Curso de Verano EPN Julio-Agosto 2009

Deber en casa n°2: Convolución. Fecha de entrega:

Diego Chamorro

Resumen

El producto de convolución es una herramienta indispensable en el análisis. Sirve entre otras cosas para regularizar funciones y, por medio de aproximaxiones de la identidad, permite verificar resultados importantes.

1. Preliminares

Definición 1 *Un* grupo topológico localmente compacto $\mathbb{G}$ *es un espacio topológico separado, localmente compacto, que está dotado con una ley de grupo notada multiplicativamente* $(x, y) \longmapsto x \cdot y$ *tal que las dos aplicaciones* $(x, y) \longmapsto x \cdot y$; $x \longmapsto x^{-1}$ *son continuas. Notaremos además* e *el elemento neutro del grupo:* $e \cdot x = x \cdot e = x$, *para todo* $x \in \mathbb{G}$.

Ejercicio 1 *Mostrar que los siguientes grupos son grupos topológicos localmente compactos.*

1. *El espacio euclídeo* $\mathbb{R}^n$ *dotado de la suma usual:* $x + y = (x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$.
2. *Los conjuntos* $\mathbb{Z}$ *y* $\mathbb{Z}^n$ *con la misma operación de grupo que en* $\mathbb{R}^n$.
3. *El conjunto* $\mathbb{R}^*$ *formado de los números reales no nulos, dotado de la topología inducida por* $\mathbb{R}$ *y como ley de grupo la multiplicación.*
4. *El grupo de Heisenberg definido por* $\mathbb{H} = (\mathbb{R}^3, \cdot)$ *con el producto*

$$x \cdot y = \left(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3 + \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1)\right) \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}^3.$$

Verificar que el elemento neutro de este grupo es $e = (0, 0, 0)$, *que* $(x_1, x_2, x_3)^{-1} = (-x_1, -x_2, -x_3)$ *y que este producto no es abeliano.*

* * * * *

Ejercicio 2 *Sea* $x \in \mathbb{G}$ *y* $A \subset \mathbb{G}$, *definimos* $x \cdot A = \{x \cdot a;\ a \in A\}$ *y* $A \cdot x = \{a \cdot x;\ a \in A\}$. *Mostrar que si* A *es abierto entonces los conjuntos* $x \cdot A$ *y* $A \cdot x$ *son abiertos.*

* * * * *

Definición 2 *Sea* $(\mathbb{G}, \mathcal{B}or(\mathbb{G}), \mu)$ *un espacio medido. La medida* μ *es una* medida de Haar invariante por la izquierda *si para todo* $A \in \mathcal{B}or(\mathbb{G})$ *y todo* $x \in \mathbb{G}$ *se tiene la identidad*

$$\mu(x \cdot A) = \mu(A).$$

Simétricamente, diremos que μ *es una* medida de Haar invariante por la derecha *si* $\mu(A \cdot x) = \mu(A)$.

Ejercicio 3

1. *Utilizando el ejercicio 2, mostrar que la definición de medida de Haar tiene sentido.*
2. *Mostrar que sobre $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), \lambda_n)$, la medida de Lebesgue λ_n es una medida de Haar invariante por la izquierda y por la derecha (diremos en este caso que la medida es* bi-invariante*).*
3. *Mostrar que sobre $(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}), Card)$, la medida de conteo es una medida de Haar bi-invariante.*
4. *Si consideramos $\mathbb{R}^*$ definimos la medida $\mu = dx/|x|$. Mostrar que esta medida es invariante por traslaciones multiplicativas, es decir que se tiene*
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(tx)\frac{dx}{|x|} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\frac{dx}{|x|}$$
para toda función integrable definida sobre $\mathbb{R}^*$ y para todo $t \in \mathbb{R}^*$.
5. *Verificar que si μ es una medida de Haar invariante por la izquierda entonces se tiene, para todo $z \in \mathbb{G}$ y para toda función integrable $f : \mathbb{G} \longrightarrow \mathbb{K}$, la identidad*
$$\int_{\mathbb{G}} f(z \cdot x)d\mu(x) = \int_{\mathbb{G}} f(x)d\mu(x).$$

* * * * *

Notación: Para todo vector no nulo $\tau \in \mathbb{G}$, notamos $f_\tau(x) = f(\tau \cdot x)$ la traslación por la izquierda y $f^\tau(x) = f(x \cdot \tau)$ la traslación por la derecha.

