Lección n°5: Espacios de Lorentz $L^{p,q}$: aplicaciones

EPN, septiembre 2018

Índice

1. Desigualdades Importantes

1.1. Desigualdades Hardy-Littlewood-Sobolev

Definición 1 (Potencial de Riesz) *Sea $\alpha > 0$ un real. Para una función medible suficientemente regular $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$ definimos el* potencial de Riesz de orden α *como el operador I_α dado por la expresión*

$$I_\alpha(f)(x) = C(n,\alpha)\int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x-y)}{|y|^{n-\alpha}}dy, \tag{1}$$

en donde $C(n,\alpha) > 0$ es una constante de normalización.

Teorema 1 (Desigualdades de Hardy-Littlewood-Sobolev) *Sea n la dimensión del espacio $\mathbb{R}^n$ y sea $0 < \alpha < \frac{n}{p}$ un real. Si $1 \leq p < q < +\infty$ son dos índices reales que verifican la relación*

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n}, \tag{2}$$

entonces

1) Si $1 < p < q < +\infty$, existe una constante universal $C(n,\alpha,p,q) > 0$ tal que para toda función $f \in L^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{R})$ se tiene la desigualdad

$$\|I_\alpha(f)\|_{L^{q,p}} \leq C(n,\alpha,p,q)\|f\|_{L^p}. \tag{3}$$

2) Si $p = 1$ y $1 < q < +\infty$, existe una constante universal $C(n,\alpha,q) > 0$ tal que para toda función $f \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{R})$ se tiene la mayoración

$$\|I_\alpha(f)\|_{L^{q,\infty}} \leq C(n,\alpha,q)\|f\|_{L^1}. \tag{4}$$

Como vemos con este teorema, tenemos que el potencial de Riesz de orden α está *bien definido* (en el sentido de la norma L^q) cuando la función a la cual se lo aplica es suficientemente regular, es decir que pertenece a un espacio de Lebesgue L^p.

Antes de pasar a la demostración, es importante indicar el rol de la relación (2) entre los índices p, q y α (por simplicidad nos concentramos en el primer punto del teorema). En efecto si aplicamos el potencial de Riesz I_α a la función $f_\lambda(x) = f(\lambda x)$ con $\lambda > 0$ en donde $f \in L^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{R})$, con un cambio de variable obtenemos la identidad

$$I_\alpha(f_\lambda)(x) \quad = \quad C(n,\alpha)\int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(\lambda x - \lambda y)}{|y|^{n-\alpha}}dy = \lambda^{-\alpha}C(n,\alpha)\int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(\lambda x - z)}{|z|^{n-\alpha}}dz = \lambda^{-\alpha}I_\alpha(f)(\lambda x),$$

y junto con las propiedades de homogeneidad de los espacios de Lebesgue tenemos por un lado la identidad $\|I_\alpha(f_\lambda)\|_{L^{q,p}} = \lambda^{-\alpha-\frac{n}{q}}\|I_\alpha(f)\|_{L^{q,p}}$ y por otro lado $\|f_\lambda\|_{L^p} = \lambda^{-\frac{n}{p}}\|f\|_{L^p}$, de manera que reemplazando estas expresiones en las desigualdades de Hardy-Littlewood-Sobolev tenemos:

$$\lambda^{-\alpha-\frac{n}{q}}\|I_\alpha(f)\|_{L^{q,p}} \leq \lambda^{-\frac{n}{p}}C(n,\alpha,q)\|f\|_{L^p}.$$

Si se tiene $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} > \frac{\alpha}{n}$, entonces reescribimos la estimación anterior como

$$\lambda^{\frac{n}{p}-\frac{n}{q}-\alpha}\|I_\alpha(f)\|_{L^{q,p}} \leq C(n,\alpha,q)\|f\|_{L^p},$$

y al hacer tender $\lambda \to +\infty$ obtenemos entonces que $\|f\|_{L^p} = +\infty$, contradiciendo el hecho $f \in L^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{R})$. Si se tiene en cambio $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} < \frac{\alpha}{n}$, hacemos tender $\lambda \to 0$ en la expresión anterior para obtener el mismo tipo de contradicción.

Gracias a este simple argumento de *homogeneidad*, vemos que es indispensable tener la relación (2) entre los índices p, q y α si se desea obtener las desigualdades buscadas.

