Lección n°1: Espacios Clásicos de funciones

EPN, agosto 2019

Índice

La Teoría de Distribuciones permite generalizar la noción tradicional de funciones y en particular proporciona un marco muy cómodo para considerar objetos generales como las derivadas de funciones que no son necesariamente derivables en el sentido usual, las medidas de Radon, algunas funciones muy singulares, etc. Este cambio de punto de vista (y las reglas de cálculo consecuentes) son desde la segunda mitad del siglo XX totalmente indispensables para estudiar de manera satisfactoria ciertas ramas de las matemáticas como son las ecuaciones en derivadas parciales, el análisis armónico, el análisis funcional, las probabilidades y la estadística, entre otros.

Dado que vamos a *generalizar* las nociones de funciones y de derivadas, es necesario hacer un pequeño resumen para fijar nomenclatura y notaciones.

1. Espacios de funciones continuas y acotadas

Estos espacios nos ayudan a medir la regularidad (derivabilidad) de las funciones así como su tamaño en un sentido clásico, es decir que las derivadas consideradas son las derivadas usuales.

- **Espacio de funciones continuas y acotadas $\mathcal{C}_a^0(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$:** El espacio de funciones continuas y acotadas $\mathcal{C}_a^0(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ se define como el conjunto:

$$\mathcal{C}_a^0(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}) = \{f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} : f \text{ es continua y acotada}\}.$$

La norma de este espacio viene dada por:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)|. \tag{1}$$

Ejemplo: Sea $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} 1-|x| & \text{si } |x|\leq 1, \\ 0 & \text{si no,} \end{cases}$$

es una función continua y acotada. Por otro lado, si consideramos sobre $\mathbb{R}$ la función indicatriz $g(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$ tenemos que es una función acotada pero no es una función continua, con lo cual se tiene que $g\notin \mathcal{C}_a^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Observación 1 Diremos que la función f *es de clase* $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ si f es continua pero no necesariamente acotada. Por ejemplo sobre $\mathbb{R}$, la función $f(x) = |x|$ es continua pero no es acotada.

Necesitamos ahora introducir dos notaciones fundamentales que serán intensamente utilizadas en lo que sigue.

Definición 1 (Multi-índice) *Definimos un* multi-índice *de tamaño n como un vector*

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n,$$

y su longitud *se define como* $|\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j$.

Esta noción de multi-índice nos permitirá considerar derivadas parciales de una función hasta cierto orden como nos lo indica la definición siguiente.

Definición 2 *Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función suficientemente regular y si $\alpha \in \mathbb{N}^n$ es un multi-índice, definimos la derivada de orden $|\alpha|$ de f, notada por $D^\alpha f$, mediante la expresión*

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} f}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}(x).$$

Por ejemplo, si $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función regular y si $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2$ es un multi-índice de longitud $|\alpha| = 1$ (es decir $\alpha_1 = (1, 0)$ y $\alpha_2 = (0, 1)$), tenemos

$$D^{\alpha_1} f = \frac{\partial f}{\partial x_1}, \qquad D^{\alpha_2} f = \frac{\partial f}{\partial x_2}$$

Con estas notaciones podemos presentar el siguiente espacio de funciones.

- **Espacio de funciones k-derivables ($k \in \mathbb{N}$) continuas y acotadas $\mathcal{C}_a^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$:**
  Definimos el espacio funcional $\mathcal{C}_a^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ como el espacio de funciones que son k veces continuamente derivables y cuyas derivadas hasta el orden k, son continuas y acotadas. Es decir:

  $$\mathcal{C}_a^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} : \|f\|_{\mathcal{C}_a^k} < +\infty \right\}.$$

  en donde se tiene la norma

  $$\|f\|_{\mathcal{C}_a^k} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_\infty. \tag{2}$$

  Ejemplo: Las funciones $\sin(x)$ y $\cos(x)$ pertenecen a $\mathcal{C}_a^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ para todo $k \in \mathbb{N}$ pues son regulares y acotadas. Mientras que la función $e^x \notin \mathcal{C}_a^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ puesto que no es una función acotada, a pesar de ser una función k-derivable.

