Curso de Verano de Teoría de Distribuciones

Diego Chamorro

23 de septiembre de 2003

Índice

Introducción

Este corto folleto es el resultado de un curso de verano dictado en la Escuela Politécnica Nacional del Ecuador de dos semanas sobre la teoría de distribuciones.

Está completamente basado en el excelente libro de Gilles Lebeau "Théorie des Distributions et Analyse de Fourier"y éstas pocas páginas no son más que una traducción libre de éste texto.

No se ha pretendido hacer un curso detallado sobre ésta teoría fecunda pero difícil de las matemáticas, dado su corta duración (apenas 16 horas!), solo hemos podido dar las principales definiciones, propiedades y teoremas que, creo yo, servirán para tener una idea relativamente precisa de ésta herramienta.

Sus principales aplicaciones están relacionadas con las ecuaciones en derivadas parciales, pero nos hemos más preocupado por exponer uno de los objetos más importantes del análisis matemático; la Transfomada de Fourier que encuentra su marco general en las distribuciones temperadas y en la clases $\mathcal{S}$ de Schwartz.

Este curso no habría sido posible sin la ayuda incondicional del Dr. Polo Vaca quien se ha encargado de promoverlo entre los estudiantes y de cubrir todos los detalles materiales con la participación de la Srta. Alicia y del Sr. Rodríguez.

Debo mencionar también mi agredecimiento a los Matemáticos Menthor Urvina y Marco Calahorrano quienes han colaborado para facilitar el buen desarrollo de las clases.

Agradezco especialmente al Matemático Nelson Alomoto y sus secretarias por permitirme imprimir los ejercicios y el folleto.

Finalmente expreso mi gratitud a Julai por haberme permitido descender hasta las raíces de las minas de Moria y trabajar en Latex y sobre todo a los alumnos que siguieron este curso improvisado sin los cuales toda clase o conferencia carece de sentido.

1. Motivación

- Las funciones contínuas no son por lo general derivables usando la noción usual de derivación.

- Existen objetos matemáticos que no corresponden perfectamente con la noción de función.

Ejemplos:

Sea $f(x)$ dada de la siguiente forma:

Es una función contínua no derivable en todo punto.
Qué sucede en estos puntos? Cómo generalizar la derivación?

Sea $\varphi(x)$ una función tal que *supp* $\varphi(x) \subset [-1, 1]$ y $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx = 1$.

Definimos las funciones $\varphi_j(x)$ con $j \in \mathbb{N}$ como:

$$\varphi_j(x) = 2^j \varphi(2^j x)$$

Así $\varphi_0(x) = \varphi(x)$ y $\varphi_1(x) = 2\varphi(2x)$.

Observamos que: $\int_{\mathbb{R}} \varphi_j(x)dx = 1$.

En efecto, se tiene: $\int_{\mathbb{R}} \varphi_j(x)dx = 2^j \int_{\mathbb{R}} \varphi(2^j x)dx$ haciendo el cambio de variable $y = 2^j x$ se obtiene: $2^j \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)2^{-j}dy$ de donde se deduce la igualdad buscada.

Vemos intuitivamente que $\lim\limits_{j\to\infty} \varphi_j(x) = \delta_0$ maza de Dirac en 0.

Cuales son las propiedades de la maza de Dirac? Qué operaciones podemos efectuar con ella?

Todas las respuestas a estas preguntas están explicadas en el marco de la teoría de distribuciones. Pero cuál es la verdadera originalidad de las distribuciones?

El punto esencial radica en un cambio de posición, en un cambio de punto de vista: en vez de considerar una función f de una variable real como la colección de los valores $f(x)$ que toma cuando x recorre $\mathbb{R}$, describimos f como la colección de sus promedios:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)dx \quad \varphi \in \mathcal{D}$$

en donde $\mathcal{D}$ es un conjunto de funciones lo suficientemente grande para recuperar f a partir de todos los números $\int f(x)\varphi(x)dx$.

Las funciones $\varphi \in \mathcal{D}$ se llaman funciones de prueba o funciones test.

Podemos entonces generalizar la noción de derivación en el sentido siguiente: Si $\mathcal{D}$ es el conjunto formado por las funciones φ contínuamente derivables y nulas si $|x|$ es suficientemente grande, la fórmula de integración por partes nos da,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)dx = f(x)\varphi(x)|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)dx$$

es decir

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)dx$$

esto nos permite definir f', objeto matemático a priori no muy bien definido, con la ayuda de la colección $\{-\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)dx\,;\varphi \in \mathcal{D}\}$.

Esto es posible siempre y cuando $\mathcal{D}$ sea estable por derivación (si $\varphi \in \mathcal{D}$ entonces $\varphi' \in \mathcal{D}$).

$\mathcal{D}$ será entonces el espacio de funciones infinítamente derivables y nulas para $|x|$ grande.

2. Funciones diferenciables y aproximación

2.1. Funciones diferenciables

Una función f definida sobre un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ a valores reales o complejos ($f : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) es diferenciable en el punto x si existe una forma lineal notada $df(x)$ tal que:

$$f(x+h) = f(x) + df(x)(h) + |h|r(h) \quad \text{con } \lim_{h\to 0} r(h) = 0$$

La forma lineal $h \longmapsto df(x)(h)$ se denomina diferencial de f en el punto x.

Ejemplo:

En una dimensión tenemos:
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si ponemos $f(x+h) = f(x) + df(x).|h| + |h|r(h)$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{f(x+h)-f(x)}{|h|} = df(x) + r(h) \ \text{ pasando al limite,}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{|h|} = df(x) + \lim_{h\to 0} r(h)$$

lo que nos da: $f'(x) = df(x)$.

Si f es diferenciable en x, las derivadas parciales existen y tenemos

$$df(x)(h) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} h_i$$

Teorema 1 *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, las siguientes propiedades son equivalentes:*

1. *Las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ existen y son contínuas.*

2. *La función f es diferenciable en todo punto y la aplicación $x \longmapsto df(x)$ es contínua.*

Decimos entonces que f es de clase $C^1(\Omega)$ o contínuamente diferenciable si estas condiciones son verificadas.

f es de clase $C^2(\Omega)$ si f y sus derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ son de clases $C^1(\Omega)$.

Teorema 2 *(Schwartz)*
Para $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, tenemos $\forall i, j \in \{1, ..., d\}$:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$$

El órden de las derivaciones no interviene en el cálculo de las derivadas parciales de una función de clase $\mathcal{C}^2(\Omega)$.

Por recurrencia sobre $k \geq 2$ definimos el espacio $\mathcal{C}^k(\Omega)$ como el espacio de funciones f de clase $\mathcal{C}^{k-1}(\Omega)$ cuyas derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ son de clase $\mathcal{C}^{k-1}(\Omega)$.

Observación:

Tenemos la inclusión $\mathcal{C}^k(\Omega) \subset \mathcal{C}^{k-1}(\Omega)$, para Ω abierto.

Los espacios $\mathcal{C}^k(\Omega)$ sirven para medir la regularidad de una función, pero $k \in \mathbb{N}$!

Es posible medir la regularidad de una forma más fina, con un parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$ por ejemplo?

Existen espacio que "rellenan" el vacío entre k y $k+1$, son los espacios de Holder Γ^α definidos por la norma:

$$||f||_{\Gamma^\alpha} = ||f||_\infty + \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}$$

para $\alpha \in]0, 1[$.

Si $\alpha > 1$ se define por recurrencia, como para los espacios $\mathcal{C}^k$, los espacios $\Gamma^\alpha(\mathbb{R})$.

2.2. Notaciones

Llamaremos multi-indice un elemento $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ y notamos:

$$\partial_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

$$\partial^\alpha f = \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} ... \partial_d^{\alpha_d} f = \frac{\partial^{\alpha_1 + ... + \alpha_d}}{\partial^{\alpha_1} x_1 ... \partial^{\alpha_d} x_d} f$$

Además $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_d$ es la longitud del multi-indice y $\partial^\alpha f$ es la derivada parcial de orden α de f.

<u>**Ejemplo:**</u>

Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^3$, $\alpha = (1,2,0)$, $\beta = (1,1,1)$. entonces:

$$\partial^\alpha f = \frac{\partial^3}{\partial x_1 \partial^2 x_2} f \ \ y \ \ \partial^\beta f = \frac{\partial^3}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} f$$

en este caso $|\alpha| = |\beta| = 3$.

