Lección n°4: Espacios de Lorentz $L^{p,q}$: dualidad

EPN, septiembre 2018

Índice

Notación: Si E es un espacio funcional, denotamos por $(E', \|\cdot\|_{E'})$ el espacio de Banach conformado por todas las formas lineales continuas definidas sobre E. Si $(F, \|\cdot\|_F)$ es otro espacio de Banach, notaremos $E' \simeq F$ para indicar que estos espacios son equivalentes y que se tiene un *isomorfismo isométrico* entre ellos, es decir $\|\cdot\|_{E'} = \|\cdot\|_F$. Por otro lado, si existen constantes positivas C_1, C_2 tales que $C_1\|\cdot\|_F \leq \|\cdot\|_{E'} \leq C_2\|\cdot\|_F$, notaremos $E' \sim F$ para indicar que estos espacios son equivalentes y que se tiene un *isomorfismo* (no necesariamente isométrico) entre ellos.

1. Caso cuando $0 < p < 1$ y $0 < q \leq +\infty$.

Teorema 1 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido σ-finito y no atómico. Si los índices p, q que determinan los espacios de Lorentz $L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ verifican $0 < p < 1$ y $0 < q \leq +\infty$, entonces el espacio dual correspondiente está reducido al elemento nulo. Dicho de otra manera se tiene*

$$(L^{p,q})' = \{0\}.$$

Demostración. Sobre el espacio $(X, \mathscr{A}, \mu)$ consideremos $f(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbb{1}_{A_j}(x)$ una función simple integrable en donde los conjuntos $(A_j)_{1\leq j\leq n}$ son disjuntos. Dado que el espacio medido es no atómico, podemos descomponer cada conjunto $(A_j)_{1\leq j\leq n}$ como la unión de N conjuntos disjuntos $(A_{j,k})_{1\leq k\leq N}$ cada uno de medida $\frac{1}{N}\mu(A_j)$ y definimos entonces las funciones $f_k(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbb{1}_{A_{j,k}}(x)$, nótese aquí que se tiene $f = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} f_k$. Calculemos ahora la cantidad $\|f_k\|_{L^{p,q}}$. Dado que todos los conjuntos $A_{j,k}$ son disjuntos podemos escribir $\|f_k\|_{L^{p,q}} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \|\mathbb{1}_{A_{j,k}}\|_{L^{p,q}}$, por la definición de los conjuntos $(A_{j,k})_{1\leq k\leq N}$ tenemos

$$\|f_k\|_{L^{p,q}} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{q}} \mu(A_{j,k})^{\frac{1}{p}} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{N}\mu(A_j)\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{q}} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(A_j)^{\frac{1}{p}} = N^{\frac{-1}{p}} \|f\|_{L^{p,q}}.$$

Supongamos ahora que T es una forma lineal continua definida sobre el espacio $L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ y si evaluamos T en la función f anterior obtenemos $|T(f)| \leq \sum_{k=1}^{N} |T(f_k)| \leq \|T\|_{(L^{p,q})'} \sum_{k=1}^{N} \|f_k\|_{L^{p,q}} \leq \|T\|_{(L^{p,q})'} N^{1-\frac{1}{p}} \|f\|_{L^{p,q}}$, si hacemos ahora tender $N \to +\infty$, como $0 < p < 1$, se tiene que la parte de la derecha de la estimación anterior tiende a 0, de donde se deduce que $T = 0$. De esta manera vemos que el conjunto de formas lineales definidas sobre el espacio de Lorentz $L^{p,q}$ cuando $0 < p < 1$ y $0 < q \leq +\infty$ está reducido al elemento 0, lo que termina la demostración del teorema. $\blacksquare$

2. Caso cuando $p = 1$ y $0 < q \leq +\infty$.

2.1. Caso cuando $p = 1$ y $0 < q \leq 1$.

Teorema 2 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido σ-finito y no atómico. Si los índices p, q que determinan los espacios de Lorentz $L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ verifican $p = 1$ y $0 < q \leq 1$, entonces el espacio dual correspondiente se identifica con el espacio de Lebesgue $L^{\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$, es decir que se tiene*

$$(L^{1,q})' \sim L^{\infty}.$$

Demostración. Recordemos que el caso $p = q = 1$ corresponde con el espacio de Lebesgue L^1 que ya ha sido tratado en el Volumen 2, de manera que nos concentramos el caso cuando $0 < q < 1$. Consideremos la siguiente aplicación:

$$\begin{array}{rcl} \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^{1,q} \times L^{\infty}} : L^{1,q} \times L^{\infty} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (f, g) & \longmapsto & \displaystyle\int_X f(x)g(x)d\mu(x). \end{array} \tag{1}$$

Por las propiedades de la integral de Lebesgue, vemos sin problema que la aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^{1,q} \times L^{\infty}}$ es una forma bilineal.

1) Continuidad fuerte. Recordemos que se tiene la inclusión $L^{1,q} \subset L^1$. Empecemos considerando f una función simple y g una función que pertenece al espacio L^{∞}. Tenemos entonces la estimación

$$|\langle f, g \rangle_{L^{1,q} \times L^{\infty}}| = \left| \int_X f(x)g(x)d\mu(x) \right| \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^{\infty}} \leq \|f\|_{L^{1,q}} \|g\|_{L^{\infty}},$$

que se generaliza por densidad a todo el espacio $L^{1,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ y obtenemos de esta manera que para toda función $g \in L^{\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ podemos construir formas lineales continuas sobre el espacio $L^{1,q}$ utilizando la expresión

$$\begin{array}{rcl} T_g : L^{1,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ f & \longmapsto & T_g(f) = \displaystyle\int_X f(x)g(x)d\mu(x), \end{array} \tag{2}$$

pues se tiene $|T_g(f)| \leq C_{T_g} \|f\|_{L^{1,q}}$, en donde $C_{T_g} = \|g\|_{L^{\infty}}$.

