Lección n°2: Espacios de Lebesgue y Transformada de Fourier. EPN, agosto 2019

Índice

En la lección anterior estudiamos los espacios de funciones clásicos. En esta lección estudiaremos los espacios de funciones medibles e integrables así como algunas herramientas fundamentales como son el producto de convolución y la transformada de Fourier.

1. Espacios de Lebesgue

En todo lo que sigue siempre consideraremos funciones reales $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ y el espacio $\mathbb{R}^n$ siempre estará dotado de su estructura natural de espacio medido $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), dx)$, donde dx denota la medida de Lebesgue.

Definición 1 (Espacios de Lebesgue) *Sea $1 \leq p < +\infty$ un parámetro real. El espacio de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, se define como el conjunto de (clases) de funciones medibles de potencia p-ésima integrables, es decir:*

$$L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : f \text{ es medible y } \|f\|_{L^p} < +\infty\}.$$

La norma de este espacio viene dada por

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx\right)^{1/p}, \text{ si } 1 \leq p < +\infty.$$

En el caso $p = +\infty$, se define el espacio $L^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ como el conjunto de (clases) de funciones medibles que son esencialmente acotadas y la norma en este espacio viene dada por:

$$\|f\|_{L^\infty} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} ess|f(x)|.$$

Aquí unas propiedades inmediatas de estos espacios de funciones.

Proposición 1

1) *Si $1 \leq p \leq +\infty$, los espacios $(L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^p})$ son espacios de Banach.*

2) *Si $1 < p, q < +\infty$ son tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces el espacio dual de $L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ es $L^q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, es decir,*

$$(L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}))' = L^q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}).$$

Nótese que el dual de $L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ es $L^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

Observación 1 En general no existe ninguna relación de inclusión entre los espacios de Lebesgue L^p y L^q con $1 \leq p, q \leq +\infty$ y $p \neq q$.

Notemos que algunos de los espacios de funciones regulares estudiados en la lección anterior verifican lo siguiente:

Proposición 2

1) El espacio $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ es denso en el espacio $L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ con $1 \leq p < +\infty$.

2) La clase de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ es densa en $L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ con $1 \leq p < +\infty$.

2. Espacios $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$

Las funciones localmente integrables juegan un rol muy importante en el análisis armónico pues constituyen una generalización interesante de los espacios de Lebesgue presentados en las líneas anteriores.

Definición 2 (Espacios L^p_{loc}) *Sea $1 \leq p < +\infty$, se define el espacio $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ como sigue:*

$$L^p_{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} : \int_K |f(x)|^p dx < +\infty, \text{ para todo } K \subset \mathbb{R}^n \text{ compacto} \right\}.$$

Si $p = +\infty$, el espacio $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ estará definido de la siguiente manera:

$$L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} : \sup_{x \in K} ess|f(x)| < +\infty, \text{ para todo } K \subset \mathbb{R}^n \text{ compacto} \right\}.$$

La estructura de estos espacios no puede ser caracterizada con una norma, pero notamos que si K es un conjunto compacto de $\mathbb{R}^n$, entonces la funcional $\|f\|_{L^p_{(K)}} = \left(\int_K |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$ es una semi-norma. De esta manera, si $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión exhaustiva de compactos entonces la expresión

$$d_{L^p_{loc}}(f, g) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} \frac{\|f - g\|_{L^p_{(K_n)}}}{1 + \|f - g\|_{L^p_{(K_n)}}} \quad f, g \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}),$$

es una distancia sobre este espacio y con esta distancia el espacio $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ es completo, es decir que es un espacio de Fréchet.

Ejemplos:

- Las funciones constantes pertenecen a $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.
- Toda función en el espacio $\mathcal{C}_a^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ pertenece al espacio $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.
- La función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}$$

  no pertenece a $L^p_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ puesto que f no es localmente integrable en $x = 0$, de hecho, es localmente integrable cerca de este punto ya que su integral sobre cada conjunto compacto que no lo incluye existe.