Escribimos $\alpha \geq \beta$ si $\alpha_i \geq \beta_i$ para todo i. Además $\alpha! = \alpha_1!....\alpha_d!$.

El coeficiente binomial $\binom{\alpha}{\beta}$ de dos multi-indices $\alpha \geq \beta$ está dado por:

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha - \beta)!}$$

Para $x \in \mathbb{R}^d$ notamos $x^\alpha = x_1^1 ... x_d^d$.
Finalmente tenemos las fórmulas clásicas siguientes:

1. **Fórmula del binomio**: $(x, y \in \mathbb{R}^d; \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d)$

$$(x+y)^\alpha = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} x^{\alpha-\beta} y^\beta$$

2. **Fórmula de Leibnitz**: para $f, g \in \mathcal{C}^{|\alpha|}(\mathbb{R}^d)$.

$$\partial^\alpha (f.g) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^{\alpha-\beta} f \partial^\beta g$$

3. **Fórmula del multinomio**: para $x \in \mathbb{R}^d$ y $k \in \mathbb{N}$.

$$(x_1 + ... + x_d)^k = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} x^\alpha$$

4. **Fórmula de Taylor con resto integral**: para $f \in \mathcal{C}^{m+1}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ abierto que contiene el segmento $[a, b]$.

$$f(b) = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{(b-a)^\alpha}{\alpha!} \partial^\alpha f(a) + (m+1) \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{(b-a)^\alpha}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^m \partial^\alpha f(a + t(b-a)) dt$$

Definición 1 *Se dice que una función es de clase C^∞ sobre Ω (infinítamente diferenciable) si f es de clase $C^k(\Omega)$ para todo k.*

Lema 1 *Existe una función $\varphi(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\varphi(0) = 1$ y $\varphi(x) = 0$ si $||x|| \geq 1$.*

<u>**Prueba:**</u>

La siguiente función φ conviene: $\varphi(x) = exp(\frac{-||x||^2}{1-||x||^2})$
para $||x||^2 = x_1^2 + ... + x_d^2 < 1$
y $\varphi(x) = 0$ si $||x|| \geq 1$.

en efecto, $\varphi(0) = 1$ y $\lim_{x\to 1} \varphi(x) = 0$. Además se puede verificar muy fácilmente en una variable que esta función es $C^\infty(\mathbb{R})$. •

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un abierto, se nota $C_0^k(\Omega)$ el subespacio de $C^k(\Omega)$ de funciones de clase C^k tales que, existe un compacto $K \subset \Omega$ tal que $f(x) = 0$ si $x \in \Omega \backslash K$.

Se dice entonces que f es a soporte compacto en Ω.

Tenemos lógicamente la inclusión $C_0^k(\Omega) \subset C^k(\mathbb{R}^d)$ haciendo una prolongación por cero en $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$.

Por el lema anterior se tiene que $C_0^\infty(\Omega) = \bigcap_{k\in\mathbf{N}} C_0^k(\Omega)$ contiene funciones no idénticamente nulas.
En efecto, basta hacer una translación de la función φ:
si la bola cerrada $\{||x - a|| < r\}$ está contenida en Ω, la función $\varphi_{a,r}(x) = \varphi(\frac{x-a}{r})$ está en $C_0^\infty(\Omega)$.

Definición 2 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un abierto y $k \in \mathbb{N}$. Una sucesión f_n de elementos de $C_0^k(\Omega)$ converge en $C_0^k(\Omega)$ hacia $f \in C_0^k(\Omega)$ si:*

1. *Existe un compacto $K \subset \Omega$ tal que $f_n(x) = 0$ para todo n y todo $x \in \Omega \setminus K$.*

2. $(\forall |\alpha| \leq k)$ *la sucesión de funciones $\partial^\alpha f_n$ converge uniformemente hacia $\partial^\alpha f$:*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists M(\alpha, \varepsilon)) : \; m \geq M \Rightarrow \sup_{x\in\Omega} |\partial^\alpha f_m(x) - \partial^\alpha f(x)| \leq \varepsilon$$

2.3. Convolución

Sean $f(x)$, $g(x)$ dos funciones de $L^1(\mathbb{R}^d)$ y sea $h(x,y) = f(y)g(x-y)$. Tenemos, utilizando Fubini:

$$\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} |h(x,y)|dxdy = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)||g(x-y)|dxdxy = \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|\left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(x-y)|dx\right)dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|dy \int_{\mathbb{R}^d} |g(x)|dx = ||f||_1||g||_1 < \infty$$

La función $h(x.y)$ está entonces en $L^1(\mathbb{R}^{2d}, dx \otimes dy)$ y además la función $x \longmapsto \int f(y)g(x-y)dy$ está en $L^1(\mathbb{R}^d, dx)$.

Definición 3 *Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$; se llama producto de convolución de f y g (notado $f \star g$) el elemento de $L^1(\mathbb{R}^d)$ definido por:*

$$f \star g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)dy$$

Propiedades:

1. $||f \star g||_1 \leq ||f||_1.||g||_1$; $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$

2. $f \star g = g \star f$

3. $(f \star g) \star h = f \star (g \star h)$

Sean ahora $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ y $g \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, tenemos:

$$|\int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)dy| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)g(x-y)|dy$$

$$|f \star g| \leq ||g||_\infty \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|dy = ||g||_\infty ||f||_1$$

de donde $||f \star g||_\infty \leq ||g||_\infty ||f||_1$

Observación:

Tenemos: $L^1 \star L^1 \to L^1$ y $L^1 \star L^\infty \to L^\infty$

Teorema 3 *(Desigualdad de Minkowski)*
Sea $1 \leq p \leq \infty$*; para* $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ *y* $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ *tenemos:*

$$||g \star f||_p \leq ||g||_1.||f||_p$$

Es decir: $L^1 \star L^p \to L^p$

Si además la función g admite derivadas parciales contínuas y acotadas en $\mathbb{R}^d$, entonces el teorema de derivación bajo el signo integral nos asegura que $f \star g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$ y se tiene:

$$\partial_i(f \star g)(x) = (f \star \partial_i g)(x)$$

Por recurrencia se tiene el:

Lema 2 *Sea* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *y* $g \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$*, suponemos que las derivadas parciales* $\partial^\alpha g$ *(con* $|\alpha| \leq k$*) son acotadas en* $\mathbb{R}^d$*.*
Entonces la función $f \star g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)dy$ *es de clase* $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^d)$ *y para* $|\alpha| \leq k$*:*

$$\partial^\alpha(f \star g)(x) = f \star \partial^\alpha g$$

Para $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ y $g \in \mathcal{C}_0^k(\mathbb{R}^d)$, el producto de convolución esta bien definido.
En efecto, si *supp* $g \subset \{||x|| < R_0\}$ y si $||x|| < R_1$ tenemos: $f(y)g(x-y) = f_R g(x-y)$ con $f_R(y) = \mathbb{1}_{\{|y|<R\}} f(y)$ y $R = R_0 + R_1$.

Pero $f_R \in L^1(\mathbb{R}^d)$ y $f \star g(x) = f_R \star g$ para $||x|| < R_1$.
En particular $f \star g \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^d)$ y se tiene siempre: $\partial^\alpha(f \star g)(x) = f \star \partial^\alpha g$

Observación:

1. $L^1 \star \mathcal{C}^k \to \mathcal{C}^k$

2. $L^1_{loc} \star \mathcal{C}_0^k \to \mathcal{C}^k$

2.4. Regularización

Sea $\chi(x)$ una función $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ a soporte en la bola $\{||x|| \leq 1\}$ y de integral igual a uno: $\int_{\mathbb{R}} \chi(x)dx = 1$.

Definición 4 *Se llama aproximación de la identidad la familia de funciones* $\chi_\varepsilon = \varepsilon^{-1}\chi(\frac{x}{\varepsilon})$ *con* $0 < \varepsilon \leq 1$.

Las funciones $\chi_\varepsilon(x)$ *son a soporte en la bola* $\{||x|| \leq \varepsilon\}$, *de integral uno y de clase* $C^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Lema 3 *Sea* f *una función contínua a soporte compacto sobre* $\mathbb{R}^d$ $(f \in C_0^0(\mathbb{R}^d))$.

1. *las funciones* $f_\varepsilon = f \star \chi_\varepsilon$ *están en* $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$.