Ejercicio 4 *Sea $(\mathbb{G}, \mathcal{B}or(\mathbb{G}), \mu)$ un espacio medido con μ una medida de Haar invariante por la izquierda.*

1. *Sea $1 \leq p < +\infty$ un número real y sea f una función de $L^p(\mathbb{G}, \mathbb{K})$, verificar que $\|f_\tau\|_{L^p} = \|f\|_{L^p}$.*
2. *Mostrar que la función f_τ converge hacia f en $L^p(\mathbb{G}, \mathbb{K})$ cuando τ tiende hacia e, es decir:*
$$\lim_{\tau \to e} \int_{\mathbb{G}} |f_\tau(x) - f(x)|^p d\mu(x) = 0.$$

* * * * *

2. Producto de Convolución, primeras propiedades

En toda esta sección $(\mathbb{G}, \mathcal{B}or(\mathbb{G}), \mu)$ es un espacio medido con μ una medida de Haar invariante por la izquierda.

Definición 3 *Sean f y g dos funciones de $L^1(\mathbb{G}, \mathbb{K})$ a valores en $\mathbb{K}$. Definimos el* producto de convolución *de f y g como:*
$$f * g(x) = \int_{\mathbb{G}} f(y)g(y^{-1} \cdot x)d\mu(y). \tag{1}$$

Cuando $\mathbb{G} = \mathbb{R}^n$, la estructura de grupo está dada por $(\mathbb{R}^n, +)$ y se tiene $y^{-1} = -y$; de manera que se tiene
$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x - y)dy,$$
y esta expresión es sin duda mucho más conocida y familiar para el lector.

Ejercicio 5 *Mostrar, utilizando el cambio de variable $z = x^{-1} \cdot y$, que la expresión (1) es igual a*
$$f * g(x) = \int_{\mathbb{G}} f(x \cdot z)g(z^{-1})d\mu(z).$$

* * * * *

Ejercicio 6

1. *Si f y g son dos funciones de $L^1(\mathbb{G}, \mathbb{K})$ mostrar que la expresión (1) está bien definida, es decir que se tiene*
$$\|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1} \qquad \textit{(Utilizar el teorema de Fubini)}$$
2. *Sea $f(x) = \exp(-\pi x^2)$ definida sobre $\mathbb{R}$, verificar que $\|f * f\|_{L^1} = \|f\|^2_{L^1}$.*
Esto muestra que esta estimación es optimal.

* * * * *

Ejercicio 7 *Sea la función* $f(x) = \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$ *definida sobre* $\mathbb{R}$.

1. *Calcular* $f * f$.
2. *¿Qué puede decirse sobre el soporte de* $f * f$ *comparándolo con el de* f*?*
3. *¿Qué puede decirse sobre la regularidad de* $f * f$ *comparándola con la de* f*?*
4. *Mostrar que si* f, g *son dos funciones de* $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$*, entonces* $sop(f * g) \subset \overline{sop(f) + sop(g)}$.

* * * * *

Ejercicio 8 *Sean* f, g *y* h *tres funciones de* $L^1(\mathbb{G}, \mathbb{K})$*. Mostrar las identidades*

1. $(f * g) * h = f * (g * h)$,
2. $f * (g + h) = f * g + f * h$,
3. $(f + g) * h = f * h + g * h$.
4. $f_\tau * g = (f * g)_\tau$ *y* $f * g^\tau = (f * g)^\tau$ *para todo* $\tau \in \mathbb{G}$.
5. *Mostrar que* $(L^1(\mathbb{G}, \mathbb{K}), *)$ *es una álgebra de Banach.*

* * * * *

Ejercicio 9 *El objetivo de este ejercicio es mostrar que* $(L^1(\mathbb{G}, \mathbb{K}), *)$ *no siempre posee un elemento identidad: veremos en particular que no existe ninguna función* δ *de* $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *tal que* $f * \delta = f$*. Para ello procedemos por el absurdo y suponemos que existe una función* δ *de* $L^1(\mathbb{R})$ *tal que* $f * \delta = f$.

1. *Sea* $f_n : x \longmapsto n\mathbb{1}_{[-1/n,1/n]}(x)$ *una sucesión de funciones, verificar que para todo* $n \geq 1$, $f_n \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *y calcular su norma.*
2. *Si se tiene* $f_n * \delta(0) = f_n(0)$ *verificar que se tiene* $f_n * \delta(0) = n\int_{-1/n}^{1/n} \delta(y)d\mu(y)$.
3. *Obtener para todo* $n \geq 1$ *la identidad* $n\int_{-1/n}^{1/n} \delta(y)d\mu(y) = n$.
4. *Aplicando el Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue obtener* $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{-1/n}^{1/n} \delta(y)d\mu(y) = 0$ *y obtener la contradicción buscada.*