2) Isomorfismo. Verifiquemos que la funcional T_g definida por medio de la expresión (2) y la función $g \in L^{\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ proporcionan información equivalente. Sabemos por los cálculos anteriores que para toda función $f \in L^{1,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ se tiene la estimación $|T_g(f)| \leq \|g\|_{L^{\infty}} \|f\|_{L^{1,q}}$, de donde se deduce $\|T_g\|_{(L^{1,q})'} = \sup\limits_{\|f\|_{L^{1,q}} \leq 1} |T_g(f)| \leq \|g\|_{L^{\infty}}$. Para la desigualdad recíproca procedemos de la siguiente manera: sea $g \in L^{\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$, sea $\varepsilon > 0$ un real arbitrario y consideremos el conjunto $\{x \in X : |g(x)| > \|g\|_{L^{\infty}} - \varepsilon\}$ que no es, por construcción, de μ-medida nula. Existe entonces un conjunto A de μ-medida finita y tal que el conjunto $B = A \cap \{x \in X : |g(x)| > \|g\|_{L^{\infty}} - \varepsilon\}$, sea de medida finita. Definimos ahora la función $f(x) = \overline{sign(g)}(x)\mathbb{1}_B(x)$ y se tiene que esta función pertenece al espacio $L^{1,q}$ pues $|f(x)| \leq \mathbb{1}_B$ y entonces $\|f\|_{L^{1,q}} \leq \|\mathbb{1}_B\|_{L^{1,q}} = \left(\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{q}} \mu(B) < +\infty$. Si calculamos $T_g(f)$ tenemos:

$$T_g(f) = \int_X \left(\overline{sign(g)}(x)\mathbb{1}_B(x)\right) g(x)d\mu(x) = \int_X |g(x)|\mathbb{1}_B(x)d\mu(x) \geq (\|g\|_{L^{\infty}} - \varepsilon)\, \mu(B),$$

de donde se obtiene, al ser todas estas cantidades positivas, la mayoración $|T_g(f)| \geq (\|g\|_{L^{\infty}} - \varepsilon)\, \mu(B)$. Por otro lado, por los cálculos anteriores tenemos $|T_g(f)| \leq \|T_g\|_{(L^{1,q})'} \|f\|_{L^{1,q}} = \left(\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{q}} \|T_g\|_{(L^{1,q})'} \mu(B)$, a partir de lo cual podemos escribir $\|g\|_{L^{\infty}} - \varepsilon \leq \left(\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{q}} \|T_g\|_{(L^{1,q})'}$. Finalmente, como el real $\varepsilon > 0$ era arbitrario se obtiene la equivalencia buscada.

3) Sobreyectividad. Debemos ahora verificar que *toda* forma lineal continua T definida sobre el espacio $L^{1,q}$ se puede representar por medio de la expresión (2) en donde $g \in L^\infty$. Consideremos por un momento que la medida total del conjunto X es finita, entonces si $T \in (L^{p,q})'$ es una forma lineal continua, podemos considerar la aplicación $\nu(A) = T(\mathbb{1}_A)$, para todo $A \in \mathscr{A}$. Por el Teorema de convergencia dominada en los espacios de Lorentz, si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos medibles disjuntos tales que $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, podemos escribir (recordar que todos estos conjuntos son de medida finita):

$$\lim_{n\to+\infty} \left\| \mathbb{1}_A - \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{A_n} \right\|_{L^{1,q}} = 0,$$

de donde se deduce, por la continuidad de la forma lineal T la identidad $T(\mathbb{1}_A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{A_n}$, que se transmite a la aplicación ν y que nos proporciona la propiedad de σ-aditividad para ν. Como se tiene

$$|\nu(A)| \leq \|T\|_{(L^{p,q})'} \|\mathbb{1}_A\|_{L^{p,q}} = C(p,q)\|T\|_{(L^{p,q})'} \mu(A)^{\frac{1}{p}},$$

deducimos sin problema que la medida ν es absolutamente continua con respecto a la medida μ y podemos entonces aplicar el Teorema de Radon-Nikodym para obtener una función integrable $g : X \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que

$$\sigma(A) = T(\mathbb{1}_A) = \int_X \mathbb{1}_A g(x) d\mu(x).$$

Vamos a verificar que esta función g pertenece al espacio $L^\infty(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ y para todo $n \geq 1$ consideramos ahora los conjuntos $E_n = \{x \in X : |g(x)| \leq n\}$, de manera que las funciones $g(x)\mathbb{1}_{E_n}$ son funciones acotadas que pertenecen al espacio $L^\infty(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ pues hemos supuesto que la medida μ es finita. Ahora si $A \in \mathscr{A}$ y si $f = \mathbb{1}_A$, entonces podemos escribir $T(f\mathbb{1}_{E_n}) = \displaystyle\int_X f(x)g(x)\mathbb{1}_{E_n} d\mu(x)$. Por linealidad y continuidad de la aplicación T y utilizando el hecho que las funciones simples son densas en el espacio $L^{1,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ podemos generalizar la expresión anterior a toda función $L^{1,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$. Ahora, por el isomorfismo verificado en el punto 2) anterior tenemos la estimación $\|g\mathbb{1}_{E_n}\|_{L^\infty} \leq \left(\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{q}} \|T\|_{(L^{1,q})'}$ y a partir de esta estimación uniforme se obtiene que la función g es acotada.

Este procedimiento se generaliza sin mayor problema al caso de un espacio medido σ-finito: basta considerar una sucesión de conjuntos medibles disjuntos $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de μ-medida finita tales que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ y aplicar por separado los puntos anteriores a cada conjunto B_n para luego recomponer todo el espacio X. ■

Observación 1 Con este resultado podemos ver que el espacio L^∞ posee *muchos* espacios pre-duales.

2.2. Caso cuando $p = 1$ y $1 < q < +\infty$.

Teorema 3 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido σ-finito y no atómico. Si los índices p, q que determinan los espacios de Lorentz $L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ verifican $p = 1$ y $1 < q < +\infty$, entonces su espacio dual topológico está reducido al elemento cero. Es decir*

$$\left(L^{1,q}\right)' = \{0\}.$$

Demostración. Supongamos que T es una forma lineal continua definida sobre el espacio $L^{1,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ con $1 < q < +\infty$. Lo primero que vamos a hacer es representar esta forma lineal continua por medio de una integral. Procediendo como en el punto 3) de la demostración del Teorema 2 (es decir, empezando considerando que la medida total $\mu(X)$ es finita y usando la hipótesis de σ-finitud, para luego pasar al caso de espacios generales), podemos definir una nueva medida por medio de la expresión $\nu(A) = T(\mathbb{1}_A)$, para todo $A \in \mathscr{A}$ y como se tienen las mayoraciones $|\nu(A)| \leq \|T\|_{(L^{p,q})'} \|\mathbb{1}_A\|_{L^{p,q}} = C(p,q)\|T\|_{(L^{p,q})'} \mu(A)^{\frac{1}{p}}$, deducimos sin problema que la medida ν es absolutamente continua con respecto a la medida μ. Podemos entonces aplicar el Teorema de Radon-Nikodym para obtener una función integrable $g : X \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que

$$\sigma(A) = T(\mathbb{1}_A) = \int_X \mathbb{1}_A g(x) d\mu(x).$$

La linealidad de esta expresión permite considerar una expresión del tipo $T(f) = \int_X f(x)g(x)d\mu(x)$ en donde f es una función simple integrable. Finalmente, por la continuidad de la aplicación T y por densidad de las funciones simples integrables, obtenemos que *toda* aplicación lineal continua T se escribe de esta forma.