  Se puede observar que se tienen las siguientes inclusiones entre espacios de funciones derivables acotadas:

  $$\mathcal{C}_a^{k+1} \subset \mathcal{C}_a^k \subset \cdots \subset \mathcal{C}_a^0.$$

  Estas inclusiones son estrictas, por ejemplo consideremos la siguiente función real

  $$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in [0, 2[, \\ -x^2 & \text{si } x \in]-2, 0], \end{cases}$$

  podemos ver entonces que esta función pertenece al espacio $\mathcal{C}_a^1(]-2, 2[, \mathbb{R})$ pero no pertenece al espacio $\mathcal{C}_a^2(]-2, 2[, \mathbb{R})$ puesto que hay un problema de continuidad de sus segundas derivadas.

Observación 2 Sea $k \in \mathbb{N}$. La clase $\mathcal{C}^k$ es el conjunto de funciones que son continuas y derivables y sus derivadas son continuas hasta el orden k. Aquí no se pide la condición de acotación, de esta manera se tiene que la función e^x pertenece a estos espacios.

2. Convergencia simple y convergencia uniforme

Como vamos a ver después, el estudio de la convergencia de sucesiones de funciones continuas (y derivables) es muy importante para realizar cálculos y operaciones elementales. Cuando se dispone de una estructura de espacio métrico o normado es fácil caracterizar la convergencia de sucesiones, sin embargo en algunos de los espacios clásicos que vamos a presentar aquí no siempre se dispone de tal estructura y es por eso que es necesario recordar las dos definiciones usuales de convergencia que son las siguientes:

- **Convergencia simple:**
  Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^n$ y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones de A en $\mathbb{R}$ y sea una función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Decimos que la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplemente* hacia f en A, si

  $$\forall x \in A,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,\ \forall n > n_0.$$

  Es fundamental observar que la elección de n_0 se hace luego de conocer x y ε, de modo que n_0 puede depender de ambos.

  Ejemplo: La función $f_n : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $f_n(x) = x^n$ converge puntualmente hacia

  $$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases} \tag{3}$$

- **Convergencia uniforme:**
  Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^n$ y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones de A en $\mathbb{R}$ y sea una función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Decimos que la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente* hacia f en A, si

  $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,\ \forall n > n_0,\ \forall x \in A.$$

  Es importante observar que en este caso el valor de n_0 depende solamente de ε.

  Ejemplo: La función $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $f_n(x) = \dfrac{x}{1 + nx^2}$ converge uniformemente hacia 0 cuando $n \longrightarrow +\infty$.

  De la definición de convergencia simple y uniforme, es claro que la convergencia uniforme implica la convergencia simple, sin embargo, el recíproco no es verdadero. Para ello, tomemos el siguiente ejemplo:

  Reconsideremos la sucesión $f_n : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f_n(x) = x^n$ y sea f el límite puntual de esta sucesión dado en (3). Notemos que se tiene

  $$|f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} x^n & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 0 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

  Si se tendría que $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$ uniformemente en $[0, 1]$, considerando $\varepsilon = 1/2 > 0$ existiría $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x^n < \frac{1}{2}$, para todo $n \geq n_0$ y para todo $0 \leq x < 1$, pero haciendo $x \longrightarrow 1^-$ en la desigualdad anterior, con algún $n \geq n_0$ fijo, se tiene que $1 \leq 1/2$, lo que es absurdo. Por ende la sucesión f_n no converge uniformemente hacia la función f.

La importancia de la convergencia uniforme está dada por el siguiente resultado:

Proposición 1 *Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones continuas a valores reales que converge uniformemente hacia f, entonces f es continua.*

Es importante observar que $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$ uniformemente si y sólo si $\|f_n - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ y es por este motivo que la norma $\|\cdot\|_\infty$ definida en (1) se llama la *norma de la convergencia uniforme*. Una consecuencia de este hecho es el siguiente resultado.