2. f_ε *convergen uniformemente en* $\mathbb{R}^d$ *hacia* f *cuando* $\varepsilon \to 0$.

<u>**Demostración:**</u>

1. Sea K el soporte de f; $f_\varepsilon = \int f(x)\chi_\varepsilon(x-y)dy$ es nula si $d(x,K) > \varepsilon$. Además es de clase $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ pues $f \in L^1$ y $\chi_\varepsilon \in C_0^\infty$.

   De donde $f_\varepsilon \in \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$.

2. Puesto que f contínua: $(\forall\alpha > 0)(\exists\beta > 0) : |x-y| \leq \beta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \alpha$.

   Además $\int |\chi_\varepsilon(y)|dy = \int |\chi(y)|dy = ||\chi||_1 = 1$.
   Para $(\varepsilon \leq \beta)$, $(\forall x \in \mathbb{R}^d)$ $f(x) = \int f(x)\chi_\varepsilon(x-y)dy = f(x)\int \chi_\varepsilon(x-y)dy = f(x)$.
   luego $f_\varepsilon(x) - f(x) = \int f(y)\chi_\varepsilon(x-y)dy - \int f(x)\chi_\varepsilon(x-y)dy$

   $$= \int (f(y) - f(x))\chi_\varepsilon(x-y)dy$$

   $$\text{entonces } |f_\varepsilon(x) - f(x)| \leq \int |f(y) - f(x)|\,|\chi\varepsilon(x-y)|dy$$

   $$\leq \alpha \int |\chi\varepsilon(x-y)|dy = \alpha||\chi||_1$$

   es decir $|f_\varepsilon(x) - f(x)| \leq \alpha$; $\forall\alpha > 0$, de donde $f_\varepsilon \to f$. •

Teorema 4 *Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ y sea $f_\varepsilon = f \star \chi_\varepsilon$ entonces $f_\varepsilon \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} f$ en L^1; es decir:*

$$||f - f_\varepsilon||_1 \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

<u>**Demostración:**</u>
Esta demostración se basa sobre el teorema de densidad de las funciones contínuas a soporte compacto en L^1.

Existe entonces una sucesión (f_n) de funciones contínuas a soporte compacto K_n tales que:

$$\underset{n \to \infty}{lim} ||f - f_n||_1 = 0$$

Se tiene entonces:

$$\begin{aligned} ||f_\varepsilon - f||_1 &= ||f - f_n + f_n - f_n \star \chi_\varepsilon + f_n \star \chi_\varepsilon - f \star \chi_\varepsilon||_1 \\ &\leq ||f - f_n||_1 + ||f_n - f_n \star \chi_\varepsilon||_1 + ||f_n \star \chi_\varepsilon - f \star \chi_\varepsilon||_1 \end{aligned}$$

$$\text{ademas } ||f_n \star \chi_\varepsilon - f \star \chi_\varepsilon||_1 = ||(f_n - f) \star \chi_\varepsilon||_1 \leq ||f_n - f||_1 ||\chi||_1$$

$$\begin{aligned} &\leq ||f - f_n||_1 + ||f_n - f_n \star \chi_\varepsilon||_1 + ||f - f_n||_1 . ||\chi||_1 \\ &\leq ||f - f_n||_1 (1 + ||\chi||_1) + ||f_n - f_n \star \chi_\varepsilon||_1 \end{aligned}$$

f_n es contínua a soporte compacto entonces $||f_n - f_n \star \chi_\varepsilon||_1 \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0$ por el lema 3.

Además $||f - f_n||_1(1 + ||\chi||_1) \leq \frac{\alpha}{2}$ y $||f_n - f_n \star \chi_\varepsilon||_1 < \frac{\alpha}{2}$.

De donde $||f - f_\varepsilon||_1 \leq \alpha$.

Se tiene entonces que $f_\varepsilon \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} f$ en L^1. •

Corolario 1 *El espacio C_0^∞ es denso en $L^1(\mathbb{R}^d)$.*

En efecto tenemos:
$f_n \star \chi_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ y $||f - f_n \star \chi_\varepsilon||_1 \leq ||f - f_n||_1 + ||f_n - f_n \star \chi_\varepsilon||_1 \leq \alpha$.

Teorema 5 *Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ entonces $||f - f_\varepsilon||_p \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0$*

3. Distribuciones

3.1. Definiciones

Sea K un compacto de $\mathbb{R}^d$, notamos $\mathcal{C}_K^\infty$ el conjunto de funciones $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ nulas fuera de K.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un abierto, los elementos de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ son las funciones de prueba o de test.

$\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ es la reunión de los $\mathcal{C}_K^\infty$ en donde K recorre los compactos contenidos en Ω.

Definición 5 *Una distribución sobre Ω es una forma lineal T de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ en $\mathbb{C}$:*

$$T : \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{C} \tag{1}$$

$$\varphi \longmapsto \langle T, \varphi \rangle \tag{2}$$

que verifica la propiedad de continuidad siguiente:
$(\forall K$ compacto en $\Omega)(\exists p \in \mathbb{N}, C \in \mathbb{R}^+)$ tal que:

$$(\forall \varphi \in \mathcal{C}_K^\infty) \qquad |\langle T, \varphi \rangle| \leq C \sup_{|\alpha| \leq p; x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)| \tag{3}$$

Notamos $\mathcal{D}'(\Omega)$ el espacio de las distribuciones sobre Ω.
Cuando p es independiente de K, se dice que el orden de la distribución T es el menor valor de p.

Lema 4 *Sea T una distribución sobre Ω y (φ_n) una sucesión de funciones $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ que convergen en $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ hacia una función φ.*

Entonces $\lim\limits_{n \to \infty} \langle T, \varphi_n \rangle = \langle T, \varphi \rangle$

<u>**Prueba**</u>:

Sea K un compacto que contiene el soporte de todas las funciones φ_n, entonces también contiene el soporte de φ y tenemos $\varphi_n, \varphi \in \mathcal{C}_K^\infty$.
Entonces:

$$|\langle T, \varphi_n - \varphi \rangle| \leq C \sup_{|\alpha| \leq p; x \in K} |\partial^\alpha \varphi_n(x) - \partial^\alpha \varphi(x)|$$

pero puesto que $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ en C_0^∞ tenemos $|\partial^\alpha \varphi_n(x) - \partial^\alpha \varphi(x)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ de donde se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty} \langle T, \varphi_n \rangle = \langle T, \varphi \rangle$$

•

Sea $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, este elemento verifica: $\int_K |f(x)|dx < \infty$ para todo compacto K de Ω.

Se asocia a todo elemento f de $L^1_{loc}(\Omega)$ una distribución T_f de la siguiente forma:

$$(\forall \varphi \in C_K^\infty) \qquad \langle T_f, \varphi \rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx$$

En efecto: $|\langle T_f, \varphi \rangle| \leq \int_K |f(x)|.|\varphi(x)|dx$

$$\leq \sup_{x\in K} |\varphi(x)| \int_K |f(x)|dx = C \sup_{x\in K} |\varphi(x)|$$

De modo que el órden de la distribución T_f es igual a cero.

Lema 5 *Sean f y g dos funciones de $L^1_{loc}(\Omega)$, las propiedades siguientes son equivalentes:*

1. *$f(x) = g(x)$ casi en todas partes.*

2. *$\int f(x)\varphi(x)dx = \int g(x)\varphi(x)dx$; $(\forall \varphi \in C_0^\infty)$*

Demostración:

1) $\Rightarrow$ 2) es evidente.

2) $\Rightarrow$ 1)

Sea $h = f - g$ y sea $x_0 \in \Omega$, $r > 0$ tal que $B_{2r} = B(x_0, 2r) \subset \Omega$.

Sea χ_ε una aproximaxión de la identidad.

Para $x \in B_r$ y $\varepsilon < r$ la función $y \longmapsto \chi_{\varepsilon(x-y)}$ está en $C_0^\infty(\Omega)$ y su soporte está contenido en B_{2r}.

Si $\tilde{h} = \mathbb{1}_{B_r}.h$ tenemos para $x \in B_r$:

$$\tilde{h} \star \chi_\varepsilon(x) = \int_{B_{2r}} h(y)\chi_\varepsilon(x-y)dy = \int h(y)\chi_\varepsilon(x-y)$$

$$= \int (f(y) - g(y))\chi_\varepsilon(x-y)dy = \int f(y)\chi_\varepsilon(x-y)dy - \int g(y)\chi_\varepsilon(x-y)dy = 0$$

utilizando la hipótesis; es decir $\tilde{h} \star \chi_\varepsilon = 0$.