Proposición 3 *Sea $1 \leq p \leq +\infty$, el espacio $L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ está contenido en $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.*

Más particularmente, todos *los espacios de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ con $1 \leq p \leq +\infty$ están contenidos en el espacio $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.*

3. Desigualdades importantes

Proposición 4 (Desigualdad de Hölder) *Sean $1 \leq p, q, r \leq +\infty$ y sean $f \in L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ y $g \in L^q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$, entonces $fg \in L^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ y se tiene*

$$\|fg\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}.$$

Proposición 5 (Desigualdad de interpolación) *Sean $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq +\infty$ y sean $f \in L^{p_1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \cap L^{p_2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Entonces, para todo $1 \leq p \leq +\infty$ tales que $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_1} + \frac{1-\theta}{p_2}, \theta \in [0, 1]$, se tiene que*

$$f \in L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \text{ y } \|f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^{p_1}}^{\theta}\|f\|_{L^{p_2}}^{1-\theta}.$$

4. Convolución

La convolución es una herramienta totalmente fundamental para desarrollar diversos métodos de aproximación por medio de funciones regulares.

Definición 3 (Producto de convolución) *Sean f y g dos funciones que pertenecen al espacio de Lebesgue $L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. El producto de convolución entre las funciones f y g es una función que será notada por $f * g$ y que está definida por medio de la expresión*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y)dy.$$

Proposición 6 (Propiedades del producto de convolución) *Sean f, g y h tres funciones que pertenecen al espacio de Lebesgue $L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Entonces se tienen las siguientes identidades:*

1. *Asociatividad: $(f * g) * h = f * (g * h)$,*
2. *Distributividad por la izquierda: $f * (g + h) = f * g + f * h$,*
3. *Distributividad por la derecha: $(f + g) * h = f * h + g * h$,*
4. *si $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces se tiene $(\lambda f) * g = f * (\lambda g)$.*

Hasta el momento hemos definido el producto de convolución únicamente para funciones que pertenecen al espacio $L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, pero es posible dar una generalización de esta defición a otros espacios L^p, pero hay que ser muy cuidadosos al momento de considerar el producto de convolución de dos funciones cualesquiera, ya que podría resultar que la convolución no esté bien definida.

Proposición 7 (Desigualdad de Young) *Sean $1 \leq p, q, r \leq +\infty$ tales que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}.$$

Sean f, g dos funciones, si $f \in L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ y si $g \in L^q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Entonces se tiene

$$f * g \in L^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \qquad \text{y} \qquad \|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}.$$

Cuando las funciones son continuas, la noción de soporte ha sido introducida en la lección anterior, pero cuando tenemos que trabajar con *clases* de funciones como es el caso con los espacios de Lebesgue es necesario generalizar la noción de soporte de las funciones y tenemos la siguiente definición.

Definición 4 (soporte de una función medible) *Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función medible. Consideramos la familia de todos los conjuntos abiertos $(\omega_i)_{i\in I} \subset \mathbb{R}^n$ tales que para cada $i \in I$ se tiene que $f(x) = 0$ en μ-casi todas partes y definimos $\omega = \bigcup_{i\in I} \omega_i$. Tenemos entonces que $f = 0$ en casi todas partes sobre el conjunto ω y definimos el* soporte *de la función medible f como*

$$sop(f) = \mathbb{R}^n \setminus \omega.$$

Sea $sop(f)$ y $sop(g)$ el soporte de f y g respectivamente. Si el producto de convolución está bien definido en el sentido de la Proposición 7, entonces se tiene la siguiente proposición.

Proposición 8 (Soporte de Convolución) *Si se tiene $f \in L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ y si $g \in L^q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ con $1 \leq p, q \leq +\infty$, en donde el soporte de estas funciones está dado por los conjuntos $sop(f)$ y $sop(g)$ respectivamente, entonces se tiene la siguiente relación entre los soportes de las funciones f, g y $f * g$:*

$$sop(f * g) \subset \overline{sop(f) + sop(g)}.$$

El resultado anterior nos indica que si las funciones f y g son a soporte compacto, entonces el producto de convolución $f * g$ también es a soporte compacto. Recalcamos en particular que si solo una de las funciones es a soporte compacto, entonces $f * g$ no es necesariamente a soporte compacto.