Proposición 2 *Los espacios $(\mathcal{C}^0_a(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ y $(\mathcal{C}^k_a(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\mathcal{C}^k_a})$ para todo $k \in \mathbb{N}$ son espacios de Banach.*

3. Espacios de funciones continuas a soporte compacto

La noción de soporte de una función será fundamental para desarrollar algunas técnicas en la teoría de distribuciones.

Definición 3 (Soporte de una función continua) *El soporte de una función continua $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ está definido como el conjunto*

$$sop(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}}.$$

Vemos de esta manera que fuera del soporte la función se anula.

Dado que las funciones continuas son acotadas sobre los conjuntos compactos, es interesante introducir esta particularidad en la estructura de los espacios anteriores y de esta manera podemos considerar el espacio $\mathcal{C}_c^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ como el conjunto de funciones, a soporte compacto, que son k veces continuamente derivables (con $k \in \mathbb{N}$) y cuyas derivadas hasta el orden k son continuas y acotadas (por estar definidas sobre un conjunto compacto). Estos espacios de funciones continuas/derivables a soporte compacto son por lo tanto subespacios de los espacios de funciones continuas/derivables acotadas, es decir

$$\mathcal{C}_c^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_a^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}).$$

Observación 3 Las notaciones $\mathcal{C}_0^k$ y $\mathcal{C}_c^k$ coinciden en la literatura.

El hecho de trabajar con funciones a soporte compacto es muy útil por varias razones: por un lado permite localizar la información sobre el soporte de las funciones (que es compacto, lo cual siempre es agradable) pero por sobre todo permite anular lo que sucede *fuera* de este compacto, en particular lo que sucede *en los bordes* (por ejemplo, si trabajamos en la recta real, al trabajar con funciones a soporte compacto dejamos de preocuparnos por lo que sucede en $\pm\infty$).

Sin embargo, cuando se trabaja sobre el espacio entero (es decir $\mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^n$) los espacios de funciones continuas/derivables a soporte compacto no poseen una estructura topológica tan sencilla como la de los espacios $\mathcal{C}_a^k$.

Notemos únicamente que, de igual manera que para las funciones derivables acotadas, tenemos las siguientes inclusiones estrictas:

$$\mathcal{C}_c^{k+1} \subset \mathcal{C}_c^k \subset \cdots \subset \mathcal{C}_c^0.$$

4. Espacios de funciones regulares

Definición 4 *A las funciones que son infinitamente derivables las denominaremos como funciones* regulares

Todas las propiedades básicas de las distribuciones encuentran su fundamento teórico en las características de estos espacios de funciones regulares, y es por esta razón que detallamos aquí algunas propiedades importantes de estos espacios pero para ello necesitamos recordar algunas definiciones importantes.

Definición 5 (semi-norma) *Sea E un espacio vectorial real. Una función $p : E \longrightarrow [0, +\infty[$ es una* semi-norma *si verifica las siguientes propiedades:*

1) ***Propiedad homogénea*** *para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y todo $x \in E$: $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$,*

2) ***Desigualdad triangular*** *para todo $x, y \in E$: $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$.*

Al espacio (E, p) se denominará espacio semi-normado.