Una vez que hemos obtenido esta caracterización de las formas lineales continuas, vamos a demostrar que la función g que interviene en la expresión anterior es necesariamente nula. En efecto, supongamos que esta función g es tal que $|g(x)| > \delta > 0$ sobre un conjunto medible A_0, tal que $0 < \mu(A_0) < +\infty$. Consideremos entonces la función f por medio de la fórmula $f(x) = \overline{sign(g)}\mathbb{1}_{A_0}h(x)$, en donde $h(x) \geq 0$ es una función medible. Tenemos por un lado

$$|T(f)| = \left|\int_X \overline{sign(g)}\mathbb{1}_{A_0}h(x)g(x)d\mu(x)\right| = \left|\int_{A_0} |g(x)|h(x)d\mu(x)\right| \geq \delta \int_{A_0} |h(x)|d\mu(x) = \delta\|h\|_{L^1(A_0)},$$

mientras que por otro lado tenemos $|T(f)| \leq \|T\|_{(L^{1,q})'}\|f\|_{L^{1,q}} = \|T\|_{(L^{1,q})'}\|h\|_{L^{1,q}(A_0)}$, y a partir de estas estimaciones obtenemos $\|h\|_{L^1(A_0)} \leq \delta^{-1}\|T\|_{(L^{1,q})'}\|h\|_{L^{1,q}(A_0)}$, pero dado que estamos trabajando en un espacio no atómico y que consideramos el rango de valores $1 < q < +\infty$, entonces se tiene la inclusión de espacios $L^1 \subset L^{1,q}$ de manera que no se puede tener en toda generalidad la desigualdad anterior, a menos que $\|T\|_{(L^{1,q})'}$ sea idénticamente nula. ■

2.3. Caso cuando $p = 1$ y $q = +\infty$.

Teorema 4 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido σ-finito y no atómico. Si los índices p, q que determinan los espacios de Lorentz $L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ verifican $p = 1$ y $q = +\infty$, entonces su espacio dual topológico $(L^{1,\infty})'$ no es trivial. Es decir*

$$(L^{1,\infty})' \neq \{0\}.$$

Demostración. Recordemos que si E es un espacio vectorial separado dotado de una estructura topológica inicial, si $x_0 \in E$ es un vector y si p es una semi-norma definida sobre E que es continua con respecto a esta estructura inicial, entonces existe una forma lineal continua $T \in E'$ tal que $T(x_0) \neq 0$. De esta manera es suficiente exhibir una semi-norma continua con respecto a la estructura topológica inicial del espacio $L^{1,\infty}$ para obtener la existencia (lo cual es en realidad una consecuencia del Teorema de Hahn-Banach) de una forma lineal continua que no es trivial. Empezamos considerando el espacio de Lorentz definido sobre el intervalo $[0, +\infty[$: $L^{1,\infty}([0, +\infty[, \mathcal{B}or([0, +\infty[), dx, \mathbb{K})$. Dado que este espacio es resonante, tenemos la caracterización siguiente de la función maximal

$$f_r^{**}(t) = \sup_{\mu(A)=t} \left(\frac{1}{\mu(A)}\int_A |f(x)|^r d\mu(x)\right)^{\frac{1}{r}}.$$

En particular, si consideramos $t < 1$ tenemos para dos funciones medibles f, g la desigualdad

$$\left(\frac{1}{\mu(A)}\int_A |f+g|^{1-t}d\mu\right)^{\frac{1}{1-t}} \leq 2^{\frac{t}{1-t}}\left[\left(\frac{1}{\mu(A)}\int_A |f|^{1-t}d\mu\right)^{\frac{1}{1-t}} + \left(\frac{1}{\mu(A)}\int_A |g|^{1-t}d\mu\right)^{\frac{1}{1-t}}\right],$$

de donde se deduce la mayoración $(f+g)_{1-t}^{**}(t) \leq 2^{\frac{t}{1-t}}\left[f_{1-t}^{**}(t) + g_{1-t}^{**}(t)\right]$, y entonces tenemos

$$\lim_{t\to 0} t^2(f+g)_{1-t}^{**}(t) \leq \lim_{t\to 0} 2^{\frac{t}{1-t}}\left[t^2 f_{1-t}^{**}(t) + t^2 g_{1-t}^{**}(t)\right] \leq \lim_{t\to 0} t^2 f_{1-t}^{**}(t) + \lim_{t\to 0} t^2 g_{1-t}^{**}(t).$$

De esta manera, si consideramos la funcional N_0 definida por medio de la expresión $N_0(f) = \lim\limits_{t\to 0} t^2 f_{1-t}^{**}(t)$, observamos que se tiene la desigualdad triangular $N_0(f+g) \leq N_0(f) + N_0(g)$. Además si $\lambda \in \mathbb{K}$, tenemos la propiedad de homogeneidad $N_0(\lambda f) = \lim\limits_{t\to 0} t^2|\lambda| f_{1-t}^{**}(t) = |\lambda| N_0(f)$, de manera que obtenemos que la funcional N_0 es una semi-norma. En particular cuando $f = \mathbb{1}_A$ es una función indicatriz de un conjunto medible A, vemos sin mayor problema que se tiene $N_0(\mathbb{1}_A) = 0$. Observemos además que esta semi-norma no es trivial puesto que se tiene $N_0(1/x) = 1$.