Puesto que $\tilde{h} \in L^1(\mathbb{R}^d)$, las funciones $\tilde{h} \star \chi_\varepsilon \xrightarrow{L^1} \tilde{h}$. Tenemos por lo anterior que:

$$\int_{B_{2r}} |\tilde{h}(x)|dx = \int_{B_{2r}} |h(x)|dx = 0$$

de donde el siguiente conjunto es despreciable: $\{x \in B(x_0, r); |h(x)| \neq 0\}$.

Ahora para $K \subset \Omega$ compacto $\{x \in K; |h(x)| \neq 0\}$ es también despreciable pues K está recubierto por un número finito de bolas B_{x_j,r_j}.

Pero como Ω es la reunión numerable de compactos $K_n = \{x \in \Omega; ||x|| < n; d(x, \Omega^c) \geq \frac{1}{n}\}$ el conjunto $\{x \in \Omega; |h(x)| \neq 0\}$ es despreciable.

Se concluye entonces que $f(x) = g(x)$ en casi todas partes.

•

Para todo elemento f de $L^1_{loc}(\Omega)$ el lema anterior nos permite identificar f a la distribución $\varphi \longmapsto \int f(x)\varphi(x)dx$; $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Es en este sentido que podemos hablar que las distribuciones son funciones generalizadas.

Tenemos pues las inclusiones siguientes:

$$C^\infty \subset C^0 \subset L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'$$

Definición 6 *(Convergencia en las distribuciones)*
Se dice que una sucesión $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de distribuciones sobre Ω converge hacia T en $\mathcal{D}'(\Omega)$ ssi:

$$(\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)) \qquad \langle T_n, \varphi\rangle \to \langle T, \varphi\rangle \tag{4}$$

en este caso se nota: $T = \lim\limits_{\mathcal{D}'} T_n$

Ejemplo:

1. Sea (f_n) una sucesión de elementos de $L^1_{loc}(\Omega)$ tales que: $\lim\limits_{n\to\infty} \int_K |f_n(x) - f(x)|dx = 0$ $(\forall K \subset \Omega$ *compacto*$)$ entonces se tiene: $f_n \to f$ en $\mathcal{D}'$

2. Sea $f_n(x) = n\, sin(nx)$ se tiene, sobre todo intervalo I:

$$\int_I |f_n(x)|dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

pero

$$\int f_n(x)\varphi(x)dx = \int n\ sin(nx)\varphi(x)dx = -\frac{1}{n}\int sin(nx)\varphi''(x)dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

La convergencia en $\mathcal{D}'(\Omega)$ es muchos menos exigente que la convergencia en $L^1(\Omega)$.

3.2. Ejemplos de Distribuciones

3.2.1. Distribución de Dirac

La distribución de Dirac en el punto $a \in \mathbb{R}^d$, notada δ_a está definida por:

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a) \tag{5}$$

Es una distribución de órden cero: $|\langle \delta_a, \varphi\rangle| \leq C.|\varphi(a)| \leq C.sup|\varphi(x)|$.

Si χ_ε es una aproximación de la identidad, las funciones χ_ε convergen en $\mathcal{D}'(\Omega)$ hacia δ_0. En efecto se tiene:

$$\langle \chi_\varepsilon, \varphi\rangle = \int \varphi(y)\chi_\varepsilon(y)dy$$

observando que $\check{\chi}_\varepsilon(y) = \chi_\varepsilon(.-y)$ es también una aproximación de la identidad tenemos,

$$\langle \chi_\varepsilon, \varphi\rangle = (\varphi \star \check{\chi}_\varepsilon)(0)$$

pero puesto que $\varphi \star \check{\chi}_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \varphi$ se obtiene

$$\langle \chi_\varepsilon, \varphi\rangle \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi\rangle$$

3.2.2. Medidas de Radon

Sea μ una medida positiva definida sobre la tribu boreliana de Ω, finita sobre los compactos de Ω.

Se tiene entonces una distribución T_μ sobre Ω de la siguiente forma:

$$\langle T_\mu, \varphi \rangle = \int \varphi d\mu$$

La distribución T_μ es de orden cero, para $\varphi \in C_K^\infty$ tenemos:

$$|\langle T_\mu, \varphi \rangle| \leq \int_K |\varphi| d\mu \leq C.\sup_{x \in K} |\varphi|$$

en donde $C = \mu(K)$

Teorema 6 *Sea $\varphi \longmapsto u(\varphi)$ una aplicación lineal de C_0^∞ en $\mathbb{C}$ tal que:*

$$\varphi \geq 0 \Rightarrow u(\varphi) \geq 0$$

Entonces existe una única medida boreliana positiva μ finita sobre los compactos tal que:

$$u(\varphi) = \int \varphi d\mu \qquad \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

La distribución de orden cero $\langle T, \varphi \rangle = \int \varphi d\mu$ se llama medida de radon positiva sobre Ω.

Corolario 2 *Sea T una distribución positiva sobre Ω (es decir $\langle T, \varphi \rangle \geq 0$ si $\varphi \geq 0$). Entonces T es una medida de Radon positiva.*

Demostración:

Vamos a verificar que $\varphi \longmapsto u(\varphi)$ se prolonga de manera única en una forma lineal positiva sobre el espacio $C_0^0(\Omega)$.

El teorema será entonces consecuencia del teorema de representación de Riesz.

Sea K un compacto de Ω, existe entonces $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $0 \leq \psi \leq 1$ y $\psi(x) = 1$ para $x \in K$.

Para $\varphi \in \mathcal{C}_K^\infty$ a valores en $\mathbb{R}$ se tiene:

$$-\big(\sup_{y\in K} |\varphi(y)|\big)\psi(x) \leq \varphi(x) \leq \big(\sup_{y\in K} |\varphi(y)|\big)\psi(x)$$

entonces por positividad de u, con $C = u(\psi)$ obtenemos:

$$|u(\varphi)| \leq C \sup_{y\in K} |\varphi(y)| \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}_K^\infty \tag{6}$$

esta desigualdad nos dice que u es contínua para la norma $\sup_K |\varphi|$ del espacio $\mathcal{C}_K^0$.

Sea ahora $g \in \mathcal{C}_0^0(\Omega)$ y χ_ε una aproximación de la identidad con $\chi \geq 0$.

Por el lema (3) la sucesión $g_\varepsilon = g \star \chi_\varepsilon \rightarrow g$ uniformemente sobre $\mathbb{R}^d$ y para ε pequeño $g_\varepsilon \in \mathcal{C}_K^\infty$.

Por (6) la sucesión $u(g_\varepsilon)$ es de Cauchy y definimos una prolongación lineal de u a $\mathcal{C}_0^0(\Omega)$ poniendo:

$$u(g) = \lim_{\varepsilon\rightarrow 0} u(g_\varepsilon)$$

que verifica $|u(g)| \leq C.\sup_{y\in K} |g(y)|$ de modo que u es una forma lineal positiva sobre $\mathcal{C}_0^0(\Omega)$ pues $g \geq 0$ implica $g_\varepsilon \geq 0$ $(\chi \geq 0)$.
•

<u>**Observación:**</u>

Este teorema nos permite identificar el espacio $\mathcal{M}^+(\Omega)$ de las medidas borelianas positivas sobre Ω finitas sobre los compactos a las distribuciones positivas sobre Ω.

$$\mathcal{M}^+(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$$

3.2.3. Valor Principal

Sea $f_\varepsilon(x)$ la sucesión de funciones sobre $\mathbb{R}$ definidas por:

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{si } |x| \geq \varepsilon$$
$$f_\varepsilon(x) = 0 \qquad \text{si } |x| < \varepsilon$$

Las funciones $f_\varepsilon(x)$ están en $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ pero no convergen en $L^1(]-1,1[)$ pues $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int_{-1}^1 |f_\varepsilon(x)|dx = +\infty$.

Verifiquemos que la sucesión f_ε es convergente en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ hacia una distribución.