Usualmente una sola semi-norma no permite caracterizar convenientemente a los espacios considerados y es necesario considerar una *familia* de semi-normas para obtener de esta manera mayor estructura, así si $(E, (p_n)_{n\in\mathbb{N}})$ un espacio vectorial real dotado de una familia numerable de semi-normas y si E es metrizable podemos considerar la siguiente distancia basada en esta familia de semi-normas:

$$\begin{array}{rccl} d_E: & E\times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & d_E(x,y)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n}\frac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)}. \end{array} \tag{4}$$

La definición importante aquí es la siguiente:

Definición 6 (Espacio de Fréchet) *Sea E un espacio vectorial y sea $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una familia numerable de semi-normas definida sobre E. Si E es metrizable y completo con respecto a la métrica* (4) *diremos que E es un espacio de Fréchet.*

Si deseamos aplicar estas dos definiciones al estudio de los espacios de funciones definidas sobre $\mathbb{R}^n$ necesitaremos el concepto a continuación

Definición 7 (Sucesión exhaustiva de compactos) *Diremos que una familia $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$ es una* sucesión exhaustiva de compactos *si $K_n\subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$ y si se tiene $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} K_n=\mathbb{R}^n$.*

Un ejemplo de sucesión exhaustiva de compactos en $\mathbb{R}$ está dado por los conjuntos $[-n,n]$ con $n\geq 1$.

Una vez que disponemos de todas estas definiciones podemos estudiar con toda comodidad a los espacios de funciones siguientes que están conformados por funciones infinitamente derivables.

4.1. Espacio $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$

Definimos el espacio $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ como el conjunto de funciones que son infinitamente derivables, pero no necesariamente acotadas. En particular se tiene la siguiente expresión:

$$\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})=\bigcap_{k\in\mathbb{N}}\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}),$$

y un ejemplo de función que pertenece a este espacio $\mathcal{C}^\infty$ es la función e^x.

Dotemos ahora al espacio $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ de una topología conveniente. Sea $\varphi:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ una función que pertenece al espacio $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ y sea $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión exhaustiva de compactos. Si $n\in\mathbb{N}$ y $\alpha\in\mathbb{N}^n$, definimos la siguiente familia numerable de semi-normas

$$p_n(\varphi)=\max_{\substack{x\in K_n\\ |\alpha|\leq n}}|D^\alpha\varphi(x)|, \tag{5}$$

y con estas semi-normas definimos una distancia $d_{\mathcal{C}^\infty}$ sobre el espacio $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ de la siguiente manera

$$\begin{array}{rccl} d_{\mathcal{C}^\infty}: & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})\times\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (\varphi,\psi) & \longmapsto & d_{\mathcal{C}^\infty}(\varphi,\psi)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}2^{-n}\frac{p_n(\varphi-\psi)}{1+p_n(\varphi-\psi)}. \end{array} \tag{6}$$

Se tiene entonces que el espacio $(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}),d_{\mathcal{C}^\infty})$ es un espacio métrico completo (es decir que es un espacio de Fréchet) pero no es un espacio normado y de esta manera diremos que la estructura *natural* del espacio de funciones infinitamente derivables está dada por esta distancia.

En particular, si $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones del espacio $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ y si $\varphi\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$, diremos que φ_n tiende hacia φ en $\mathcal{C}^\infty$ si se tiene el límite

$$\lim_{n\to+\infty}\max_{\substack{x\in K_n\\ |\alpha|\leq n}}|D^\alpha(\varphi_n-\varphi)(x)|=0.$$

4.2. Espacio $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$

El espacio $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ se definie como el conjunto de funciones infinitamente derivables a soporte compacto, es decir que se tiene

$$\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{C}_c^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}).$$

Este espacio será la base de todo nuestro estudio sobre las distribuciones y es por esta razón que merece el siguiente nombre

Definición 8 (Funciones test) *Las funciones que pertenecen al espacio $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ son llamadas funciones* test.

Observación 4 Las notaciones $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ y $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ coinciden en la literatura.

Demos un ejemplo de una función test y definamos la función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ por medio de la expresión

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{|x|^2}{1-|x|^2}} & \text{si } |x| < 1, \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1. \end{cases}$$

A partir de esta definición no es muy difícil verificar que es una función regular.

El estudio de la topología de las funciones test es indispensable para comprender los espacios de distribuciones y hay que tener un poco de cuidado al considerar la estructura topológica de estos espacios pues existen al menos dos topologías naturales en este espacio de funciones test.

