p_2) \|f\|_{L^{p_1,\infty}} \|g\|_{L^{p_2,q_2}}.$$

2) Si $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} > 1$ y $1 \leq q_1 < +\infty$, $q_2 = +\infty$, y si los parámetros p, q verifican $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1 + \frac{1}{p}$ y $1 \leq q_1 \leq q$, entonces el producto de convolución $f * g$ está bien definido, pertenece al espacio $L^{p,q}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{K})$ y además

$$\|f * g\|_{L^{p,q}} \leq C(p, p_1, p_2) \|f\|_{L^{p_1,q_1}} \|g\|_{L^{p_2,\infty}}$$

3) Si ahora $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} > 1$ y $q_1 = q_2 = +\infty$ y si los parámetros p, q verifican $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1 + \frac{1}{p}$ y $q = +\infty$, entonces el producto de convolución $f * g$ está bien definido, pertenece al espacio $L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{K})$ y tenemos la desigualdad

$$\|f * g\|_{L^{p,\infty}} \leq C(p, p_1, p_2) \|f\|_{L^{p_1,\infty}} \|g\|_{L^{p_2,\infty}}.$$

Demostración.

1) Por las inclusiones entre espacios de Lorentz, tenemos la mayoración $\|f * g\|_{L^{p,q}} \leq C \|f * g\|_{L^{p,q_2}}$, de manera que podemos suponer sin pérdida de generalidad $q = q_2$. De esta manera, utilizando las desigualdades de la Proposición 9 y retomando los cáculos anteriores tenemos como punto de partida la desigualdad (22), es decir:

$$|||f * g|||_{p,q_2}^{q_2} \leq p^{q_2} \int_0^{+\infty} \left(t^{1+\frac{1}{p}} f^{**}(t) g^{**}(t) \right)^{q_2} \frac{dt}{t},$$

de donde se obtienen las mayoraciones siguientes

$$|||f * g|||_{p,q_2}^{q_2} \quad \leq \quad p^{q_2} \sup_{t>0} \left\{ t^{\frac{1}{p_1}} f^{**}(t) \right\}^{q_2} \int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{1}{p_2}} g^{**}(t) \right)^{q_2} \frac{dt}{t} \leq p^{q_2} |||f|||_{p_1,\infty}^{q_2} |||g|||_{p_2,q_2}^{q_2},$$

a partir de las cuales se deduce el resultado deseado, es decir

$$\|f * g\|_{L^{p,q}} \leq C(p, p_1, p_2) \|f\|_{L^{p_1,\infty}} \|g\|_{L^{p_2,q_2}}.$$

2) Notemos que por simetría en los argumentos utilizados, se tiene también el caso $q_2 = +\infty$ y $1 \leq q_1 < +\infty$.

3) Estudiemos el caso $q_1 = q_2 = q = +\infty$. Por el segundo punto de la Proposición 9 podemos escribir

$$\begin{aligned} t^{\frac{1}{p}}(f*g)^{**}(t) &\leq Ct^{\frac{1}{p}}\int_t^{+\infty} f^{**}(s)g^{**}(s)\big)ds \leq Ct^{\frac{1}{p}}\int_t^{+\infty} s^{-\frac{1}{p_1}}s^{-\frac{1}{p_2}}\big(s^{\frac{1}{p_1}}f^{**}(s)\big)\big(s^{\frac{1}{p_2}}g^{**}(s)\big)ds \\ &\leq C\left(\sup_{s>0} s^{\frac{1}{p_1}}f^{**}(s)\right)\left(\sup_{s>0} s^{\frac{1}{p_2}}g^{**}(s)\right)t^{\frac{1}{p}}\int_t^{+\infty} s^{-\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}}ds, \end{aligned}$$

y ahora utilizando la identidad $-\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} = -1 - \frac{1}{p}$, tenemos después de evaluar la integral anterior

$$t^{\frac{1}{p}}(f*g)^{**}(t) \leq C|||f|||_{p_1,\infty}|||g|||_{p_2,\infty},$$

de donde se obtiene el resultado deseado. ■

D) Casos donde el producto de convolución está mal definido.

Teorema 13 *Sea $\mathbb{R}$ dotado de su estructura natural de espacio medido. Sean $1 < p_1, p_2 < +\infty$ y $1 \leq q_1, q_2 \leq +\infty$ cuatro índices. Si se tienen los casos siguientes*

1) $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} < 1$, o

2) $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1$ y $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} < 1$,

entonces existen funciones $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $f \in L^{p_1,q_1}(\mathbb{R}, \mathcal{B}or(\mathbb{R}), dx, \mathbb{R})$ y $g \in L^{p_2,q_2}(\mathbb{R}, \mathcal{B}or(\mathbb{R}), dx, \mathbb{R})$, pero tales que el producto de convolución $f * g$ está mal definido, es decir que se tiene $f * g(x) = +\infty$ para casi todo $x \in \mathbb{R}$.

Demostración.

1) Si $1 < p_1, p_2 < +\infty$ son tales que $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} < 1$, definimos el parámetro $\alpha > 1$ tal que se tenga $\alpha\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}\right) = 1$ y consideremos las funciones

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq 1, \\ |x|^{-\frac{\alpha}{p_1}} & \text{si } |x| > 1, \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq 1, \\ |x|^{-\frac{\alpha}{p_2}} & \text{si } |x| > 1. \end{cases}$$

Un cálculo directo muestra sin problema que se tiene $\|f\|_{L^{p_1,q_1}} < +\infty$ y $\|f\|_{L^{p_2,q_2}} < +\infty$ para todo $1 \leq q_1, q_2 \leq +\infty$. Por simetría podemos suponer sin pérdida de generalidad que $x \geq 0$ y se tiene entonces

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy \geq \int_{1+x}^{+\infty} |x-y|^{-\frac{\alpha}{p_1}}|y|^{-\frac{\alpha}{p_2}}dy \geq \int_{1+x}^{+\infty} y^{-1}dy = +\infty.$$

2) Ahora tenemos $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1$ y $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} < 1$. Fijemos dos parámetros α, β por las condiciones $0 < \alpha < q_1$, $0 < \beta < q_2$ y $0 < \frac{1}{q_1-\alpha} + \frac{1}{q_2-\beta} < 1$, y consideremos sobre el intervalo $]0,1[$ las funciones

$$f(x) = \frac{1}{x^{\frac{1}{p_1}}|\ln(x)|^{\frac{1}{q_1-\alpha}}} \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{1}{x^{\frac{1}{p_2}}|\ln(x)|^{\frac{1}{q_2-\beta}}}.$$

Tenemos que $f \in L^{p_1,q_1}$ y $g \in L^{p_2,q_2}$, pero se tiene

$$\begin{aligned} f * g(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy \geq \int_{1+x}^{+\infty} |x-y|^{-\frac{1}{p_1}}|y|^{-\frac{1}{p_2}}|\ln(x-y)|^{-\frac{1}{q_1-\alpha}}|\ln(y)|^{-\frac{1}{q_2-\beta}}dy \\ &\geq \int_{1+x}^{+\infty} |y|^{-1}|\ln(y)|^{-\frac{1}{q_1-\alpha}+\frac{1}{q_2-\beta}}dy = +\infty. \end{aligned}$$

■