Para $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ a soporte en $]-a,a[$ tenemos:

$$\int f_\varepsilon(x)\varphi(x)dx = \int_{\varepsilon\le|x|\le a} \frac{\varphi(x)}{x}dx = \int_{\varepsilon\le|x|\le a} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}dx$$

$$\text{pero } \left| \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} \right| \le \sup_y |\varphi'(y)|$$

$$\text{luego } \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} \in L^1[-a,a]$$

$$\text{de donde } \lim_{\varepsilon\to 0} \int f_\varepsilon(x)\varphi(x)dx = \int_{|x|\le a} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}dx$$

$$= \int_{|x|\le 1} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}dx + \int_{|x|>1} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}dx$$

La distribución $\lim\limits_{\mathcal{D}'} f_\varepsilon$ se llama valor principal de $\frac{1}{x}$ y se nota $vp(\frac{1}{x})$ y está definida por:

$$\langle vp(\frac{1}{x}), \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x|\ge\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}dx$$

$$= \int_{|x|\le 1} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}dx + \int_{|x|>1} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}dx$$

En particular tenemos $\langle vp(\frac{1}{x}), \varphi\rangle = \int \frac{\varphi(x)}{x}dx$ si $\varphi(0) = 0$.

Si φ es a soporte en $[-a,a]$ tenemos:

$$|\langle vp(\frac{1}{x}), \varphi\rangle| \le \int_{|x|<a} \left|\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\right|dx \le 2a \sup |\varphi'(y)|$$

Entonces $vp(\frac{1}{x})$ es una distribución de órden máximo 1. No es una distribución de orden 0.

3.3. Operaciones sobre las distribuciones

Vamos a estudiar en el marco de las distribuciones las operaciones usuales sobre las funciones utilizando la identificación de $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ como un subespacio de $\mathcal{D}'(\Omega)$.

La identificación es la siguiente: a cada $f \in \mathcal{C}^\infty$ se le asocia la distribución $\langle T_f, \varphi\rangle = \int f(x)\varphi(x)dx$.

3.3.1. Derivación

Para $f \in \mathcal{C}^\infty$ y $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty$ tenemos la fórmula de integración por partes que nos da:

$$\int \frac{\partial}{\partial x_i} f(x)\varphi(x)dx = -\int f(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(x)dx$$

Definición 7 *Las derivadas parciales $\frac{\partial}{\partial x_i}T$ de una distribución $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ son las distribuciones definidas sobre Ω por:*

$$\langle \frac{\partial}{\partial x_i}T, \varphi\rangle = -\langle T, \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi\rangle \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty$$

Para $\alpha \in \mathbb{N}^d$ un multi-indice se tiene:

$$\langle \partial^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, \partial^\alpha \varphi\rangle \tag{7}$$

Por otro lado si $T = f(x)$ es una función de clase $\mathcal{C}^1$ tenemos, para todo $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty$:

$$\langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, \varphi\rangle = -\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\rangle = -\int f(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}dx = \int \frac{\partial f}{\partial x_j}\varphi(x)dx$$

usando la fórmula de integración por partes, es decir que la derivada en el sentido de las distribuciones es igual a la derivada usual para funciones de clase $\mathcal{C}^1$

Proposición 1 *Sea T_n una sucesión de distribuciones que converge en $\mathcal{D}'(\Omega)$ hacia una distribución, y sea $\alpha \in \mathbb{N}^d$ un multi-indice.*

Entonces la sucesión $\partial^\alpha T_n$ converge hacia $\partial^\alpha T$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$

Prueba:

Tenemos:

$$\langle \partial^\alpha T_n, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T_n, \partial^\alpha \varphi\rangle \to (-1)^{|\alpha|}\langle T, \partial^\alpha \varphi\rangle = \langle \partial^\alpha T, \varphi\rangle$$

•

Ejemplo:

Sea $H(x)$ la función de Heaviside definida para $x \in \mathbb{R}$ por:

$H(x) = 1$ si $x \geq 0$ y $H(x) = 0$ para $x < 0$

Pertenece a $L^1_{loc}(\Omega)$ y por lo tanto define una distribución.
Podemos calcular su derivada H' en el sentido de las distribuciones:

$$\langle H', \varphi \rangle = -\langle H, \varphi' \rangle = -\int_0^\infty \varphi'(x)dx = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle$$

De donde se tiene que $H' = \delta_0$.

3.3.2. Multiplicación por una función C^∞

Definición 8 *Para $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y $\psi \in C^\infty(\Omega)$, la distribución producto ψT está definida por:*

$$\langle \psi T, \varphi \rangle = \langle T, \psi\varphi \rangle$$

Proposición 2 .

1. *Sea $(T_j) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ una sucesión convergente en $\mathcal{D}'(\Omega)$ hacia T, y sea $\psi \in C^\infty(\Omega)$. Entonces (ψT_j) converge en $\mathcal{D}'(\Omega)$ hacia (ψT)*

2. *Sea $\psi_j \in C^\infty(\Omega)$ una sucesión que converge hacia $\psi \in C^\infty(\Omega)$ uniformemente sobre todo compacto de Ω, y $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Entonces $(\psi_j T)$ converge hacia ψT en $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Demostración:

1) resulta inmediatamente de la definición (8):
se tiene $\langle \psi T_j, \varphi \rangle = \langle T_j, \psi\varphi \rangle \to \langle T, \psi\varphi \rangle = \langle \psi T, \varphi \rangle$.

2) Podemos tener el caso $\psi = 0$ reemplazando ψ_i por $\psi_j - \psi$.
Para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ la sucesión $\psi_i\varphi$ converge hacia 0 en $C_0^\infty(\Omega)$, entonces $\langle T, \psi_j\varphi \rangle \to 0$ por el lema (4).
Entonces $(\psi_j T)$ converge en $\mathcal{D}'(\Omega)$ hacia ψT.

•

Proposición 3 *Fórmula de Leibnitz*
Para $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tenemos:

$$\partial^\alpha(\psi.T) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^{\alpha-\beta}\psi \partial^\beta T$$

en particular:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\psi T) = \psi \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{\partial \psi}{\partial x_i} T \tag{8}$$

Ejemplo:

1. En $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ se tiene $x\delta_0 = 0$ y más generalmente se tiene para $f \in \mathcal{C}^\infty$, $f\delta_a = f(a)\delta_a$
2. Derivando la relación $x\delta_0 = 0$ se obtiene $x\delta_0' = -\delta_0$
3. Tenemos $x.vp(\frac{1}{x}) = 1$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ pues:

$$\langle x.vp(\frac{1}{x}), \varphi \rangle = \langle vp(\frac{1}{x}), x.\varphi \rangle = \int \frac{x\varphi}{x} dx = \int \varphi(x) dx = \langle 1, \varphi \rangle$$

Observación:

Para $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y $f, g \in \mathcal{C}(\Omega)$ se tiene:

$$(f.g)T = f.(g.T)$$

Sin embargo el producto de dos distribuciones T y S no está definido en general. Además, para $f \in \mathcal{C}^\infty$, si los productos fT y fS están en $\mathcal{C}^\infty$, la igualdad $(fT)S = (fS)T$ puede ser falsa!

En efecto se tiene en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ con $T = \delta_0$, $S = vp(\frac{1}{x})$ y $f = x$:

$(f.T).S = (x.\delta_0)vp(\frac{1}{x}) = 0$ pero $(f.S).T = (x.vp(\frac{1}{x})).\delta_0 = 1.\delta_0 = \delta_0$.

3.3.3. Cambio de variable

Para una función ψ su trasladada de vector $a \in \mathbb{R}^d$ es la función $(\tau_a\psi)(x) = \psi(x-a)$.

Como se tiene $\int \psi(x-a)\varphi(x)dx = \int \psi(x)\varphi(x+a)dx$, la trasladada $\tau_a T$ de una distribución sobre $\mathbb{R}$ está dada por:

$$\langle \tau_a T, \varphi \rangle = \langle T, \tau_{-a}\varphi \rangle \tag{9}$$

Para una función f su dilatada de razón $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ es la función $f_\lambda(x) = f(\frac{x}{\lambda})$.

Puesto que tenemos: $\int f_\lambda(x)\varphi(x)dx = |\lambda|^d \int f(x)\varphi(\lambda x)dx$, se define la dilatada de una distribución de la manera siguiente:

$$\langle T_\lambda, \varphi \rangle = |\lambda|^d \langle T, \varphi_{1/\lambda} \rangle \tag{10}$$

La traslación $x \longrightarrow x-a$ y la dilatación $x \longrightarrow x/\lambda$ son dos ejemplos de difeomorfismos de clase C^∞ de $\mathbb{R}^d$.