En efecto, dado que se tiene la inclusión de espacios $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ es posible utilizar la métrica del espacio $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ definida en (6) e inducirla sobre el espacio $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ y de esta manera obtenemos un espacio métrico *pero no es un espacio completo* y para aclarar esta afirmación consideremos el siguiente ejemplo: sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tal que

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq 1/2, \\ 0 & \text{si } |x| > 1. \end{cases}$$

Definamos ahora $\psi_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\varphi(x-k)$, entonces se puede ver que $(\psi_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy para la distancia $d_{\mathcal{C}^\infty}$ pero $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \psi_n \notin \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ pues la función límite no es de soporte compacto.

Si bien es posible obtener una estructura métrica sobre el espacio de funciones test, como vemos no se tiene la completitud y esta propiedad es de fundamental importancia en lo que sigue. Por esta razón vamos a considerar una segunda estructura topológica por medio de la siguiente definición:

Definición 9 (Topología del límite inductivo) *Sean φ y $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ funciones que pertenecen al espacio $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Diremos que $\varphi_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varphi$ en $\mathcal{C}_c^\infty$ si:*

1) Existe un compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene sop$(\varphi_n) \subset K$,

2) para todo multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ se tiene

$$\lim_{n\to+\infty} \|D^\alpha(\varphi_n - \varphi)\|_\infty = 0.$$

Se puede demostrar que el espacio $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ con esta topología del límite inductivo es un espacio completo pero no es metrizable.

5. Clase de Schwartz

Entre el espacio $\mathcal{C}_c^\infty$ y el espacio de las funciones $\mathcal{C}^\infty$ existe un espacio muy importante de funciones regulares cuyas propiedades serán fundamentales para definir el espacio de distribuciones temperadas, este espacio se lo conoce como la clase de Schwartz y está constituido por las funciones que decrecen *rápidamente al infinito*.

Para definir esta noción de decrecimiento rápido necesitamos la siguiente notación: si $\alpha \in \mathbb{N}^n$ es un multi-índice y si $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ es un vector de $\mathbb{R}^n$, notaremos

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \times x_2^{\alpha_2} \times \cdots \times x_n^{\alpha_n}.$$

Una función a decrecimiento rápido al infinito es entonces una función que logra controlar la explosión de todos los polinomios x^α.

Definición 10 (Clase de Schwartz) *Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ dos multi-índices, la* clase de Schwartz *se define como el conjunto de funciones regulares a decrecimiento rápido al infinito, es decir:*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = \Big\{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) : \rho_{\alpha,\beta}(\varphi) < +\infty \quad \textit{para todo } \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n\Big\},$$

donde

$$\rho_{\alpha,\beta}(\varphi) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta \varphi(x)|.$$

De la definición anterior, se puede observar que la clase de Schwartz está formada por las funciones regulares cuyas derivadas de todo orden decrecen rápidamente al infinito pues tienden hacia cero más fuertemente que todo polinomio.

Observación 5 Como definición equivalente tenemos que una función $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ pertence al espacio de Schwartz si y solamente si $\lim\limits_{|x|\to+\infty} |x^\alpha D^\beta \varphi(x)| = 0$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$.

Nótese que tenemos las siguientes inclusiones

$$\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}),$$

de manera que la clase de Schwartz está atrapada entre dos espacios con estructuras topológicas bien distintas y vamos a ver que en realidad la clase de Schwartz posee una estructura de espacio de Fréchet.