* * * * *

3. Propiedades adicionales del producto de convolución

En todo lo que sigue, consideramos únicamente funciones definidas sobre $\mathbb{R}^n$ a valores en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 10 (Desigualdad de Young) *Sean* $1 \leq p, q, r \leq +\infty$ *tres reales relacionados por la formula* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$*. Sean* f *y* g *dos funciones definidas sobre* $\mathbb{R}^n$ *a valores en* $\mathbb{R}$*. Demostrar que se tiene la desigualdad*

$$\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Seguir las etapas siguientes:

1. *A partir de la identidad* $|f(y)g(x-y)| = (|f(y)|^p|g(x-y)|^q)^{1/r} |f(y)|^{1-p/r}|g(x-y)|^{1-q/r}$*, notando* p' *y* q' *los números conjugados armónicos de* p *y* q*, y aplicando la desigualdad de Hölder generalizada, obtener la mayoración*
$$\int_{\mathbb{R}^n} (|f(y)|^p|g(x-y)|^q)^{1/r} |f(y)|^{1-p/r}|g(x-y)|^{1-q/r}dy \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p|g(x-y)|^q dy\right)^{1/r}$$
$$\times \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^{(1-p/r)q'}dy\right)^{1/q'} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)|^{(1-q/r)p'}dy\right)^{1/p'}$$
2. *Verificar que* $(1 - p/r)q' = p$ *y que* $(1 - q/r)p' = q$.
3. *Mostrar entonces que se tiene la mayoración*
$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)g(x-y)|dy\right)^r \leq \|f\|_{L^p}^{\frac{pr}{q'}} \|g\|_{L^q}^{\frac{qr}{p'}} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p|g(x-y)|^q dy$$
4. *Integrando con respecto a* dx *y aplicando el teorema de Fubini en el punto 3. obtener el resultado deseado.*

* * * * *

Notamos $\partial_i f$ la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ y para todo multi-índice $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ definimos

$$\partial^\alpha f = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n} f = \frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

El entero $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ se denomina la longitud del multi-índice α. Para todo $k \in \mathbb{N}$ notamos $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ el conjunto de funciones tales que para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$ con $|\alpha| \leq k$, las derivadas $\partial^\alpha f$ existen y son continuas. El conjunto $\mathcal{C}_0^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ es el subconjunto de $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ formado por funciones a soporte compacto. El conjunto de funciones infinitamente derivables (respectivamente a soporte compacto) será notado $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ (respectivamente $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$).

Ejercicio 11

1. *Sean f una función de $L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ y $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y acotada. Mostrar que la función $f * g$ es continua.*
2. *Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ y $g \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ dos funciones. Suponemos que las derivadas $\partial^\alpha g$ (para $|\alpha| \leq k$) son acotadas sobre $\mathbb{R}^n$. Mostrar entonces que la función $f * g$ pertenece al espacio $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ y que se tiene*

$$\partial^\alpha(f * g) = f * \partial^\alpha g.$$

* * * * *

Definición 4 (Aproximación de la identidad) *Una sucesión de funciones $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon>0} \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ tal que*

$$\text{para todo } \varepsilon > 0 \text{ se tiene } \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x)dx = 1 \text{ y para todo } \alpha > 0 \text{ se tiene } \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\alpha} \varphi_\varepsilon(x)dx = 0,$$

es llamada una aproximación de la identidad.

Ejercicio 12 *Sea f una función continua a soporte compacto definida sobre $\mathbb{R}^n$ y sea φ una función $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ a soporte en $\{|x| \leq 1\}$ y de integral igual a 1.*

1. *Si notamos $\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, mostrar que las funciones φ_ε son $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ a soporte en $\{|x| \leq \varepsilon\}$ y de integral igual a 1: son por lo tanto una aproximación de la identidad.*
2. *Mostrar que las funciones $f * \varphi_\varepsilon$ son infinitamente derivables a soporte compacto.*
3. *Mostrar que las funciones $f * \varphi_\varepsilon$ convergen uniformemente sobre $\mathbb{R}^n$ hacia f si $\varepsilon \longrightarrow 0$. Observar que esta propiedad se mantiene para toda aproximación de la identidad.*

* * * * *

Ejercicio 13 (Un teorema de Weierstrass) *Sea f una función continua a soporte en $[-1, 1]$ a valores en $\mathbb{R}$.*

1. *Para $n \geq 1$, definimos $a_n = \int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx$ y $\varphi_n(x) = \frac{1}{a_n}(1-x^2)^n \mathbb{1}_{[\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}]}(x)$. Mostrar que $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ es una aproximación de la identidad.*
2. *Mostrar que $f * \varphi_n$ es un polinomio.*
3. *Utilizando los puntos precedentes y el ejercicio 12, demostrar el teorema de Weierstrass siguiente:*

"toda función continua a soporte compacto es el límite uniforme de polinomios".