Demostración. Para empezar observemos que el potencial de Riesz I_α se escribe como un producto de convolución

$$I_\alpha(f) = K_\alpha * f,$$

en donde el núcleo de convolución está dado por la función $K_\alpha = \frac{1}{|x|^{n-\alpha}}$. En este punto recordamos que las funciones de tipo $\frac{1}{|x|^{n-\alpha}}$ pertenecen a los espacios de Lorentz $L^{r,\infty}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{R})$ cuando $r = \frac{n}{n-\alpha}$. Tenemos entonces:

1) Si $1 < p < q < +\infty$, utilizando las desigualdades de Young-O'Neil podemos escribir

$$\|I_\alpha(f)\|_{L^{q,p}} = \|K_\alpha * f\|_{L^{q,p}} \leq \|K_\alpha\|_{L^{r,\infty}}\|f\|_{L^{p,p}},$$

en donde los índices q, r y p deben verificar $\frac{1}{r} + \frac{1}{p} = 1 + \frac{1}{q}$, de esta manera si $r = \frac{n}{n-\alpha}$, se tiene por un lado $\|K_\alpha\|_{L^{r,\infty}} \leq C(n,\alpha,p,q)$ y por otro se tiene la relación (2), y obtenemos de esta manera la desigualdad buscada.

2) En el caso $p = 1$, si $1 < q < +\infty$ y por los mismos argumentos anteriores podemos escribir

$$\|I_\alpha(f)\|_{L^{q,\infty}} = \|K_\alpha * f\|_{L^{q,\infty}} \leq C\|K_\alpha\|_{L^{r,\infty}}\|f\|_{L^1},$$

en donde esta vez los índices q, r verifican $1 < q, r < +\infty$ y $1 + \frac{1}{r} = 1 + \frac{1}{q}$. Pero como $r = \frac{n}{n-\alpha}$, se tiene $\|K_\alpha\|_{L^{r,\infty}} \leq C(n,\alpha,q)$ y $1 - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n}$, de donde se deduce la mayoración deseada. ■

Tendremos la oportunidad de exponer varias demostraciones de este teorema en donde diferentes herramientas serán utilizadas. Una ventaja de la demostración anterior es que es muy *directa* pues se basa únicamente en desigualdades de convolución.

1.2. Desigualdades Sobolev

Recordemos que si $\Delta = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \partial^2_{x_j}$ es el operador Laplaciano, entonces para una función $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$ suficientemente regular se tiene la identidad al nivel de la variable de Fourier $\widehat{\Delta f}(\xi) = -|\xi|^2 \widehat{f}(\xi)$, que reescribimos de la siguiente manera

$$\widehat{(-\Delta) f}(\xi) = |\xi|^2 \widehat{f}(\xi).$$

Vemos entonces que las dos derivadas que provienen del operador Laplaciano $(-\Delta)$ se transforman al nivel de Fourier en la multiplicación por el peso $|\xi|^2$. Ahora, para $\alpha > 0$, podemos definir (al menos formalmente) la *potencia fraccionaria* α-ésima $(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}$ del operador Laplaciano por medio de la expresión

$$\widehat{(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} f}(\xi) = |\xi|^{\alpha} \widehat{f}(\xi),$$

y simétricamente podemos considerar expresiones del tipo

$$\widehat{(-\Delta)^{-\frac{\alpha}{2}} f}(\xi) = |\xi|^{-\alpha} \widehat{f}(\xi).$$

De esta manera tenemos que el potencial de Riesz de orden α se puede reescribir de la forma $I_\alpha = (-\Delta)^{-\frac{\alpha}{2}}$. Nótese además que estas dos fórmulas anteriores son muy intuitivas y en particular nos permiten escribir la identidad

$$I_\alpha\big((-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} f\big) = (-\Delta)^{-\frac{\alpha}{2}} (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} f = f. \tag{5}$$

Con estos preliminares, podemos regresar a las desigualdades de Hardy-Littlewood-Sobolev (3) y si las aplicamos a una función $f = (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} \varphi$ tenemos por un lado

$$\|I_\alpha(f)\|_{L^{q,p}} = \|I_\alpha\big((-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} \varphi\big)\|_{L^{q,p}} \leq C \|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} \varphi\|_{L^p},$$

con $1 < p < q < +\infty$, $0 < \alpha < n$ y $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n}$.

Por otro lado, por las fórmulas anteriores tenemos

$$\|I_\alpha(f)\|_{L^{q,p}} = \|(-\Delta)^{-\frac{\alpha}{2}}(f)\|_{L^{q,p}} = \|(-\Delta)^{-\frac{\alpha}{2}} (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} \varphi\|_{L^{q,p}} = \|\varphi\|_{L^{q,p}},$$

de donde se deducen entonces las desigualdades de Sobolev

Teorema 2 (Desigualdades de Sobolev en espacios de Lorentz) *Sean $1 < p < q < +\infty$, $0 < \alpha < \frac{n}{p}$ tres reales relacionados por la condición $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n}$. Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función suficientemente regular tal que $(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} f \in L^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{R})$, entonces tenemos la desigualdad*

$$\|f\|_{L^{q,p}} \leq C \|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} f\|_{L^p}. \tag{6}$$

Observación 1 Dado que $1 < p < q < +\infty$, se tiene la inclusión de espacios $L^{q,p} \subset L^{q,q}$, lo que nos permite obtener las desigualdades de Sobolev clásicas, es decir en donde únicamente intervienen espacios de Lebesgue:

$$\|f\|_{L^q} \leq C \|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} f\|_{L^p}. \tag{7}$$