Para ello, si φ es una función que pertence al espacio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ y si para cada $k \in \mathbb{N}$ y cada par de multi-índices $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ consideramos la familia de semi-normas

$$p_k(\varphi) = \sum_{\substack{|\alpha|\leq k\\ |\beta|\leq k}} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta \varphi(x)|, \tag{7}$$

entonces podemos definir una distancia $d_\mathcal{S}$ sobre el espacio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ de la siguiente manera

$$\begin{array}{rccl} d_\mathcal{S}: & \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (\varphi, \psi) & \longmapsto & d_\mathcal{S}(\varphi, \psi) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-k} \frac{p_k(\varphi-\psi)}{1+p_k(\varphi-\psi)}. \end{array}$$

Con esta función, $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), d_\mathcal{S})$ es un espacio vectorial topológico localmente convexo metrizable. Más aún, tenemos el siguiente resultado:

Proposición 3 *El espacio $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), d_\mathcal{S})$ es un espacio de Fréchet.*

Una característica importante de este espacio, es su caracterización por medio de sucesiones convergentes. Sea $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones en la clase $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ y $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$. Diremos que $\varphi_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varphi$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ si para todo par de muti-índices $\alpha,\beta \in \mathbb{N}^n$ se tiene

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left| x^\alpha D^\beta \left(\varphi_n - \varphi\right)(x) \right| = 0.$$

Ejemplos:

- Para todo multi-índice $\gamma \in \mathbb{N}^n$ y $x \in \mathbb{R}^n$, la función $f(x) = x^\gamma e^{-|x|^2}$ pertenece a la clase de Schwartz y en particular la función $e^{-|x|^2}$ (que no es más que una función gaussiana) es el ejemplo más usual de función de esta clase de funciones: en efecto, la exponencial decrece mucho más rápido que todo polinomio.
- Toda función regular a soporte compacto pertenece a la clase de Schwartz: precisamente el soporte compacto permite controlar la explosión de todos los polinomios.
- La función $f(x) = \dfrac{1}{(1+|x|^2)^k}$ donde $k \in \mathbb{N}$ no pertenece a la clase de Schwartz: basta notar que se tiene

$$\lim_{|x|\to+\infty} |x|^{2k} f(x) = \lim_{|x|\to+\infty} \frac{|x|^{2k}}{(1+|x|^2)^k} = 1.$$

- La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{-x^2}\sin(e^{x^2})$ no pertenece a la clase de Schwartz, pues $f'(x) = -2xe^{-x^2}\sin(e^{x^2}) + 2x\cos\left(e^{x^2}\right)$ y se tiene que

$$\lim_{|x|\to+\infty} -2xe^{-x^2}\sin\left(e^{x^2}\right) = 0 \qquad \text{pero} \qquad \lim_{|x|\to+\infty} 2x\cos\left(e^{x^2}\right) \qquad \text{no existe,}$$

  y dado que la primera derivada de la función f no decrece convenientemente no se tiene la pertenencia a la clase de Schwartz.

Si queremos estudiar la convergencia de sucesiones en la clase de Schwartz tenemos la proposición que sigue.

Proposición 4 *Sea $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones en la clase $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ y sea $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$. Entonces los siguientes puntos son equivalentes:*

1) *la sucesión $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge hacia la función φ en la clase de Schwartz, lo que se denota por*

$$\varphi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{d_{\mathcal{S}}} \varphi$$

2) *Para todo $k \in \mathbb{N}$, se tiene el límite en los reales $p_k(\varphi_n - \varphi) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ en donde p_k es una de las semi-normas definidas en (7).*

3) *Para todo par de multi-índices $\alpha,\beta \in \mathbb{N}^n$ se tiene que*

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left| x^\alpha D^\beta \left(\varphi_n - \varphi\right)(x) \right| = 0.$$

Nótese que de la proposición anterior, si se tiene $\varphi_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varphi(x)$ en la clase $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$, entonces se tiene en particular (tomando $\alpha = 0$) $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, es decir que se tiene la convergencia $\varphi_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varphi$ uniformemente y por lo tanto se tiene la convergencia simple de la sucesión.