Lo único que queda por verificar es que esta semi-norma es continua con respecto a la estructura inicial del espacio $L^{1,\infty}$, caracterizada por la funcional $\|\cdot\|_{L^{1,\infty}}$. Para ello notamos que se tienen las estimaciones

$$t^2 f^{**}_{1-t}(t) \;=\; t^2\left(\frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)^{1-t}ds\right)^{\frac{1}{1-t}} \leq \sup_{s>0}\{s\,f^*(s)\}\,t^2\left(\frac{1}{t}\int_0^t s^{t-1}ds\right)^{\frac{1}{1-t}} \leq \|f\|_{L^{1,\infty}}t^{-\frac{t}{1-t}},$$

de manera que se tiene $N_0(f) = \lim\limits_{t\to 0} t^2 f^{**}_{1-t}(t) \leq \lim\limits_{t\to 0} t^{-\frac{t}{1-t}}\|f\|_{L^{1,\infty}} = \|f\|_{L^{1,\infty}}$, de donde deducimos que la semi-norma N_0 es continua con respecto a la funcional $\|\cdot\|_{L^{1,\infty}}$ que determina la topología inicial del espacio de Lorentz $L^{1,\infty}$ y a partir de este hecho obtenemos la existencia de una forma lineal continua no trivial definida sobre el espacio $L^{1,\infty}([0,+\infty[,\mathcal{B}or([0,+\infty[),dx,\mathbb{K})$.

El caso de un espacio medido σ-finito $(X,\mathscr{A},\mu)$ general sigue esencialmente los mismos pasos. ■

Es necesario hacer aquí la siguiente observación: sabemos que $(L^{1,q})' = \{0\}$ para todo $1 < q < +\infty$ y dado que se tiene la inclusión de espacios $L^{1,q} \subset L^{1,\infty}$, con $1 < q < +\infty$, entonces toda forma lineal continua definida sobre el espacio $L^{1,\infty}(X,\mathscr{A},\mu,\mathbb{K})$ se anula sobre las funciones simples.

Notemos finalmente que, si bien el espacio dual del espacio $L^{1,\infty}(X,\mathscr{A},\mu,\mathbb{K})$ no es trivial (no está reducido al elmento cero), no estamos en capacidad de dar una caracterización simple de este espacio dual.

3. Caso cuando $1 < p < +\infty$ y $0 < q \leq +\infty$.

3.1. Caso cuando $1 < p < +\infty$ y $0 < q \leq 1$.

Teorema 5 *Sea $(X,\mathscr{A},\mu)$ un espacio medido σ-finito y no atómico. Si los parámetros reales p,q verifican $1 < p < +\infty$ y $0 < q \leq 1$, entonces el espacio dual topológico del espacio de Lorentz $L^{p,q}(X,\mathscr{A},\mu,\mathbb{K})$ es isomorfo al espacio de Lorentz $L^{p',\infty}(X,\mathscr{A},\mu,\mathbb{K})$ donde $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$. Dicho de otra manera se tiene la identificación*

$$\left(L^{p,q}\right)' \sim L^{p',\infty}.$$

Demostración. Consideremos la aplicación bilineal siguiente entre los espacios $L^{p,q}$ y $L^{p',\infty}$:

$$\begin{array}{rcl}\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^{p,q}\times L^{p',\infty}} : L^{p,q}\times L^{p',\infty} & \longrightarrow & \mathbb{K}\\ (f,g) & \longmapsto & \displaystyle\int_X f(x)g(x)d\mu(x),\end{array}$$

y apliquemos el programa usual para estudiar la dualidad.

1) Continuidad fuerte. Si $f \in L^{p,q}(X,\mathscr{A},\mu,\mathbb{K})$ y si $g \in L^{p',\infty}(X,\mathscr{A},\mu,\mathbb{K})$ tenemos la mayoración

$$|\langle f,g\rangle_{L^{p,q}\times L^{p',\infty}}| \leq \int_X |f(x)||g(x)|d\mu(x),$$

y por el Teorema de Hardy-Littlewood tenemos $|\langle f,g\rangle_{L^{p,q}\times L^{p',\infty}}| \leq \displaystyle\int_X |f(x)||g(x)|d\mu(x) \leq \int_0^{+\infty} f^*(t)g^*(t)dt$ y como se tiene la relación $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, podemos escribir

$$|\langle f,g\rangle_{L^{p,q}\times L^{p',\infty}}| \;\leq\; \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{p}}f^*(t)\,t^{\frac{1}{p'}}g^*(t)\frac{dt}{t} \leq \sup_{t>0}\left\{t^{\frac{1}{p'}}g^*(t)\right\}\int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{p}}f^*(t)\frac{dt}{t} \leq \|g\|_{L^{p',\infty}}\|f\|_{L^{p,1}},$$

pero dado que se tiene la inclusión de espacios $L^{p,q} \subset L^{p,1}$ para todo $0 < q \leq 1$, se tiene la desigualdad

$$|\langle f,g\rangle_{L^{p,q}\times L^{p',\infty}}| \leq C\|g\|_{L^{p',\infty}}\|f\|_{L^{p,q}},$$

de donde se deduce la continuidad fuerte de esta aplicación bilineal. De esta manera podemos construir, a partir de toda función $g \in L^{p',\infty}(X,\mathscr{A},\mu,\mathbb{K})$, una forma lineal continua T_g por medio de la expresión

$$T_g(f) = \int_X f(x)g(x)d\mu(x).$$

2) Isomorfismo. Necesitamos verificar que los objetos $g \in L^{p',\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ y T_g determinan el mismo tipo de información. Sabemos que se tiene siempre $|T_g(f)| \leq \|T_g\|_{(L^{p,q})'}\|f\|_{L^{p,q}}$, pero también tenemos la desigualdad $|T_g(f)| \leq C\|g\|_{L^{p',\infty}}\|f\|_{L^{p,q}}$, de donde por definición de la norma de una forma lineal continua se obtiene $\|T_g\|_{(L^{p,q})'} \leq C\|g\|_{L^{p',\infty}}$. Para obtener la desigualdad reciproca consideremos una función $g \in L^{p',\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$, entonces, para un cierto parámetro $0 < \beta < +\infty$ tal que $d_g(\beta) < +\infty$, definimos la función $f_\beta(x) = \overline{sign(g)}\mathbb{1}_{\{|g|>\beta\}}$ y se tiene $f_\beta \in L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$: en efecto, por un cálculo directo podemos escribir

$$d_{f_\beta}(\alpha) = \begin{cases} d_g(\beta) & \text{si } 0 < \alpha < 1, \\ \\ 0 & \text{sino,} \end{cases}$$

de donde tenemos, utilizando la primera definición de los espacios de Lorentz:

$$\|f_\beta\|_{L^{p,q}} = p^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^{+\infty} \left(\alpha\, d_{f_\beta}(\alpha)^{\frac{1}{p}}\right)^q \frac{d\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{1}{q}} = p^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^{1} \alpha^{q-1}\, d_g(\beta)^{\frac{q}{p}} d\alpha\right)^{\frac{1}{q}} = C(p,q)\; d_g(\beta)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