1.3. Desigualdades de Hardy

Teorema 3 (Desigualdades de Hardy) *Sean $1 < p < +\infty$ y $0 < \alpha < \frac{n}{p}$ dos reales. Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función suficientemente regular tal que $(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} f \in L^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{R})$, entonces tenemos la desigualdad*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|^p}{|x|^{\alpha p}} dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} f\|_{L^p}.$$

Demostración. Empecemos aplicando las desigualdades de Hölder con $a = \frac{n}{\alpha p} > 1$ y $b = \frac{n}{n-\alpha p} > 1$ (que verifican $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$), tenemos entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|^p}{|x|^{\alpha p}} dx \leq C \left\| \frac{1}{|x|^{\alpha p}} \right\|_{L^{a,\infty}} \||f|^p\|_{L^{b,1}}.$$

Tenemos que la función $\frac{1}{|x|^{\alpha p}}$ pertenece al espacio $L^{a,\infty}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx, \mathbb{R})$ y tenemos la identidad $\||f|^p\|_{L^{b,1}} = \|f\|^p_{L^{pb,p}}$, lo que nos permite escribir (remplazando b por el valor $\frac{n}{n-\alpha p}$)

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|^p}{|x|^{\alpha p}} dx \leq C \|f\|^p_{L^{\frac{np}{n-\alpha p},p}}.$$

En este punto, por las relaciones entre los índices α, p y n podemos aplicar las desigualdades de Sobolev en los espacios de Lorentz (6) para obtener

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|^p}{|x|^{\alpha p}} dx \leq C \|f\|^p_{L^{\frac{np}{n-\alpha p},p}} \leq C \|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} f\|^p_{L^p},$$

basta entonces extraer la raíz p-ésima de esta estimación anterior para obtener el resultado deseado. ■

Observación 2 Es importante notar que la demostración que acabamos de presentar para obtener las desigualdades de Hardy se basa en las desigualdades de Sobolev en los espacios de Lorentz (6) y que las desigualdades de Sobolev clásicas (7) que hacen intervenir únicamente espacios de Lebesgue no son suficientes para concluir: esto muestra la utilidad de pasar por los espacios de Lorentz.

2. Interpolación

2.1. Espacio $L^{p_0} + L^{p_1}$

Definición 2 (Espacio $L^{p_0} + L^{p_1}$) *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido σ-finito y sean $0 < p_0 < p_1 \leq +\infty$ dos parámetros reales. Definimos el espacio $L^{p_0} + L^{p_1}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ como el conjunto de funciones medibles $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ que se pueden descomponer como*

$$f = f_0 + f_1,$$

en donde f_0 pertenece al espacio de Lebesgue $L^{p_0}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ y f_1 pertenece al espacio de Lebesgue $L^{p_1}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$.

Caracterizamos la pertenencia de una función medible f a este espacio si se tiene la condición

$$\|f\|_{L^{p_0}+L^{p_1}} = \inf_{f=f_0+f_1} \{\|f_0\|_{L^{p_0}} + \|f_1\|_{L^{p_1}}\} < +\infty, \tag{8}$$

en donde el ínfimo corre sobre todas las descomposiciones $f = f_0 + f_1$ posibles.

Nótese que si $f = f_0 + f_1$ es una descomposición particular de la función f, se tiene siempre la desigualdad

$$\|f\|_{L^{p_0}+L^{p_1}} \leq \|f_0\|_{L^{p_0}} + \|f_1\|_{L^{p_1}}.$$

Observemos además que si anulamos uno de los dos términos de la suma $f = f_0 + f_1$, es inmediato ver que se tienen las inclusiones $L^{p_0}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K}) \subset L^{p_0} + L^{p_1}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ y $L^{p_1}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K}) \subset L^{p_0} + L^{p_1}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$, de manera que la *suma* de estos dos espacios es efectivamente un conjunto más grande.

Proposición 1 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido σ-finito y sean $0 < p_0 < p_1 \leq +\infty$ dos parámetros reales. Si $p_0 < p < p_1$, entonces se tiene la inclusión*

$$L^{p,\infty}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K}) \subset L^{p_0} + L^{p_1}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K}).$$

Prueba. Supongamos para empezar que se tiene $0 < p_0 < p < p_1 < +\infty$ y sea f una función que pertenece al espacio $L^{p,\infty}(X,\mathscr{A},\mu,\mathbb{K})$. Si γ es una constante positiva fija, definimos entonces las funciones f_0 y f_1 por medio de las expresiones siguientes:

$$f_0(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)|>\gamma,\\ 0 & \text{si } |f(x)|\leq\gamma,\end{cases} \qquad \text{y} \qquad f_1(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)|\leq\gamma,\\ 0 & \text{si } |f(x)|>\gamma.\end{cases}$$