Ejemplos:

- Sobre $\mathbb{R}$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ se definen los polinomios $P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{k!}$ y con ellos definimos la sucesión $f_n(x) = P_n(x)e^{-x^2}$. Si consideramos $f(x) = e^{-2x^2}$, entonces $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$ en la clase $\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

- Sobre $\mathbb{R}$ consideremos las funciones $f_n(x) = e^{-x^2/n}$ y podemos ver sin problema que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones en la clase $\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Vamos a probar que esta sucesión no converge en la clase $\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. En efecto, si $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$ para alguna función $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, entonces $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$ puntualmente. Pero, para cada $x \in \mathbb{R}$ tenemos
$$\lim_{n\to+\infty} e^{-x^2/n} = 1,$$
de donde se obtiene $f(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Pero la función constante 1 no pertenece a la clase de Schwartz.

Tendremos la oportunidad de retomar el estudio de la clase de Schwartz en lecciones posteriores, pero por el momento terminamos esta introducción con el siguiente resultado de densidad:

Proposición 5 *El espacio $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ es denso en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$.*

6. Otros espacios de funciones

Otros espacios importantes que igualmente nos ayudan a medir la regularidad de las funciones son:

- **Espacio de funciones Lipschitz:** Diremos que una función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función *lipschitziana* o *Lipschitz* si es una función acotada y si existe una constante positiva $C > 0$ tal que se verifica la desigualdad
$$|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|, \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}^n.$$
Este espacio admite la norma
$$\|f\|_{Lip} = \|f\|_\infty + \sup_{x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|},$$
es decir se tiene
$$Lip(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} : \|f\|_{Lip} < +\infty\}.$$
Como ejemplos tenemos la función $|x|e^{-|x|^2}$ para $x \in \mathbb{R}^n$ y la función $|cos(x)|$ para $x \in \mathbb{R}$.

- **Espacio de funciones de tipo Hölder $\mathcal{C}_a^\gamma(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$:** Diremos que una función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función de tipo Hölder si es una función acotada y si verifica la desigualdad para $0 < \gamma < 1$
$$|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^\gamma, \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}^n.$$
Este espacio admite la norma
$$\|f\|_{\mathcal{C}_a^\gamma} = \|f\|_\infty + \sup_{x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\gamma},$$
es decir se tiene
$$\mathcal{C}_a^\gamma(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}) = \left\{f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} : \|f\|_{\mathcal{C}_a^\gamma} < +\infty,\ 0 < \gamma < 1\right\}.$$
Como ejemplo tenemos la función $|x|^\gamma e^{-|x|^2}$ para $x \in \mathbb{R}^n$ y $0 < \gamma < 1$.

- **Clase de funciones de Zygmund $\mathcal{Z}_a(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$:** Diremos que una función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función de tipo Zygmund si es una función acotada y si verifica la desigualdad
$$|f(x+y) + f(x-y) - 2f(x)| \leq C|y|, \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}^n.$$
Este espacio admite la norma
$$\|f\|_{\mathcal{Z}_a} = \|f\|_\infty + \sup_{|y|\neq 0,\, x\in\mathbb{R}^n} \frac{|f(x+y)+f(x-y)-2f(x)|}{|y|},$$
es decir se tiene
$$\mathcal{Z}_a(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} : \|f\|_{\mathcal{Z}_a} < +\infty\}.$$
Como ejemplo tenemos la función $\sin(x)\ln|\sin(x)|$ para $x \in \mathbb{R}$ y la función $\sin|x|$ para $x \in \mathbb{R}$.

Todos estos espacios son espacios de Banach y se puede demostrar las siguientes inclusiones entre espacios:

$$\mathcal{C}_a^1 \subset Lip \subset \mathcal{Z}_a \subset \mathcal{C}_a^\gamma \subset \mathcal{C}_a^0.$$

Estas inclusiones indican que existen diversas maneras de medir la regularidad de las funciones y que en realidad existen muchos espacios de funciones entre el espacio de funciones que son únicamente continuas y el espacio de funciones que tiene una derivada continua.