De esta manera tenemos la mayoración $|T_g(f_\beta)| \leq \|T_g\|_{(L^{p,q})'}\|f_\beta\|_{L^{p,q}} = C(p,q)\|T_g\|_{(L^{p,q})'}d_g(\beta)^{\frac{1}{p}}$. Ahora, por otro lado tenemos

$$\begin{aligned} |T_g(f_\beta)| &= \left|\int_X f_\beta(x)g(x)d\mu(x)\right| = \left|\int_X \overline{sign(g)}\mathbb{1}_{\{|g|>\beta\}}g(x)d\mu(x)\right| \\ &= \left|\int_X |g(x)|\mathbb{1}_{\{|g|>\beta\}}d\mu(x)\right| \geq \beta\left|\int_X \mathbb{1}_{\{|g|>\beta\}}d\mu(x)\right| \geq \beta d_g(\beta). \end{aligned}$$

Juntando las dos estimaciones (por arriba y por abajo) que acabamos de obtener en las expresiones anteriores de la cantidad $|T_g(f_\beta)|$ podemos escribir $\beta d_g(\beta) \leq |T_g(f_\beta)| \leq C(p,q)\|T_g\|_{(L^{p,q})'}d_g(\beta)^{\frac{1}{p}}$, de donde se deduce la mayoración $\beta d_g(\beta)^{\frac{1}{p'}} \leq C(p,q)\|T_g\|_{(L^{p,q})'}$, es decir $\|g\|_{L^{p',\infty}} \leq C(p,q)\|T_g\|_{(L^{p,q})'}$ y de esta manera se obtiene el isomorfismo buscado.

3) Sobreyectividad. Verifiquemos ahora que *toda* forma lineal continua definida sobre el espacio de Lorentz $L^{p,q}$ puede representarse por medio de la expresión

$$T(f) = \int_X f(x)g(x)d\mu(x),$$

para alguna función $g \in L^{p',\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$. Empezamos suponiendo que la medida del conjunto X es finita y con los mismos argumentos utilizados anteriormente (es decir, σ-finitud del espacio $(X, \mathscr{A}, \mu)$, continuidad de la aplicación T y teorema de convergencia dominada), al definir una aplicación de conjuntos ν por medio de la expresión $\nu(A) = T(\mathbb{1}_A)$ se obtiene una medida. Como además se tiene la mayoración

$$|\nu(A)| \leq \|T\|_{(L^{p,q})'}\|\mathbb{1}_A\|_{L^{p,q}} = C(p,q)\|T\|_{(L^{p,q})'}\mu(A)^{\frac{1}{p}},$$

obtenemos que la medida ν es absolutamente continua con respecto a la medida μ. Podemos entonces aplicar el Teorema de Radon-Nikodym, para obtener una función integrable $g : X \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que

$$\sigma(A) = T(\mathbb{1}_A) = \int_X \mathbb{1}_A g(x)d\mu(x).$$

La linealidad de esta expresión permite considerar una expresión del tipo

$$T(f) = \int_X f(x)g(x)d\mu(x),$$

en donde f es una función simple integrable. Si definimos ahora el conjunto $E_n = \{x \in X : |g(x)| \leq n\}$, tenemos que la función $g\mathbb{1}_{E_n}$ es acotada y pertenece al espacio de Lorentz $L^{p',\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ puesto que estamos trabajando sobre un conjunto de medida finita. Si consideramos ahora $T(f\mathbb{1}_{E_n}) = \displaystyle\int_X f(x)g(x)\mathbb{1}_{E_n}d\mu(x)$, tenemos la estimación $|T(f\mathbb{1}_{E_n})| \leq \|f\|_{L^{p,q}}\|g\mathbb{1}_{E_n}\|_{L^{p',\infty}}$, pero por el punto 2) anterior sabemos que se tiene la desigualdad uniforme $\|g\mathbb{1}_{E_n}\|_{L^{p',\infty}} \leq C(p,q)\|T\|_{(L^{p,q})'}$, de manera que por el Lema de Fatou obtenemos que la función g pertenece al espacio $L^{p',\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$. Por la continuidad de la forma lineal T y por densidad de las funciones simples integrables en el espacio $L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$, se deduce la representación integral deseada para la aplicación T. El caso de un espacio medido σ-finito general se deduce de manera totalmente similar. ■

3.2. Caso cuando $1 < p < +\infty$ y $1 < q < +\infty$.

Teorema 6 (Dualidad) *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido σ-finito y no atómico. Si los parámetros reales p, q verifican $1 < p < +\infty$ y $1 < q < +\infty$, y si los índices p', q' verifican las relaciones*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \qquad y \qquad \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1,$$

entonces el espacio dual topológico del espacio de Lorentz $L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ es isomorfo al espacio de Lorentz $L^{p',q'}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$. Dicho de otra manera se tiene la identificación

$$\big(L^{p,q}\big)' \sim L^{p',q'}.$$

Demostración. Notemos que si $p = q$, entonces $1 < p < +\infty$ y se tiene la identificación de espacios $L^{p,p} = L^p$, además por el Teorema 3.1.1 del Volumen 2 sabemos que se tiene la relación de dualidad $(L^p)' \simeq L^{p'}$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, de manera que podemos concentrarnos únicamente en el caso $p \neq q$.

Supongamos pues que se tiene $1 < p, q < +\infty$ con $p \neq q$ y consideremos la siguiente aplicación:

$$\begin{array}{rcl} \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^{p,q} \times L^{p',q'}} : L^{p,q} \times L^{p',q'} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (f, g) & \longmapsto & \displaystyle\int_X f(x)g(x)d\mu(x). \end{array} \tag{3}$$

Por las propiedades de la integral de Lebesgue, vemos sin problema que la aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^{p,q} \times L^{p',q'}}$ es una forma bilineal.