Sin problema vemos que se tiene por construcción la identidad $f=f_0+f_1$. Ahora, si estudiamos la función de distribución de la función f_0 tenemos si $\alpha>\gamma$:

$$d_{f_0}(\alpha)=\mu(\{x\in X:|f_0(x)|>\alpha\})=\mu(\{x\in X:|f(x)|>\alpha\})=d_f(\alpha),$$

y si $\alpha\leq\gamma$ tenemos $d_{f_0}(\alpha)=\mu(\{x\in X:|f_0(x)|>\alpha\})=\mu(\{x\in X:|f(x)|>\gamma\})=d_f(\gamma)$. Simétricamente, para la función f_1 si $\alpha\geq\gamma$ se tiene $d_{f_1}(\alpha)=\mu(\{x\in X:|f_1(x)|>\alpha\})=0$ mientras que si $\alpha<\gamma$ tenemos

$$\begin{aligned} d_{f_1}(\alpha) &= \mu(\{x\in X:|f_1(x)|>\alpha\})=\mu(\{x\in X:\gamma\geq|f(x)|>\alpha\})\\ &= \mu(\{x\in X:|f(x)|>\alpha\}\cap\{x\in X:|f(x)|>\gamma\}^c)\\ &= \mu(\{x\in X:|f(x)|>\alpha\})-\mu(\{x\in X:|f(x)|>\gamma\})=d_f(\alpha)-d_f(\gamma).\end{aligned}$$

Es decir que se tiene

$$d_{f_0}(\alpha)=\begin{cases} d_f(\alpha) & \text{si } \alpha>\gamma,\\ d_f(\gamma) & \text{si } \alpha\leq\gamma,\end{cases} \qquad \text{y} \qquad d_{f_1}(\alpha)=\begin{cases} 0 & \text{si } \alpha\geq\gamma,\\ d_f(\alpha)-d_f(\gamma) & \text{si } \alpha<\gamma.\end{cases}$$

Con estas informaciones, con el hecho que $p_0<p$ y utilizando la caracterización de los espacios de Lebesgue por medio de la función de distribución así como la definición de los espacios de Lorentz, podemos escribir

$$\begin{aligned} \|f_0\|_{L^{p_0}}^{p_0} &= p_0\int_0^{\gamma}\alpha^{p_0-1}d_{f_0}(\alpha)d\alpha+p_0\int_{\gamma}^{+\infty}\alpha^{p_0-1}d_{f_0}(\alpha)d\alpha=p_0\int_0^{\gamma}\alpha^{p_0-1}d_f(\gamma)d\alpha+p_0\int_{\gamma}^{+\infty}\alpha^{p_0-1}d_f(\alpha)d\alpha\\ &\leq d_f(\gamma)\gamma^{p_0}+\sup_{\alpha>0}\{\alpha^p d_f(\alpha)\}\,p_0\int_{\gamma}^{+\infty}\alpha^{p_0-p-1}d\alpha\leq\sup_{\gamma>0}\{\gamma^p d_f(\gamma)\}\gamma^{p_0-p}+\sup_{\alpha>0}\{\alpha^p d_f(\alpha)\}\frac{p_0}{p-p_0}\gamma^{p_0-p}\\ &\leq \frac{p}{p-p_0}\gamma^{p_0-p}\|f\|_{L^{p,\infty}}^p<+\infty.\end{aligned}$$

De la misma manera, como $p<p_1<+\infty$ tenemos

$$\begin{aligned} \|f_1\|_{L^{p_1}}^{p_1} &= p_1\int_0^{\gamma}\alpha^{p_1-1}d_{f_1}(\alpha)d\alpha+p_1\int_{\gamma}^{+\infty}\alpha^{p_1-1}d_{f_1}(\alpha)d\alpha=p_1\int_0^{\gamma}\alpha^{p_1-1}\left(d_f(\alpha)-d_f(\gamma)\right)d\alpha\\ &= p_1\int_0^{\gamma}\alpha^{p_1-p-1}\alpha^p d_f(\alpha)d\alpha-d_f(\gamma)\gamma^{p_1}\leq\sup_{\alpha>0}\{\alpha^p d_f(\alpha)\}\frac{p_1}{p_1-p}\gamma^{p_1-p}-\sup_{\gamma>0}\{\gamma^p d_f(\gamma)\}\gamma^{p_1-p}\\ &\leq \frac{p}{p_1-p}\gamma^{p_1-p}\|f\|_{L^{p,\infty}}^p<+\infty.\end{aligned}$$

De esta forma hemos obtenido que la función $f\in L^{p,\infty}(X,\mathscr{A},\mu,\mathbb{K})$ se descompone como la suma de dos funciones $f=f_0+f_1$ en donde $f_0\in L^{p_0}(X,\mathscr{A},\mu,\mathbb{K})$ y $f_1\in L^{p_1}(X,\mathscr{A},\mu,\mathbb{K})$ con $0<p_0<p<p_1<+\infty$. El caso cuando $p_1=+\infty$ es inmediato pues por construcción se tiene $\|f_1\|_{L^\infty}\leq\gamma<+\infty$. ■

Corolario 1 *Sea $(X,\mathscr{A},\mu)$ un espacio medido. Si $0<p_0<p<p_1\leq+\infty$ y si $0<q<+\infty$, entonces se tiene la inclusión de espacios*

$$L^{p,q}(X,\mathscr{A},\mu,\mathbb{K})\subset L^{p_0}+L^{p_1}(X,\mathscr{A},\mu,\mathbb{K}).$$

En particular, gracias a la identificación $L^{p,p}=L^p$, todo espacio de Lebesgue L^p con $p_0<p<p_1$ pertenece al espacio $L^{p_0}+L^{p_1}$.

