Notaciones y Bibliografía

EPN, verano 2010

- Clase de Schwartz: $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ = conjunto de funciones $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ a decrecimiento rapido (así como todas sus derivadas). Ejemplo típico: una gaussiana e^{-x^2}.
- Distribuciones temperadas: $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ = espacio dual de la clase de Schwartz. Ejemplo típico: una masa de Dirac δ_0.
- Derivadas parciales:

$$\partial^\alpha f = \partial_1^{\alpha_1}\cdots\partial_n^{\alpha_n} f = \frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n} f}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}} \qquad \alpha=(\alpha_1,...,\alpha_n)\in\mathbb{N}^n$$

  El operador Laplaciano está definido por la fórmula $\Delta = \sum_{j=1}^n \partial_j^2$.
- Espacios de Lebesgue: Sea (X,μ) un espacio medido

$$L^p(X) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R} : \quad \|f\|_{L^p} < +\infty\}$$

  con

$$\|f\|_{L^p} = \begin{cases} \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{1/p} & \text{si} \quad 1\leq p<+\infty \\ \sup\limits_{x\in X} ess|f(x)| & \text{si} \quad p=+\infty \end{cases}$$

- Desigualdades de Young:
  Producto de convolución: si $f,g:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definimos

$$f*g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy.$$

  Sean $p,q,r\in[1,+\infty]$ t.q. $1+1/q = 1/p+1/r$, entonces se tiene las desigualdades de Young:

$$\|f*g\|_{L^q} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^r}$$

- Transformada de Fourier:

$$\mathcal{F}(f) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix\cdot\xi}dx$$

  - Transformada de Fourier inversa:

$$\mathcal{F}^{-1}(f) = (f)^\vee(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi$$

  - es una biyección en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ y también es una biyección en su espacio dual $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$.
    Definición de la transformada de Fourier para $f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$:

$$\langle\widehat{f},\varphi\rangle = \langle f,\widehat{\varphi}\rangle \qquad (\forall\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}))$$

  - fórmula de inversión: $\left(\widehat{f}\right)^\vee = f$
  - intercambia derivación por multiplicación por polinomios: $\widehat{\partial_k f}(\xi) = i\xi_k\widehat{f}(\xi)$
  - intercambia producto de convolución por producto usual de funciones: $\widehat{f*g}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)$

- Semi-grupo y núcleo del calor:
  - El núcleo del calor está determinado por
$$h_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \qquad \text{para todo } t > 0.$$
    Propiedades:
    - $\int_{\mathbb{R}^n} h_t(x)dx = 1$
    - $h_t \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$
    - $h_{t_1} * h_{t_2} = h_{t_1+t_2}$ para todo $t_1, t_2 > 0$.
    - $\lim\limits_{t\to 0} f * h_t(x) = f(x)$ c.t.p. si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p \leq +\infty$

    Si $u(x,t) = f * h_t(x)$ entonces u es solución de la *ecuación del calor*:
$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) u(x,t) = 0 \qquad \text{con } u(x,0) = f(x).$$
  - El semi-grupo del calor está dado por H_t y admite un núcleo de convolución que es precisamente el núcleo del calor:
$$H_t f(x) = f * h_t(x)$$
    La propiedad de semi-grupo está dada por la identidad: $H_{t_1+t_2} = H_{t_1} H_{t_2}$ válida para todo $t_1, t_2 > 0$.
- Semi-grupo y núcleo de Poisson:
  - El núcleo de Poisson está determinado por
$$p_t(x) = \frac{c_n t}{(|x|^2 + t^2)^{(n+1)/2}} \qquad \text{para todo } t > 0.$$
    con $c_n = \Gamma((n+1)/2)\pi^{-(n+1)/2}$.

    Propiedades:
    - $\int_{\mathbb{R}^n} p_t(x)dx = 1$
    - $p_{t_1} * p_{t_2} = h_{t_1+t_2}$ para todo $t_1, t_2 > 0$.
    - $\lim\limits_{t\to 0} f * p_t(x) = f(x)$ c.t.p. si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p \leq +\infty$

    Si $u(x,t) = f * p_t(x)$ entonces u es solución de la *ecuación de onda*:
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) u(x,t) = 0 \qquad \text{con } u(x,0) = f(x).$$
  - El semi-grupo de Poisson está dado por P_t y admite un núcleo de convolución que es precisamente el núcleo de Poisson:
$$P_t f(x) = f * p_t(x)$$
    La propiedad de semi-grupo está dada por la identidad: $P_{t_1+t_2} = P_{t_1} P_{t_2}$ válida para todo $t_1, t_2 > 0$.

Bibliografía:

- D. Chamorro. *Análisis Intermedio I: Espacios de Lebesgue y de Lorentz, Teoría de la Medida, Teoría de la Integración y una introducción al Análisis Funcional. Vol. 1.* Asociación Amarun (2010).
  Disponible en línea: www.amarun.org
- L. Grafakos. *Classical and Modern Fourier Analysis.* Prentice Hall (2004).
- E. M. Stein. *Singular integrals and differentiability properties of functions.* Princeton University Press (1970).
- E. M. Stein. *Harmonic analysis.* Princeton University Press (1993).
- H. Triebel. *Theory of function spaces II.* Birkhaüser (1992).