1) Continuidad fuerte. Tenemos, utilizando el Teorema de Hardy-Littlewood y la estimación $f^* \leq f^{**}$:

$$|\langle f, g \rangle_{L^{p,q} \times L^{p',q'}}| = \left| \int_X f(x)g(x)d\mu(x) \right| \leq \int_X |f(x)||g(x)|d\mu(x) \leq \int_0^{+\infty} f^*(t)g^*(t)dt \leq \int_0^{+\infty} f^{**}(t)g^{**}(t)dt,$$

de manera que utilizando la relación $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ podemos escribir

$$|\langle f, g \rangle_{L^{p,q} \times L^{p',q'}}| \leq \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t)\, t^{\frac{1}{p'}} g^{**}(t) \frac{dt}{t},$$

y como $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$, podemos aplicar la desigualdad de Hölder usual (pero con respecto a la medida $\frac{dt}{t}$) en la integral anterior para obtener la mayoración

$$|\langle f, g \rangle_{L^{p,q} \times L^{p',q'}}| \leq \left(\int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \times \left(\int_0^{+\infty} \left(t^{\frac{1}{p'}} g^{**}(t) \right)^{q'} \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q'}} \leq |||f|||_{p,q} |||g|||_{p',q'}$$

de donde se obtiene sin problema que esta aplicación bilineal es continua.

Gracias a este resultado, podemos definir formas lineales sobre los espacios de Lorentz $L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ de la siguiente manera: si g es una función cualquiera que pertenece al espacio $L^{p',q'}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ y $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$, construimos una aplicación T_g por medio de la expresión

$$\begin{array}{rcl} T_g : L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ f & \longmapsto & T_g(f) = \displaystyle\int_X f(x)g(x)d\mu(x), \end{array} \tag{4}$$

vemos entonces sin ningún problema que esta aplicación T_g es lineal y que es continua pues $|T_g(f)| \leq C_{T_g} |||f|||_{p,q}$, en donde $C_{T_g} = |||g|||_{p',q'}$.

Por medio de esta aplicación T_g definida en (4) vemos que *todo* elemento $g \in L^{p',q'}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ permite construir una forma lineal continua sobre el espacio de Lorentz $L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$, de esta manera si notamos

$$F = \{T_g : L^{p,q} \longrightarrow \mathbb{K} : g \in L^{p',q'}\},$$

entonces se tiene $F \subset (L^{p,q})'$.

2) Isomorfismo. Mostremos ahora que la forma lineal T_g y la función g pueden ser identificadas en el sentido que describen una información equivalente. Por los cálculos anteriores tenemos

$$\|T_g\|_{(L^{p,q})'} = \sup_{|||f|||_{p,q}\leq 1} |T_g(f)| \leq |||f|||_{p,q}|||g|||_{p',q'} \leq |||g|||_{p',q'},$$

así que nos concentramos en estudiar la estimación recíproca.

Para ello consideramos g una función que pertenece al espacio $L^{p',q'}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ y sea la función f definida por medio de la expresión

$$f^*(t) = \int_{\frac{t}{2}}^{+\infty} s^{\frac{q'}{p'}-1} g^*(s)^{q'-1}\frac{ds}{s}, \tag{5}$$

nótese que esta función f^* es continua por la derecha, decreciente y además $f \in L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$: en efecto

$$\|f\|_{L^{p,q}} = \left(\int_0^{+\infty} t^{\frac{q}{p}} f^*(t)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_0^{+\infty}\left(\int_{\frac{t}{2}}^{+\infty} s^{\frac{q'}{p'}-1} g^*(s)^{q'-1}\frac{ds}{s}\right)^q \frac{dt}{t^{1-\frac{q}{p}}}\right)^{\frac{1}{q}},$$

aplicando la desigualdad de Hardy tenemos

$$\|f\|_{L^{p,q}} \leq C\left(\int_0^{+\infty} s^{(\frac{q'}{p'}-1)q} g^*(s)^{(q'-1)q}\frac{ds}{s^{1-\frac{q}{p}}}\right)^{\frac{1}{q}},$$

y recordando que se tienen las relaciones $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'} = \frac{1}{q}+\frac{1}{q'} = 1$, la estimación anterior se reescribe como

$$\|f\|_{L^{p,q}} \leq C\left(\int_0^{+\infty} s^{\frac{q'}{p'}} g^*(s)^{q'}\frac{ds}{s}\right)^{\frac{q'-1}{q'}} = C\|g\|_{L^{p',q'}}^{q'-1} < +\infty,$$

de donde se obtiene que $f \in L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$.

Recordemos ahora que por construcción tenemos que la forma lineal T_g está dada por la integral (4) y para toda función $f \in L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ se tiene la mayoración

$$\left|\int_X f(x)g(x)d\mu(x)\right| = |T_g(f)| \leq \|T_g\|_{(L^{p,q})'}|||f|||_{p,q}.$$

Nótese que esta estimación es uniforme con respecto a toda función $\tilde{f}$ que es equidistribuida con f y se tiene entonces

$$\sup_{\tilde{f}:d_{\tilde{f}}=d_f}\left|\int_X \tilde{f}(x)g(x)d\mu(x)\right| \leq \|T_g\|_{(L^{p,q})'}|||f|||_{p,q},$$

ahora, dado que estamos trabajando sobre un espacio medido no atómico σ-finito, se trata de un espacio resonante y tenemos la mayoración general

$$\int_0^{+\infty} f^*(t)g^*(t)dt = \sup_{\tilde{f}:d_{\tilde{f}}=d_f}\left|\int_X \tilde{f}(x)g(x)d\mu(x)\right| \leq \|T_g\|_{(L^{p,q})'}|||f|||_{p,q},$$

de manera que si consideramos en esta desigualdad la función f definida en la expresión (5) tenemos

$$\int_0^{+\infty}\left(\int_{\frac{t}{2}}^{+\infty} s^{\frac{q'}{p'}-1} g^*(s)^{q'-1}\frac{ds}{s}\right) g^*(t)dt \leq C\|T_g\|_{(L^{p,q})'}\|g\|_{L^{p',q'}}^{q'-1}. \tag{6}$$