Prueba. Por la inclusión entre espacios de Lorentz, basta observar que para un parámetro $0<p<+\infty$ fijo y para todo $0<q<+\infty$ se tiene la inclusión $L^{p,q}(X,\mathscr{A},\mu,\mathbb{K})\subset L^{p,\infty}(X,\mathscr{A},\mu,\mathbb{K})$. ■

Como podemos ver con estos dos resultados, si fijamos los índices p_0, p, p_1 tales que $0 < p_0 < p < p_1 \leq +\infty$, entonces el espacio $L^{p_0} + L^{p_1}$ contiene a *todos* los espacios de Lebesgue L^p y de Lorentz $L^{p,q}$ y de este modo obtenemos un espacio que servirá de marco de referencia para los teoremas siguientes.

Antes de entrar en un estudio sistemático de este tipo de espacios $L^{p_0}+L^{p_1}$ (lo cual será realizado más adelante) damos una última propiedad interesante.

Proposición 2 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido y sea $0 < p_0 < p_1 < +\infty$ dos índices reales. Entonces el conjunto de funciones simples integrables definidas sobre $(X, \mathscr{A}, \mu)$ a valores en $\mathbb{K}$ es denso en el espacio $L^{p_0} + L^{p_1}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$.*

Prueba. La verificación es relativamente directa. En efecto, si $f \in L^{p_0} + L^{p_1}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$, con $0 < p_0 < p_1 < +\infty$, entonces se tiene la descomposición $f = f_0 + f_1$ en donde $f_0 \in L^{p_0}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ y $f_1 \in L^{p_1}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$. Puesto que se tiene $0 < p_0 < p_1 < +\infty$, las funciones simples integrables son densas en los espacios de Lebesgue $L^{p_j}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$, $j = 0, 1$, y para todo $\varepsilon > 0$, existen dos funciones simples φ y ψ tales que $\|f_0 - \varphi\|_{L^{p_0}} \leq \varepsilon/2$ y $\|f_1 - \psi\|_{L^{p_1}} \leq \varepsilon/2$. Si definimos $\phi = \varphi + \psi$ entonces tenemos

$$\|f - \phi\|_{L^{p_0}+L^{p_1}} \leq \|f_0 - \varphi\|_{L^{p_0}} + \|f_1 - \psi\|_{L^{p_1}} \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

de donde se obtiene la densidad buscada. ■

2.2. Teorema de interpolación de Marcinkiewicz

Teorema 4 (de interpolación de Marcinkiewicz) *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido y sean $0 < p_0 < p_1 \leq +\infty$ dos parámetros reales. Sea T un operador sublineal definido sobre el espacio $L^{p_0} + L^{p_1}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ y a valores en el espacio $\mathcal{M}_0(X, \mathscr{A})$ de funciones medibles, finitas en casi todas partes, definidas sobre X a valores en $\mathbb{K}$, es decir*

$$\begin{array}{rcl} T : L^{p_0} + L^{p_1} & \longrightarrow & \mathcal{M}_0 \\ f & \longmapsto & T(f). \end{array}$$

Supongamos que existen dos constantes positivas C_0 y C_1 tales que:

$$\|T(f)\|_{L^{p_0,\infty}} \leq C_0 \|f\|_{L^{p_0}}, \quad \textit{para toda función } f \in L^{p_0}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K}), \tag{9}$$

$$\|T(f)\|_{L^{p_1,\infty}} \leq C_1 \|f\|_{L^{p_1}}, \quad \textit{para toda función } f \in L^{p_1}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K}). \tag{10}$$

Entonces, para todo $p_0 < p < p_1$ y para toda función $f \in L^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$, tenemos la estimación:

$$\|T(f)\|_{L^p} \leq C \|f\|_{L^p},$$

en donde $C = 2\left(\frac{p}{p-p_0} + \frac{p}{p_1-p}\right)^{\frac{1}{p}} C_0^{\frac{1/p-1/p_1}{1/p_0-1/p_1}} C_1^{\frac{1/p_0-1/p}{1/p_0-1/p_1}}$.