Mas generalmente se tiene:

Teorema 7 *Sean Ω_1 y Ω_2 dos abiertos de $\mathbb{R}^d$ y $\psi : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ un C^∞-difeomorfismo.*

Para $T \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$, la fórmula:

$$\langle T \circ \psi, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \circ \psi^{-1}.|det J(\psi^{-1}(y))|^{-1} \rangle \qquad \varphi \in C_0^\infty(\Omega_1)$$

define una distribución sobre Ω_1 llamada la imagen inversa de T por el cambio de variable ψ.

3.4. Fórmula de los saltos

Lema 6 *Sea $I =]a,b[$ un intervalo de $\mathbb{R}$ y T una distribución sobre I que verifica:*

$$T' = 0$$

entonces T es una constante.

<u>**Demostración:**</u>

Sea $\chi \in C_0^\infty(I)$ tal que $\int \chi(x)dx = 1$, sea $C = \langle T, \chi \rangle$ una constante.

Para $\varphi \in C_0^\infty(I)$, la función $g(x) = \varphi(x) - \chi(x)\int \varphi(y)dy$ es de integral cero. Entonces $f(x) = \int_{-\infty}^{x} g(y)dy$ pertenece a $C_0^\infty(I)$ y verifica $f' = g$.

Tenemos pues:

$$0 = \langle -T', f \rangle = \langle T, f' \rangle = \langle T, g \rangle = \langle T, \varphi \rangle - C \int \varphi(y)dy$$

es decir la distribución $T - C$ es nula. •

Lema 7 *Sea $I =]a,b[$ un intervalo de $\mathbb{R}$ y $f \in L^1_{loc}(I)$. Las soluciones de la ecuación $T' = f$ en $\mathcal{D}'(I)$ son las funciones contínuas sobre I de la forma:*

$$T(x) = Cste + \int_c^x f(y)dy \qquad c \in I$$

<u>**Demostración:**</u>

Sea $c \in I$, por el teorema de continuidad de las integrales dependientes de un parámetro, la función $g(x) = \int_c^x f(y)dy$ es contínua sobre I por el lema (6), debemos verificar que $g' = f$ en $\mathcal{D}'(I)$.

Sea A la parte de $\mathbb{R}^2$ definida por: $A = \{c < y < x\} \cup \{x < y < c\}$ y sea $\varphi \in C_0^\infty(I)$. Obtenemos utilizando el teorema de Fubini:

$$\langle g', \varphi \rangle = -\langle g, \varphi' \rangle = -\int \left(\int_c^x f(y)dy \right) \varphi'(x)dx$$

$$= -\iint_A sign(y-c) f(y) \varphi'(x)dx = -\int f(y) sign(y-c) \left(\int_{(x,y)\in A} \varphi'(x)dx \right) dy = \int f(x)\varphi(x)dx$$

De donde se tiene el resultado deseado. •

Proposición 4 *Fórmula de los saltos*
Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$ y g una función contínua sobre I cuya derivada en el sentido de las distribuciones pertenece a $L^1_{loc}(I)$.

Para todos los puntos $a < b$ de I se tiene la identidad en $\mathcal{D}'(I)$:

$$\frac{d}{dx}(\mathbb{1}_{]a,b[} g) = \mathbb{1}_{]a,b[} g' - g(b)\delta_b + g(a)\delta_a \tag{11}$$

<u>**Demostración:**</u>

Pongamos $g' = f \in L^1_{loc}(I)$, por el lema anterior tenemos:

$$g(x) = g(a) + \int_a^x f(y)dy$$

para todo $x \in I$.

De donde, para $\varphi \in C_0^\infty(I)$ se tiene:

$$\langle \frac{d}{dx} \mathbb{1}_{]a,b[} g, \varphi \rangle = -\int_a^b g(x)\varphi'(x)dx$$

$$= -g(a)\int_a^b \varphi'(x)dx + \int_a^b \left(\int_a^x f(y)dy\right)(-\varphi'(x))dx$$

$$= g(a)[\varphi(a) - \varphi(b)] + \int_a^b f(y)[\int_y^b (-\varphi'(x))dx]dy$$

$$= g(a)[\varphi(a) - \varphi(b)] + \int_a^b f(y)[\varphi(y) - \varphi(b)]dy$$

$$= g(a)[\varphi(a) - \varphi(b)] + \int_a^b f(y)\varphi(y)dy - \varphi(b)[g(b) - g(a)]$$

$$= \langle \mathbb{1}_{]a,b[}f, \varphi\rangle + g(a)\varphi(a) - g(b)\varphi(b)$$

•

3.5. Localización, regularización y convolución

3.5.1. Soporte de las distribuciones

Sea T una distribución sobre un abierto Ω de $\mathbb{R}^d$; para ω abierto contenido en Ω, T define una distribución sobre ω, llamada la restricción de T a ω, notada $T_{|\omega}$, con la fórmula:

$$\langle T_{|\omega}, \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle \qquad \forall\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\omega)$$

Definición 9 *Sea $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Existe un abierto V de Ω tal que $T_{|V} = 0$.*

El complementario de V en Ω es el soporte de la distribución T. El soporte está caracterizado por:

$$x \notin supp(T) \iff \exists w \text{ tal que } T_{|\omega} = 0$$

Proposición 5 .

1. $supp(T_1 + T_2) = supp(T_1) \cup supp(T_2)$; $T_i \in \mathcal{D}'(\Omega)$
2. $supp(\partial^\alpha T) \subset supp(T)$, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y $\alpha \in \mathbb{N}^d$
3. $supp(\psi T) \subset supp(T) \cap supp(\psi)$, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$
4. $supp(T) \cap supp(\varphi) = \phi \Rightarrow \langle T, \varphi\rangle = 0$; $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$

Definición 10 *Notamos $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ el subespacio de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ formado por las distribuciones de soporte compacto.*

Sea $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ y K una vecindad compacta del soporte de T y $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ a soporte contenido en K e igual a 1 en una vecindad del soporte de T.

Para todo $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ se tiene: $\langle T, \varphi(1-\psi)\rangle = 0$ pues $supp(T) \cap supp(1-\psi) = \phi$.
Entonces: $\langle T, \varphi\rangle = \langle T, \psi\varphi\rangle \ \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$

Puesto que $\psi\varphi$ es a soporte en el compacto K, existen C y p tales que:

$$|\langle T, \psi\varphi\rangle| \leq C \sup_{x \in K \ |\alpha| \leq p} |\partial^\alpha(\psi\varphi)(x)|$$

es decir, con otra constante C' pero el mismo p:

$$|\langle T, \psi\varphi\rangle| \leq C' \sup_{x \in K \ |\alpha| \leq p} |\partial^\alpha \varphi(x)|$$

Concluimos que las distribuciones a soporte compacto son siempre de órden finito.

Las distribuciones a soporte reducido a un punto $a \in \mathbb{R}^d$ están caracterizadas por el teorema siguiente:

Teorema 8 *Sea $a \in \mathbb{R}^d$, las distribuciones a soporte en $\{a\}$ son combinaciones lineales de derivadas de la distribución de Dirac en a.*

3.5.2. Regularización

Sea $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ y $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Definimos una función de x de la siguiente manera:

$$(T \star \varphi)(x) = \langle T, \tau_x \check{\varphi}\rangle$$

en donde $\tau_x\check{\varphi}$ es la función $y \longmapsto \check{\varphi}(y-x) = \varphi(x-y)$ elemento de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Para $T \in L^1_{loc}$ esta fórmula coincide con la definición usual

$$(f \star g)(x) = \int f(y)\varphi(x-y)dy$$

Definición 11 *Se llama $T \star \varphi$ el producto de convolución de T y de φ.*
Es una función $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ que verifica para todo α:

$$\partial^\alpha(T \star \varphi) = T \star \partial^\alpha \varphi$$

En otras palabras se tiene: $\mathcal{D}' \star \mathcal{C}^\infty \rightarrow \mathcal{C}^\infty$

Proposición 6 *Sea* $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ *y* $\varphi(x,y) \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p)$.