Estudiamos ahora la parte de la izquierda de esta estimación y tenemos

$$\int_0^{+\infty} f^*(t)g^*(t)dt = \int_0^{+\infty}\left(\int_{\frac{t}{2}}^{+\infty} s^{\frac{q'}{p'}-1} g^*(s)^{q'-1}\frac{ds}{s}\right) g^*(t)dt \geq \int_0^{+\infty}\left(\int_{\frac{t}{2}}^{t} s^{\frac{q'}{p'}-1} g^*(s)^{q'-1}\frac{ds}{s}\right) g^*(t)dt,$$

y dado que la función g^* es decreciente podemos escribir

$$\int_0^{+\infty} f^*(t)g^*(t)dt \quad \geq \quad \int_0^{+\infty} g^*(t)^{q'-1}\left(\int_{\frac{t}{2}}^{t} s^{\frac{q'}{p'}-1}\frac{ds}{s}\right)g^*(t)dt \geq C\|g\|_{L^{p',q'}}^{q'}.$$

Con esta estimación volvemos a la desigualdad (6) y tenemos

$$C\|g\|_{L^{p',q'}}^{q'} \leq \int_0^{+\infty} f^*(t)g^*(t)dt \leq C\|T_g\|_{(L^{p,q})'}\|g\|_{L^{p',q'}}^{q'-1},$$

es decir $C\|g\|_{L^{p',q'}} \leq \|T_g\|_{(L^{p,q})'}$, y esto muestra que la información dada por la función $g \in L^{p',q'}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ y la forma lineal T_g es equivalente.

3) Sobreyectividad. Lo único que queda por verificar es que toda forma lineal continua definida sobre $L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ puede representarse por medio de la expresión (4).

Empecemos suponiendo que se tiene $\mu(X) < +\infty$. Utilizando los mismos argumentos utilizados en los Teoremas 2 y 5, si T es una forma lineal continua definida sobre el espacio $L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$, podemos definir una medida por medio de la expresión $\nu(A) = T(\mathbb{1}_A)$, para todo $A \in \mathscr{A}$ y como se tiene

$$|\nu(A)| \leq \|T\|_{(L^{p,q})'}\|\mathbb{1}_A\|_{L^{p,q}} = C(p,q)\|T\|_{(L^{p,q})'}\mu(A)^{\frac{1}{p}},$$

deducimos que la medida ν es absolutamente continua con respecto a la medida μ, entonces aplicando el Teorema de Radon-Nikodym obtenemos una función integrable $g : X \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que

$$\sigma(A) = T(\mathbb{1}_A) = \int_X \mathbb{1}_A g(x)d\mu(x).$$

La linealidad de esta expresión permite considerar una expresión del tipo

$$T(f) = \int_X f(x)g(x)d\mu(x),$$

en donde f es una función simple integrable.

Mostremos ahora que la función g anterior pertenece al espacio de Lorentz $L^{p',q'}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$. Consideremos pues el conjunto $E_n = \{x \in X : |g(x)| \leq n\}$, tenemos entonces que la función $g\mathbb{1}_{E_n}$ es acotada y pertenece al espacio de Lorentz $L^{p',q'}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ puesto que estamos trabajando sobre un conjunto X de medida finita. Si consideramos ahora $T(f\mathbb{1}_{E_n}) = \int_X f(x)g(x)\mathbb{1}_{E_n}d\mu(x)$, tenemos la estimación

$$|T(f\mathbb{1}_{E_n})| \leq \|f\|_{L^{p,q}}\|g\mathbb{1}_{E_n}\|_{L^{p',q'}},$$

pero por el punto 2) anterior sabemos que se tiene la desigualdad uniforme $\|g\mathbb{1}_{E_n}\|_{L^{p',q'}} \leq C(p,q)\|T\|_{(L^{p,q})'}$, de manera que por el Lema de Fatou obtenemos que la función g pertenece al espacio $L^{p',q'}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$. Por la continuidad de la forma lineal T y por densidad de las funciones simples integrables en el espacio $L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$, se deduce la representación integral deseada para la aplicación T. Por la continuidad de la aplicación T y por densidad de las funciones simples integrables, obtenemos que se tiene esta representación para toda función $f \in L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ y para toda aplicación lineal continua $T \in (L^{p,q})'$.

Si la medida del conjunto X no es finita, utilizamos la hipótesis de σ-finitud para poder razonar localmente sobre conjuntos de medida finita que recubren todo el espacio X y obtener de esta manera funciones g_n que proporcionan (localmente) la representación integral deseada. Ahora, dado que se tiene la estimación uniforme $\|g_n\|_{L^{p',q'}} \leq C(p,q)\|T\|_{(L^{p,q})'}$, podemos reconstruir todo el espacio X y obtener de esta manera una función $g \in L^{p',q'}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ que nos permite escribir, para toda función $f \in L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ la expresión integral buscada. $\blacksquare$

Corolario 1 (Reflexividad) *Sea $(X,\mathscr{A},\mu)$ un espacio medido σ-finito y no atómico. Si los parámetros reales p,q verifican $1<p<+\infty$ y $1<q<+\infty$, y si p',q' verifican las relaciones*

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1 \qquad y \qquad \frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1,$$

entonces los espacios de Lorentz $L^{p,q}(X,\mathscr{A},\mu,\mathbb{K})$ son reflexivos.

Este resultado es inmediato por las relaciones entre los índices que caracterizan los espacios de Lorentz, y obtenemos entonces que es posible identificar el espacio de Lorentz $L^{p,q}$ con su espacio bidual $(L^{p,q})''$. Una consecuencia importante de esta identificación es que la topología débil y débil-$*$ coinciden y de esta manera tenemos a nuestra disposición todos los resultados expuestos en la Sección 1.4.3 del Volumen 2.

Finalmente, presentamos una cuarta forma de definir a los espacios de Lorentz: en efecto, utilizando la dualidad tenemos:

Corolario 2 *Sea $(X,\mathscr{A},\mu)$ un espacio medido σ-finito y no atómico. Si $1<p,q<+\infty$ y si $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$, entonces tenemos la caracterización siguiente:*

1) $\|f\|_{L^{p,q}}=\sup\limits_{\|g\|_{L^{p',q'}}\leq 1}\left|\int_X f(x)g(x)d\mu(x)\right|$,

2) simétricamente se tiene $\|g\|_{L^{p',q'}}=\sup\limits_{\|f\|_{L^{p,q}}\leq 1}\left|\int_X f(x)g(x)d\mu(x)\right|$.