Antes de pasar a la demostración, es importante hacer algunas observaciones. Notemos para empezar que el operador T está definido sobre el conjunto $L^{p_0} + L^{p_1}$ que contiene por construcción a los espacios de Lebesgue L^{p_0} y L^{p_1}. En particular, si bien el operador está definido sobre un espacio muy grande, las desigualdades (10) y (10) exigen un control en términos de estos dos espacios de Lebesgue. Observemos luego que estas estimaciones hacen intervenir espacios de Lorentz, es decir que el operador T es de tipo p_0-débil y p_1-débil lo cual permite considerar un número muy consecuente de operadores como tendremos la oportunidad de verlo. Finalmente, bajo estas hipótesis, la conclusión es que el operador T de tipo p-fuerte.

Demostración. Supongamos para comenzar que $0 < p_1 < +\infty$. Fijemos una función $f \in L^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ con $p_0 < p < p_1 < +\infty$ y un parámetro $\alpha > 0$. Siguiendo las ideas de la Proposición 1, descomponemos la función f

como una suma de funciones $f = f_0 + f_1$ en donde

$$f_0(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| > \delta\alpha, \\ 0 & \text{si } |f(x)| \leq \delta\alpha, \end{cases} \quad \text{y} \quad f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| \leq \delta\alpha, \\ 0 & \text{si } |f(x)| > \delta\alpha. \end{cases}$$

Aquí $\delta > 0$ es un parámetro positivo cuyo valor será determinado posteriormente. Por el Corolario 1 tenemos que la función f_0 pertenece al espacio $L^{p_0}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ mientras que la función f_1 pertenece al espacio $L^{p_1}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$.

Utilicemos ahora la hipótesis de sublinealidad del operador T para obtener la desigualdad

$$|T(f)| = |T(f_0 + f_1)| \leq |T(f_0)| + |T(f_1)|,$$

que implica las inclusiones de conjuntos

$$\{x \in X : |T(f)(x)| > \alpha\} \subseteq \{x \in X : |T(f_0)| > \alpha/2\} \cup \{x \in X : |T(f_1)| > \alpha/2\},$$

de donde se obtiene, al nivel de las funciones de distribución, la estimación

$$d_{T(f)}(\alpha) \leq d_{T(f_0)}(\alpha/2) + d_{T(f_1)}(\alpha/2). \tag{11}$$

Por definición de la funcional $\|\cdot\|_{L^{p,\infty}}$, tenemos

$$d_{T(f)}(\alpha) \leq (\alpha/2)^{-p_0} \|T(f_0)\|^{p_0}_{L^{p_0,\infty}} + (\alpha/2)^{-p_1} \|T(f_1)\|^{p_1}_{L^{p_1,\infty}},$$

de esta manera, junto con las desigualdades dadas por las hipótesis (10) y (10) y con la definición de las funciones f_0 y f_1, se tiene

$$\begin{aligned} d_{T(f)}(\alpha) &\leq (\alpha/2)^{-p_0} C_0^{p_0} \|f_0\|^{p_0}_{L^{p_0}} + (\alpha/2)^{-p_1} C_1^{p_1} \|f_1\|^{p_1}_{L^{p_1}} \\ &\leq (\alpha/2)^{-p_0} C_0^{p_0} \int_X |f_0(x)|^{p_0} d\mu(x) + (\alpha/2)^{-p_1} C_1^{p_1} \int_X |f_1(x)|^{p_1} d\mu(x) \\ &\leq \frac{C_0^{p_0}}{(\alpha/2)^{p_0}} \int_{\{|f| > \delta\alpha\}} |f(x)|^{p_0} d\mu(x) + \frac{C_1^{p_1}}{(\alpha/2)^{p_1}} \int_{\{|f| \leq \delta\alpha\}} |f(x)|^{p_1} d\mu(x). \end{aligned}$$

Con esta información sobre $d_{T(f)}(\alpha)$, vamos a reconstruir la funcional $\|T(f)\|_{L^p}$ utilizando la caracterización que se basa en las funciones de distribución

$$\begin{aligned} \|T(f)\|^p_{L^p} &= p \int_0^{+\infty} \alpha^{p-1} d_{T(f)}(\alpha) d\alpha \\ &\leq p \int_0^{+\infty} \alpha^{p-1} \left(\frac{C_0^{p_0}}{(\alpha/2)^{p_0}} \int_{\{|f| > \delta\alpha\}} |f(x)|^{p_0} d\mu(x) + \frac{C_1^{p_1}}{(\alpha/2)^{p_1}} \int_{\{|f| \leq \delta\alpha\}} |f(x)|^{p_1} d\mu(x) \right) d\alpha \\ &\leq (2C_0)^{p_0} p \int_0^{+\infty} \alpha^{p-p_0-1} \int_{\{|f| > \delta\alpha\}} |f(x)|^{p_0} d\mu(x) d\alpha + (2C_1)^{p_1} p \int_0^{+\infty} \alpha^{p-p_1-1} \int_{\{|f| \leq \delta\alpha\}} |f(x)|^{p_1} d\mu(x) d\alpha. \end{aligned}$$