Para $y \in \mathbb{R}^p$ *definimos* $\psi(y) = \langle T, \varphi(.,y)\rangle$.
Tenemos entonces:

1. *(Derivación en el corchete)*
   La función ψ *está en* $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^p)$ *y se tiene:*

$$\partial^\alpha \psi(y) = \langle T, \partial_y^\alpha \varphi(.,y)\rangle$$

2. *(Integración en el corchete)*

$$\int_{\mathbb{R}^p} \psi(y)dy = \langle T, \int_{\mathbb{R}^p} \varphi(.,y)dy\rangle$$

Proposición 7 *Para* $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ *y* $\varphi, \psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ *se tiene:*

1. $supp(T \star \varphi) \subset supp(T) + supp(\varphi)$
2. $(T \star \varphi) \star \psi = T \star (\varphi \star \psi)$
3. $(T \star \varphi)(0) = \langle T, \check{\varphi}\rangle$
4. $\partial^\alpha(T \star \varphi) = \partial^\alpha T \star \varphi = T \star \partial^\alpha \varphi$

Teorema 9 *Sea* χ_ε *una aproximación de la identidad.*
Para $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, *la sucesión de funciones* $\mathcal{C}^\infty$, $T_\varepsilon = T \star \chi_\varepsilon$ *converge en* $\mathcal{D}'$ *hacia* T.

3.5.3. Convolución $\mathcal{D}' \star \mathcal{E}'$

Para $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ y $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ queremos definir una distribución producto de convolución $T\star S$ que coincida con $T\star\varphi$ en el caso en que $S = \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Observamos que para $f \in L^1_{loc}$ y $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$; $\int f(x)\check{\varphi}(x)dx = \int \check{f}(x)\varphi(x)dx$, entonces para $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ definimos la distribución $\check{T}$ de la siguiente manera:

$$\langle \check{T}, \varphi\rangle = \langle T, \check{\varphi}\rangle \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$$

Además para $\varphi, \psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ tenemos:

$$\langle T \star \psi, \varphi\rangle = \Big((T \star \psi) \star \check{\varphi}\Big)(0)$$

$$= \Big(T \star (\psi \star \check{\varphi})\Big)(0)$$

$$= \langle T, (\psi \star \check{\varphi})\check{}\rangle$$

Pero se tiene:

$$(\psi\star\check{\varphi})\check{}(x) = (\psi\star\check{\varphi})(-x) = \int \psi(-y)\check{\varphi}(-x-y)dy = \int \psi(y)\varphi(x+y)dy = (\check{\psi}\star\varphi)(x)$$

de donde

$$\langle T \star \psi, \varphi\rangle = \langle T, \check{\psi} \star \varphi\rangle \tag{12}$$

Definición 12 *Para $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ y $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ el producto de convolución $T \star S$ es la distribución sobre $\mathbb{R}^d$ definida por:*

$$\langle T \star S, \varphi\rangle = \langle T, \check{S} \star \varphi\rangle \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$$

Es decir: $\mathcal{D}' \star \mathcal{E}' \to \mathcal{D}'$

Prueba:

Hay que verificar que esta fórmula define una distribución sobre $\mathbb{R}^d$. Es decir, para todo K compacto de $\mathbb{R}^d$, existe p y C tales que:

$$|\langle T, \check{S} \star \varphi\rangle| \leq C \sup_{x\in\mathbb{R}^d, |\alpha|\leq p} |\partial^\alpha \varphi|(x)$$

Sea $L = supp(\check{S}) + K$, puesto que el soporte de $\check{S}$ y K son compactos, entonces L es compacto.

Tenemos $\check{S}\star\varphi \in \mathcal{C}_L^\infty$. Puesto que T es una distribución, existe q y C' tales que:

$$|\langle T, \check{S} \star \varphi\rangle \leq D \sup_{|\beta|\leq q} |\partial^\beta(\check{S} \star \varphi)(x)|$$

pero se tiene: $\partial^\beta(\check{S} \star \varphi)(x) = (\check{S} \star \partial^\beta \varphi)(x) = \langle \check{S}, \tau_x(\partial^\beta\varphi)\check{}\rangle$.

La función $y \to \tau_x(\partial^\beta \varphi)\check{}(y)$ está en $\mathcal{C}_0^\infty$, y dado que $\check{S} \in \mathcal{E}'$, existe q', D' tales que: $|\langle \check{S}, \psi\rangle| \leq D' \sup_{|\gamma|\leq q'} |\partial^\gamma \psi(y)|$ para todo $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty$. Entonces:

$$|\partial^\beta(\check{S} \star \varphi)(x)| \leq D' \sup_{|\alpha|\leq q+q'} |\partial^\alpha \varphi(x)| \qquad \forall |\beta| \leq q$$

Con este resultado verificamos que el objeto que hemos definido es una distribución.•

Proposición 8 *Para $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ tenemos:*

1. $supp(T \star S) \subset supp(T) + supp(S)$
2. $\partial^\alpha (T \star S) = \partial^\alpha T \star S = T \star \partial^\alpha S$

Demostración:

2)

$$\begin{aligned}
\langle \partial^\alpha (T \star S), \varphi \rangle &= \langle T \star S, (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \varphi \rangle \\
&= \langle T, \check{S} \star (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \varphi \rangle \\
&= \langle T, (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha (\check{S} \star \varphi) \rangle \\
&= \langle \partial^\alpha T, \check{S} \star \varphi \rangle \\
&= \langle \partial^\alpha T \star S, \varphi \rangle
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\langle \partial^\alpha (T \star S), \varphi \rangle &= \langle T \star S, (-1)^{|\alpha|} \rangle \\
&= \langle T, \check{S} \star (-1)^{\alpha} \partial^\alpha \varphi \rangle \\
&= \langle T, (\partial S)\check{} \star \varphi \rangle = \langle T \star \partial^\alpha S, \varphi \rangle
\end{aligned}$$

Ejemplo

Para toda distribución T se tiene $T \star \delta_0 = T$, en efecto:

$$\langle T \star \delta_0, \varphi \rangle = \langle T, \check{\delta}_0 \star \varphi \rangle$$

pero $\check{\delta}_0 = \delta_0$ y:

$$(\delta_0 \star \varphi)(x) = \langle \delta_0, \tau_x \check{\varphi} \rangle = \tau_x(\check{\varphi})(0) = \check{\varphi}(0 - x) = \varphi(x)$$

Se deduce que $\partial^\alpha T = T \star \partial^\alpha \delta_0$

Proposición 9 *Para $S_1, S_2 \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ se tiene: $S_1 \star S_2 = S_2 \star S_1$*

Teorema 10 *Sea $T_m \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ una sucesión que converge hacia T en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ y sea $S_m \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ una sucesión que converge hacia S en $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ tal que existe un compacto fijo K que contiene el soporte de todas las S_m.*

Entonces las sucesiones $T_m \star S$ y $T \star S_m$ convergen en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ hacia $T \star S$

Teorema 11 *Para $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, $S_1, S_2 \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ se tiene:*

$$(T \star S_1) \star S_2 = T \star (S_1 \star S_2)$$

4. Transformada de Fourier

4.1. Transformada de Fourier sobre L^1

Definición 13 *Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Llamaremos transformada de Fourier de f la función notada $\hat{f}$ definida por:*

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix.\xi} f(x)dx \qquad (x.\xi = x_1\xi_1 + ... + x_d\xi_d) \tag{13}$$

Teorema 12 *Para todo $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, la función $\hat{f}$ es contínua y verifica:*

$$||\hat{f}||_\infty \leq ||f||_1 \tag{14}$$

<u>**Demostración:**</u>

La continuidad resulta del teorema de continuidad de las integrales que dependen de un parámetro. Además:

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \int |f(x)|dx = ||f||_1$$

de donde se obtiene (14) •

Proposición 10 *Para $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ se tiene:*

$$\widehat{(f \star g)}(\xi) = \hat{f}(\xi).\hat{g}(\xi) \tag{15}$$

<u>**Demostración:**</u>

La función $(x, y) \to e^{-ix.\xi} f(y)g(x - y)$ es integrable y se puede aplicar el teorema de Fubini:

$$\widehat{f \star g}(\xi) = \int e^{-ix.\xi}(f \star g)(x)dx = \int e^{-ix.\xi}\Big(\int f(y)g(x-y)dy\Big)dx$$

$= \iint e^{-ix.\xi} f(y)g(x-y)dydx$ con Fubini y un cambio de variable se tiene

$$= \iint e^{-i(u+y).\xi} f(y)g(u)dydu$$
$$= \int e^{-iu.\xi} g(u)du. \int e^{-iy.\xi} f(y)dy$$
$$= \hat{g}(\xi).\hat{f}(\xi)$$

•

4.2. El espacio $\mathcal{S}$ de Schwartz

Definición 14 *El espacio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ de Schwartz es el espacio de las funciones $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ a decrecimiento rápido, es decir:*

$$\forall\alpha, \forall\beta \qquad x^\alpha \partial^\beta f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$$

Para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ y p entero definimos:

$$N_p(f) = \sum_{|\alpha|\leq p; |\beta| \leq p} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| \tag{16}$$

El espacio de Schwartz es estable por derivación y por multiplicación por los polinomios.