3.3. Caso cuando $1<p<+\infty$ y $q=+\infty$.

Teorema 7 *Sea $(X,\mathscr{A},\mu)$ un espacio medido σ-finito y no atómico. Si $1<p,p'<+\infty$ son dos parámetros que verifican $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ entonces no se puede identificar el espacio dual $(L^{p,\infty})'$ con el espacio de Lorentz $L^{p',1}(X,\mathscr{A},\mu,\mathbb{K})$. Dicho de otra manera se tiene*

$$(L^{p,\infty})'\neq L^{p',1}.$$

Demostración. Por simplicidad, trabajaremos sobre el conjunto $X=[0,+\infty[$ dotado de su estructura de espacio medido natural. Sea ahora A un intervalo tal que $0<|A|<+\infty$ y para una función $f\in L^{p,\infty}(X,\mathscr{A},\mu,\mathbb{K})$ definimos la funcional

$$N(f)=\limsup_{t\to 0} t^{\frac{2}{p}}(f\mathbb{1}_A)^{**}_{p(1-t)}(t).$$

Si $0<t<1-\frac{1}{p}$, entonces $1<p(1-t)$ y se tiene que la cantidad $t^{\frac{2}{p}}(f\mathbb{1}_A)^{**}_{p(1-t)}(t)$ es subaditiva, de manera que si f,g son dos funciones que pertenecen al espacio $L^{p,\infty}(X,\mathscr{A},\mu,\mathbb{K})$ se tiene

$$N(f+g)\leq N(f)+N(g),$$

nótese además que se tiene para todo $\lambda\in\mathbb{K}$ la identidad $N(\lambda f)=|\lambda|N(f)$ y gracias a estas dos propiedades tenemos que la funcional N definida sobre el espacio $L^{p,\infty}(X,\mathscr{A},\mu,\mathbb{K})$ es una semi-norma. Verifiquemos ahora que esta semi-norma es continua con respecto a la topología inicial de este espacio de Lorentz. En efecto, por definición de función maximal y por la definción de la funcional $\|\cdot\|_{L^{p,\infty}}$ se tiene

$$\begin{aligned} t^{\frac{2}{p}}(f\mathbb{1}_A)^{**}_{p(1-t)}(t) &= t^{\frac{2}{p}}\left(\frac{1}{t}\int_0^t ((f\mathbb{1}_A(s))^*)^{p(1-t)}\,ds\right)^{\frac{1}{p(1-t)}} \leq t^{\frac{2}{p}}\left(\frac{1}{t}\int_0^t (f^*(s))^{p(1-t)}\,ds\right)^{\frac{1}{p(1-t)}}\\ &\leq \sup_{s>0}\{s^{\frac{1}{p}}f^*(s)\}\; t^{\frac{2}{p}}\left(\frac{1}{t}\int_0^t s^{-(1-t)}ds\right)^{\frac{1}{p(1-t)}} \leq \|f\|_{L^{p,\infty}}\; t^{-\frac{t}{p(1-t)}}, \end{aligned}$$

de manera que al pasar al límite $t\to 0$ se tiene la mayoración $N(f)\leq\|f\|_{L^{p,\infty}}$ de donde se obtiene la continuidad deseada. Nótese finalmente que esta semi-norma N no es trivial, pues por los mismos cálculos anteriores se tiene

$N(f) \geq 1$, para toda función que verifica $(x^{-\frac{1}{p}})^* \leq f^*$.

Con estos preliminares, vamos a verificar ahora que esta semi-norma N permite construir una forma lineal continua T sobre el espacio $L^{p,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ que no se puede representar de la forma $T(f) = \int_X f(x)g(x)d\mu(x)$ para alguna función $g \in L^{p',1}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$. Sea pues T una forma lineal no nula que verifica $T(f) \leq N(f)$ para todo $f \in L^{p,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ (la existencia de esta forma lineal es una consecuencia del Teorema de Hahn-Banach, ver el Lema 1.2.3 del Volumen 2) y que se representa por medio de esta formulación integral con una cierta función (no nula) g. Para un cierto $\varepsilon > 0$ consideremos el conjunto $A_\varepsilon = \{x \in X : |g(x)| > \varepsilon\}$, dado que la función g pertenece al espacio $L^{p',1}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$, se tiene que este conjunto es de medida finita, de manera que si definimos una función $f(x) = \mathbb{1}_{A_\varepsilon} \overline{sign(g)}$ vemos sin problema por un lado que se tiene $f \in L^{p,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ y por otro lado que

$$T(f) = \int_X f(x)g(x)d\mu(x) = \int_{A_\varepsilon} |g(x)|d\mu(x).$$

Pero un cálculo directo muestra que $N(f) = 0$ y como $T(f) \leq N(f) = 0$, esto implica que la medida del conjunto A_ε debe ser nula, lo que a su vez implica (al ser $\varepsilon > 0$ arbitrario) que la función g debe ser nula en casi todas partes, obteniendo de esta manera una contradicción. Hemos demostrado entonces que los espacios $L^{p,\infty}$ y $L^{p',1}$ no pueden ser puestos en dualidad. ■

*

En el siguiente cuadro resumimos el estudio de los espacios duales en los espacios de Lorentz $L^{p,q}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$, donde el espacio medido $(X, \mathscr{A}, \mu)$ es σ-finito y no atómico.

	$0 < p < 1$	$p = 1$	$1 < p < +\infty$	$p = +\infty$
$0 < q < 1$	$(L^{p,q})' = \{0\}$	$(L^{1,q})' \sim L^\infty$	$(L^{p,q})' \sim L^{p',\infty}$	no definido
$q = 1$	$(L^{p,1})' = \{0\}$	$(L^{1,1})' \simeq L^\infty$	$(L^{p,1})' \sim L^{p',\infty}$	no definido
$1 < q < +\infty$	$(L^{p,q})' = \{0\}$	$(L^{1,q})' = \{0\}$	$(L^{p,q})' \sim L^{p',q'}$	no definido
$q = +\infty$	$(L^{p,\infty})' = \{0\}$	$(L^{1,\infty})' \neq \{0\}$ no trivial	$(L^{p,\infty})' \neq \{0\}$ no trivial	$(L^{\infty,\infty})' \simeq \mathscr{E}$

Figura 1: Espacios duales $L^{p,q}$ (con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ y $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$).