En este punto aplicamos el teorema de Fubini (recordamos que por hipótesis se tiene $0 < p_0 < p < p_1 < +\infty$) para obtener la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \|T(f)\|^p_{L^p} &\leq (2C_0)^{p_0} p \int_X |f(x)|^{p_0} \int_0^{|f|/\delta} \alpha^{p-p_0-1} d\alpha d\mu(x) + (2C_1)^{p_1} p \int_X |f(x)|^{p_1} \int_{|f|/\delta}^{+\infty} \alpha^{p-p_1-1} d\alpha d\mu(x) \\ &\leq (2C_0)^{p_0} \frac{p}{p-p_0} \int_X |f(x)|^{p_0} \frac{|f(x)|^{p-p_0}}{\delta^{p-p_0}} d\mu(x) + (2C_1)^{p_1} \frac{p}{p_1-p} \int_X |f(x)|^{p_1} \frac{|f(x)|^{p-p_1}}{\delta^{p-p_1}} d\mu(x), \end{aligned}$$

de donde se deduce la desigualdad

$$\|T(f)\|^p_{L^p} \leq \left((2C_0)^{p_0} \frac{p}{p-p_0} \delta^{p_0-p} + (2C_1)^{p_1} \frac{p}{p_1-p} \delta^{p_1-p} \right) \|f\|^p_{L^p}.$$

Para terminar la demostración en el caso cuando $p_1 < +\infty$, es suficiente fijar el parámetro δ como $\delta = 2C_0^{\frac{p_0}{p_1-p_0}} C_1^{\frac{p_1}{p_0-p_1}}$ y extraer la raíz p-ésima de la estimación anterior.

Estudiemos ahora el caso cuando $p_1 = +\infty$. Utilizamos la misma descomposición $f = f_0 + f_1$ anterior y observamos que, por hipótesis, tenemos la estimación $\|T(f_1)\|_{L^\infty} \leq C_1 \|f_1\|_{L^\infty} \leq A_1\delta\alpha = \alpha/2$, siempre y cuando fijemos $\delta = \frac{1}{2C_1}$. Se deduce de esto que el conjunto $\{x \in X : |T(f_1)| > \alpha/2\}$ es de medida cero, por lo tanto en vez de (11) tenemos simplemente

$$d_{T(f)}(\alpha) \leq d_{T(f_0)}(\alpha/2),$$

con las hipótesis sobre el operador T podemos escribir

$$d_{T(f)}(\alpha) \leq (\alpha/2)^{-p_0} \|T(f_0)\|^{p_0}_{L^{p_0,\infty}} \leq (\alpha/2)^{-p_0} C_0^{p_0} \|f_0\|^{p_0}_{L^{p_0}}.$$

Reconstruimos entonces la funcional $\|T(f)\|_{L^p}$ utilizando la función de distribución:

$$\begin{aligned}
\|T(f)\|^p_{L^p} &= p\int_0^{+\infty} \alpha^{p-1} d_{T(f)}(\alpha)d\alpha \leq p\int_0^{+\infty} \alpha^{p-1}\left((\alpha/2)^{-p_0} C_0^{p_0}\|f_0\|^{p_0}_{L^{p_0}}\right)d\alpha \\
&\leq p(2C_0)^{p_0}\int_0^{+\infty} \alpha^{p-p_0-1}\int_X |f_0(x)|^{p_0} d\mu(x)d\alpha \leq p(2C_0)^{p_0}\int_0^{+\infty}\alpha^{p-p_0-1}\int_{\{|f|>\delta\alpha\}} |f(x)|^{p_0}d\mu(x)d\alpha \\
&\leq p(2C_0)^{p_0}\int_0^{+\infty}\alpha^{p-p_0-1}\int_{\{2C_1|f|>\alpha\}} |f(x)|^{p_0}d\mu(x)d\alpha,
\end{aligned}$$

pues hemos fijado $\delta = \frac{1}{2C_1}$. Aplicando el teorema de Fubini obtenemos

$$\|T(f)\|^p_{L^p} \leq (2C_0)^{p_0} p\int_X |f(x)|^{p_0}\int_0^{2C_1|f|}\alpha^{p-p_0-1}d\alpha d\mu(x) \leq (2C_0)^{p_0}\frac{p}{p-p_0}\int_X |f(x)|^{p_0}|f(x)|^{p-p_0}(2C_1)^{p-p_0}d\mu(x),$$

de donde concluimos

$$\|T(f)\|^p_{L^p} \leq 2^p C_0^{p_0} C_1^{p-p_0}\frac{p}{p-p_0}\|f\|^p_{L^p},$$

lo que termina la demostración al extraer la raíz p-ésima en ambos lados de esta desigualdad. ■

2.3. Función Maximal de Hardy-Littlewood

- Funciones de gran importancia en el análisis armónico: una herramienta indispensable
- Ejemplo de operadores que **no** son acotados en L^1 en L^1: ilustración de la necesidad de los espacios de Lorentz