Proposición 9 (Derivación y producto de Convolución) *Sean $f \in \mathcal{C}^k_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, con $k \in \mathbb{N}$, y $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ dos funciones. Entonces el producto de convolución $f * g$ entre las funciones f y g es una función que pertenece al espacio $\mathcal{C}^k_a(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ y además para todo multi-índice $|\alpha| \leq k$ tenemos que*

$$D^\alpha(f * g) = (D^\alpha f) * g.$$

La proposición precedente indica (además de generalizar el producto de convolución a funciones que pertenecen a los espacios $\mathcal{C}^k_c$ y L^1_{loc}) cómo obtener las derivadas del producto de convolución $f * g$. Además reiteramos que, al efectuar el producto de convolución entre una función f que es continuamente diferenciable hasta un orden k con una función g que no es regular, se obtiene que $f * g$ preserva la regularidad de la función f: dicho de otra manera, es la función regular f la que "absorbe" todas las derivadas.

Definición 5 (Sucesión Regularizante) *Diremos que una sucesión de funciones $(\varphi_k)_{k\geq 1}$ es una sucesión regularizante si verifica los siguientes puntos:*

1) $\varphi_k \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$,

2) el soporte de φ_k verifica $sop(\varphi_k) \subset B\left(0, \frac{1}{k}\right)$,

3) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(x)dx = 1$,

4) $\varphi_k \geq 0$ sobre $\mathbb{R}^n$.

A continuación damos un ejemplo de una sucesión regularizante: sea $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{|x|^2}{1-|x|^2}} & \text{si } |x| < 1, \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Nótese que φ es positiva y $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, además el soporte de la función está contenido en $B(0, 1)$. A partir de esta función definimos la sucesión regularizante $(\varphi_k)_{k\geq 1}$ como sigue

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{\|\varphi\|_{L^1}} k^n \varphi(kx),$$

y es sencillo verificar que esta sucesión de funciones satisface las condiciones de la definición de sucesión regularizante. Las funciones φ_k son positivas, se tiene $\varphi_k \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, también $\|\varphi_k\|_{L^1} = 1$ y con un cambio de variable se verifica que $sop(\varphi_k) \subset B\left(0, \frac{1}{k}\right)$ para todo $k \geq 1$.

Proposición 10 *Sea $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión regularizante. Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función que pertenece a $L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ con $1 \leq p < +\infty$, entonces*

1) se tiene que $\varphi_k * f \in L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ y se tiene la desigualdad

$$\|\varphi_k * f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p},$$

2) $\lim\limits_{k\to+\infty} \|\varphi_k * f - f\|_{L^p} = 0.$

Este resultado nos permite aproximar funciones que están en los espacios $L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ con $1 \leq p < +\infty$ por medio de funciones regulares de la forma $\varphi_k * f$.

5. Transformada de Fourier

A continuación se dará la definición de la transformada de Fourier que es una herramienta fundamental, puesto que permite conectar diversas ramas de las matemáticas.

Definición 6 (Transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$) *Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, llamaremos transformada de Fourier de f a la función denotada $\widehat{f}$, definida por:*

$$\begin{array}{rccl} \widehat{f}: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & \xi & \longmapsto & \widehat{f}(\xi) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}dx. \end{array} \tag{1}$$

Donde $x \cdot \xi$ es el producto escalar usual de $\mathbb{R}^n$.

A veces notaremos $\mathcal{F}(f)$ a la transformada de Fourier.

Ejemplo: Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que está definida como $f(x) = e^{-c|x|}$, entonces $\widehat{f}(\xi) = \dfrac{2c}{c^2 + \xi^2}$, para todo $\xi \in \mathbb{R}$.

Proposición 11 *Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Entonces*

$$\|\widehat{f}\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}.$$

Observación 2 Nótese que en toda generalidad la transformada de Fourier de una función que pertenece al espacio L^1, es una función $\widehat{f}$ que pertenece al espacio L^∞, de manera que no es posible reaplicar la transformada de Fourier $(\widehat{\widehat{f}})$.

Un ejemplo de esta situación está dado por la función $f(x) = \mathbb{1}_{[-1,1]}$, cuya transformada de Fourier es la función seno cardinal $sinc(\xi) = \frac{sin(2\pi\xi)}{\pi\xi}$ que no es una función integrable.