Además, para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, tenemos para $|\alpha| \leq p$, $|\beta| \leq p$:

$$||(1 + \sum_i |x_i|^{d+1}) x^\alpha \partial^\beta f||_\infty \leq N_{p+d+1}(f)$$

de donde $x^\alpha \partial^\beta f \in L^1((\mathbb{R}^d)$ y

$$||x^\alpha \partial^\beta f||_1 \leq N_{p+d+1}(f) \int \frac{dx}{(1 + \sum_i |x_i|^{d+1})}$$

Teorema 13 *Para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ se tiene $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ y existen constantes C_p tales que:*

$$N_p(\hat{f}) \leq C_p N_{p+d+1}(f) \tag{17}$$

Además, para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ tenemos las identidades:

$$\mathcal{F}(\partial_i f) = i\xi_j \mathcal{F}(f) \tag{18}$$

$$\mathcal{F}(x_i f) = i\partial_j \mathcal{F}(f) \tag{19}$$

Ejemplo: (Transformada de Fourier de Gausianas)

Para $\lambda > 0$ la función $x \to e^{-\lambda x^2/2}$ está en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ y se tiene:

$$\mathcal{F}(e^{-\lambda x^2/2})(\xi) = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{d/2} e^{-\lambda\xi^2/2\lambda}$$

Es suficiente tratar el caso $d = 1$:

$$\mathcal{F}(e^{-\lambda x^2/2})(\xi) = \int e^{-ix.\xi - \lambda x^2/2} dx$$

pero la función $g(\xi) = \int e^{-ix\xi-\lambda x^2/2}dx$ verifica la ecuación diferencial $\xi g + \lambda g' = 0$.
Tenemos entonces:

$$g(0) = \int e^{-\lambda x^2/2}dx = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}}$$

De donde:

$$g(\xi) = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}}\, e^{-\xi^2/2\lambda} \qquad \bullet$$

Teorema 14 *Fórmula sumatoria de Poisson*
Para todo $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ se tiene la identidad:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} f(2\pi k) = (2\pi)^{-d}\sum_{n\in\mathbb{Z}^d}\hat{f}(n) \tag{20}$$

Teorema 15 *Fórmula de inversión de Fourier*
La transformación de Fourier $f \to \hat{f}$ es una biyección de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Para todo $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ tenemos:

$$f(x) = (2\pi)^{-d}\int e^{ix.\xi}\hat{f}(\xi)d\xi \tag{21}$$

La biyección inversa $\mathcal{F}^{-1}$ está dada por: $\mathcal{F}^{-1}(g)(x) = (2\pi)^{-d}\mathcal{F}(g)(-x)$.

Demostración:

Sea $a \in \mathbb{R}^d$ y $f_a(x) = f(x)e^{-iax} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Tenemos $\hat{f_a}(\xi) = \hat{f}(\xi + a)$ y la fórmula sumatoria de Poisson aplicada a f_a nos da la identidad:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} f(2\pi k)e^{-2i\pi ak} = (2\pi)^{-d}\sum_{n\in\mathbb{Z}^d}\hat{f}(n+a) \tag{22}$$

Estos dos términos son funciones C^∞ de a y las dos series son uniformemente convergentes en a. Integrando (22) para $a \in [0,1]^d = K$ obtenemos, permutando la suma y la integral:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} f(2\pi k)\int_K e^{-2i\pi ak}da = (2\pi)^{-d}\sum_{n\in\mathbb{Z}^d}\int_K \hat{f}(n+a)da$$

es decir:

$$f(0) = (2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d}\hat{f}(\xi)d\xi$$

Aplicando este resultado a la función $\tau_{-y}f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, que verifica:

$$\widehat{\tau_{-y}f}(\xi) = \int e^{-ix\xi} f(x+y)dx = e^{iy\xi}\hat{f}(\xi)$$

Obtenemos $f(y) = \tau_{-y}f(0) = (2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d}\widehat{\tau_{-y}f}(\xi) = (2\pi)^{-d}\int e^{iy\xi}\hat{f}(\xi)d\xi$, de donde se concluye el teorema.

•

Definición 15 *Se dice que una sucesión (f_n) de elementos de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ converge en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ hacia $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ si, para todo p:*

$$\lim_{n\to\infty} N_p(f - f_n) = 0$$

Observación:

Si $(\varphi)_n \in C_0^\infty$ converge en C_0^∞ hacia $\varphi \in C_0^\infty$, entonces $(\varphi)_n$ converge hacia φ en $\mathcal{S}$. Es decir, la inyección $C_0^\infty \to \mathcal{S}$ preserva la convergencia de las sucesiones.

La estimación (17) nos dice que si (f_n) converge hacia f en $\mathcal{S}$, entonces $\hat{f}_n$ converge hacia $\hat{f}$ en $\mathcal{S}$

Lema 8 *Sea $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Existe entonces una sucesión φ_n de elementos de $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ que converge hacia f en $\mathcal{S}$.*

Es decir que C_0^∞ es denso en $\mathcal{S}$.

4.3. Distribuciones Temperadas

Definición 16 *El espacio de distribuciones temperadas sobre $\mathbb{R}^d$, es el subespacio de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ formado de las distribuciones T que verifican:*

$$(\exists p, C \geq 0)(\forall \varphi \in C_0^\infty) \qquad |\langle T, \varphi\rangle| \leq C N_p(\varphi) \tag{23}$$

Ejemplos:

Los espacios $L^p(\mathbb{R}^d)$, $p = 1, 2, \infty$ están en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$

El espacio $\mathcal{E}'$ de las distribuciones a soporte compacto está en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$

Definición 17 *Convergencia en $\mathcal{S}'$ Se dice que la sucesión (T_n) de elementos de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, converge hacia T en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, si:*

$$(\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)) \quad \lim_{n\to\infty} \langle T_n, \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle$$

Proposición 11 .

1. *Sea $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, entonces $\partial^\alpha T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ y $x^\alpha T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$*

2. *Si la sucesión (T_n) converge hacia T en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, las sucesiones $(\partial^\alpha T_n)$ y $(x^\alpha T_n)$ convergen hacia $\partial^\alpha T$ y $x^\alpha T$ en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.*

Si $f(x)$ y $g(\xi)$ son dos funciones de $L^1(\mathbb{R}^d)$, la función $(x,\xi) \to e^{-ix.\xi} f(x)g(\xi)$ es integrable, luego por el teorema de Fubini:

$$\int f(x)\hat{g}(x)dx = \iint f(x)e^{-ix.\xi}g(\xi)d\xi dx = \int \hat{f}(\xi)g(\xi)d\xi$$

Esto nos permite generalizar la transformada de Fourier al espacio de las distribuciones temperadas.

Definición 18 *Sea $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, la transformada de Fourier de T es la distribución temperada $\hat{T}$ definida por:*

$$\langle \hat{T}, \varphi\rangle = \langle T, \hat{\varphi}\rangle \qquad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \tag{24}$$

Ejemplos:

Se tiene $\delta_a \in \mathcal{S}'$ y $\hat{\delta_a} = e^{-ia\xi}$

Además se tiene $\mathbb{1} \in \mathcal{S}'$ y $\hat{\mathbb{1}} = (2\pi)^d \delta_0$.

Teorema 16 *La transformada de Fourier es una biyección de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ de inversa:*

$$\mathcal{F}^{-1}(T) = (2\pi)^{-d}\mathcal{F}(T)\check{}$$

Proposición 12 *Tenemos las identidades para $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$*

$$\mathcal{F}(\partial_j T) = i\xi\mathcal{F}(T)$$
$$\mathcal{F}(x_j) = i\partial_j\mathcal{F}(T)$$

Teorema 17 *Para $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$, se tiene que $\hat{u} \in L^2$ y la fórmula de Plancherel:*

$$\int |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi = (2\pi)^d \int |u(x)|^2 dx \tag{25}$$