Definición 3 *Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función localmente integrable. Definimos el promedio de f sobre la bola $B = B(x,r)$ como*

$$m_B(f)(x) = \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} f(y)dy$$

Definición 4 (función maximal centrada) *Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función medible. La función maximal centrada de Hardy-Littlewood es:*

$$\mathcal{M}(f)(x) = \sup_{r>0} m_B(|f|)(x) = \sup_{r>0}\frac{1}{v_n r^n}\int_{\{|y|<r\}} |f(x-y)|dy$$

Definición 5 (función maximal no centrada) *Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función medible. La función maximal no centrada de Hardy-Littlewood es:*

$$\mathfrak{M}(f)(x) = \sup_{\delta>0;\ |x-y|<\delta} m_{B(y,\delta)}(|f|)(x)$$

Teorema 5 (Control sobre funciones maximales) *Sea $\varphi \geq 0$ una función continua y decreciente definida sobre $[0, +\infty[$. Si $\Phi(x) = \varphi(|x|)$ es una función integrable sobre $\mathbb{R}^n$ entonces, para toda función f localmente integrable sobre $\mathbb{R}^n$, se tiene la estimación*

$$\sup_{\varepsilon>0}\big(|f| * \Phi_\varepsilon\big)(x) \leq \|\Phi\|_{L^1}\mathcal{M}(f)(x)$$

en donde hemos notado $\Phi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\Phi(\varepsilon^{-1}x)$.

Observación 3

- El operador $\mathcal{M}$ nunca está en $L^1(\mathbb{R}^n)$ si $f \neq 0$.
- Se tiene $\mathcal{M}(f)(x) \leq \mathfrak{M}(f)(x)$.

Teorema 6 *Las funciones maximales $\mathcal{M}$ y $\mathfrak{M}$ son operadores acotados:*

- *de $L^1(\mathbb{R}^n)$ en $L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$*
- *de $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ en $L^\infty(\mathbb{R}^n)$*
- *de $L^p(\mathbb{R}^n)$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$ para todo $1 < p < +\infty$*

Demostración.

- de $L^1(\mathbb{R}^n)$ en $L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$: Dado que $\mathcal{M}(f) \leq \mathfrak{M}(f)$, se tiene la inclusión de conjuntos

$$\{x \in \mathbb{R}^n : |\mathcal{M}(f)(x)| > \alpha\} \subset \{x \in \mathbb{R}^n : |\mathfrak{M}(f)(x)| > \alpha\}.$$

Como $\mathfrak{M}(f)$ es el supremo de funciones continuas, se tiene que $\mathfrak{M}(f)$ es semi-continua inferiormente y el conjunto

$$E_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : |\mathfrak{M}(f)(x)| > \alpha\}$$

es abierto. Sea K un compacto de E_α, entonces para todo $x \in K$ existe una bola B_x tal que:

$$\int_{B_x} |f(y)|dy > \alpha|B_x|$$

Por compacidad de K existe un recubrimiento finito $\{B_{x,1}, ..., B_{x,k}\}$ de K.

Lema 1 (Teorema de recubrimiento) *Sea $\{B_1, ..., B_k\}$ una familia finita de bolas abiertas de $\mathbb{R}^n$. Existe entonces una subcolección finita $\{B_{j,1}, ..., B_{j,l}\}$ formada por bolas disjuntas tales que*

$$\left|\bigcup_{i=1}^{l} B_{j,i}\right| \geq 3^{-n}\left|\bigcup_{i=1}^{k} B_i\right|$$

Aplicamos este lema a la familia de bolas $\{B_{x,1}, ..., B_{x,k}\}$ para obtener

$$|K| \leq \sum_{i=1}^{k}|B_{x,i}| \leq 3^n\sum_{i=1}^{l}|B_{x,j_i}| \leq \frac{3^n}{\alpha}\sum_{i=1}^{l}\int_{B_{x,j_i}}|f(y)|dy \leq \frac{3^n}{\alpha}\int_{\mathbb{R}^n}|f(y)|dy$$

Tomando el supremo de todos los compactos contenidos en E_α obtenemos

$$\alpha|E_\alpha| \leq 3^n\|f\|_{L^1}$$

de donde se deduce

$$\|\mathcal{M}(f)\|_{L^{1,\infty}} \leq \|\mathfrak{M}(f)\|_{L^{1,\infty}} \leq 3^n\|f\|_{L^1}.$$

- de $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ en $L^\infty(\mathbb{R}^n)$:

  Se tiene inmediatamente $\|\mathcal{M}(f)\|_{L^\infty} \leq \|\mathfrak{M}(f)\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^\infty}$.

- de $L^p(\mathbb{R}^n)$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$ para todo $1 < p < +\infty$:

  Aquí se aplica el teorema de interpolación de Marcinkiewicz!

$\blacksquare$