Sin embargo, si al aplicar la transformada de Fourier se obtiene una función que sí es integrable, entonces es posible invertir el proceso para recuperar la función inicial. De esta manera tenemos:

Definición 7 (Transformada de Fourier inversa) *Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, definimos la transformada de Fourier inversa de una función f por la expresión*

$$\mathcal{F}^{-1}(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi)e^{2\pi i x\cdot\xi}d\xi. \tag{2}$$

En el caso cuando las funciones f y $\widehat{f}$ pertenecen al espacio L^1 tenemos entonces las fórmulas

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)) = \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(f)) = f.$$

Observación 3 Si bien el espacio L^1 es completamente natural para definir la transformada de Fourier, no es un buen marco de trabajo pues no es estable con respecto a la transformada de Fourier inversa. Las *distribuciones* *temperadas* que estudiaremos posteriormente tienen justamente por objetivo proporcionar un marco general de trabajo en donde la transformada de Fourier es estable y se convierte en una herramienta muy poderosa.

Antes de indicar las propiedades de la transformada de Fourier, definiremos las siguientes funciones.

Definición 8 *Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda > 0$ un real.*

1) Traslación: *la función $f_{\tau_y}(x)$ se define por la expresión*

$$f_{\tau_y}(x) = f(x - y).$$

2) Dilatación: *la función $f_\lambda(x)$ se define por*

$$f_\lambda(x) = f(\lambda x).$$

3) Reflexión: *definimos la función $\check{f}$ por*

$$\check{f}(x) = f(-x).$$

Observación 4 Notemos que la transformada de Fourier (1) y la transformada de Fourier inversa (2) difieren solo en un signo, y basados en el punto 3) de la definición anterior escribiremos

$$\check{f}$$

para designar la transformada de Fourier inversa de una función.

Proposición 12 (Propiedades de la transformada de Fourier) *Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $x, y \in \mathbb{R}^n$ vectores, $\sigma \in \mathbb{R}$ un escalar, $\alpha \in \mathbb{N}^n$ un multi-índice y $\lambda > 0$ un real. Entonces tenemos:*

1) $(\widehat{f + \sigma g})(\xi) = \widehat{f}(\xi) + \sigma \widehat{g}(\xi)$.

2) $\widehat{\check{f}}(\xi) = \check{\widehat{f}}(\xi)$.

3) $\widehat{f_{\tau_y}}(\xi) = e^{-2\pi i \xi \cdot y} \widehat{f}(\xi)$.

4) $\widehat{f}_\lambda(\xi) = \lambda^{-n} \widehat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)$.

Una de las principales propiedades de la transformada de Fourier está relacionada con su acción en el producto de convolución:

Proposición 13 (Transformada de Fourier y Convolución) *Sean f, g dos funciones que pertenecen al espacio $L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Entonces la transformada de Fourier transforma el producto de convolución en el producto usual de las transformadas de Fourier de las funciones:*

$$\widehat{f * g}(\xi) = \widehat{f}(\xi) \times \widehat{g}(\xi).$$

Proposición 14 (Transformada de Fourier y Derivación) *Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ una función suficientemente regular. Si $\alpha \in \mathbb{N}^n$ es un multi-índice, entonces se tiene la identidad*

$$\widehat{D^\alpha} f(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \widehat{f}(\xi).$$

Esta propiedad es absolutamente fundamental en el estudio de las derivadas de las funciones pues permite transformar esta noción en la multiplicación por polinomios.

Hasta ahora hemos considerado la transformada de Fourier de funciones que pertenecen al espacio L^1. Sin embargo es posible generalizar esta importante herramienta a los espacios L^2 y podemos aplicar la misma definición

(1) a las funciones $f \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

Una particularidad fundamental del espacio L^2 es la siguiente:

Proposición 15 (Identidad de Plancherel) *La transformada de Fourier es una isometría de $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Es decir,*

$$\|f\|_{L^2} = \|\widehat{f}\|_{L^2}.$$

Conviene reescribir la fórmula anterior de la siguiente manera:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

Observación 5 Es muy importante recalcar que si bien la transformada de Fourier es una herramienta muy poderosa, su definición (1) y su utilización requiere considerar problemas que están definidos sobre el espacio entero. Dicho de otra manera, no existe una teoría de Fourier local.