Curso de Verano EPN Julio-Agosto 2009

Corrección del Deber en casa n°2: Convolución.
Fecha de entrega:

Diego Chamorro

1. Preliminares

Corrección Ejercicio 1

Mostremos que la aplicación

$$\begin{array}{rcl}\varphi_+ : \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x,y) & \longmapsto & x+y\end{array}$$

es continua. Sean $a=(x_1,y_1)$ y $b=(x_2,y_2)$ dos elementos de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, que dotamos de la distancia $d(a,b)=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$. Tenemos entonces que $|\varphi_+(a)-\varphi_+(b)| = |x_1+y_1-x_2-y_2| \leq |x_1-x_2|+|y_1-y_2| = d(a,b)$ de donde se deduce la continuidad de la aplicación φ_+ y la aplicación $\psi : x \longmapsto -x$ se trata de forma totalmente similar.

La generalización al caso $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{Z}^n$ es inmediata y una ligera modificación permite considerar el conjunto $\mathbb{R}^*$. El mismo razonamiento permite estudiar el grupo de Heisenberg $\mathbb{H}$.

* * * * *

Corrección Ejercicio 2

Observamos que la acción por la izquierda de la aplicación continua x^{-1} envía $x\cdot A$ en A. Como la imagen recíproca de todo abierto bajo una aplicación continua es un conjunto abierto obtenemos que $x\cdot A$ es un abierto. De la misma forma, la acción por la derecha de x^{-1} envía $A\cdot x$ en A, de donde se concluye que $A\cdot x$ es abierto.

* * * * *

Corrección Ejercicio 3

1. Para poder hablar de $\mu(x\cdot A)$, es necesario que el conjunto $x\cdot A$ sea un boreliano, lo cual es el caso por el ejercicio anterior.

2.-3. Por construcción tenemos para todo $x\in\mathbb{R}^n$ y todo boreliano A las identidades $\lambda_n(x+A)=\lambda_n(A+x)=\lambda_n(A)$ (ver proposición 2.4.9 de [1]). Estas igualdades se mantienen para la medida de conteo y obtenemos que estas dos medidas son bi-invariantes.

4. El cambio de variable $u=tx$ muestra de inmediato que se tiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(tx)\frac{dx}{|x|} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\frac{dx}{|x|}$$

para toda función integrable definida sobre $\mathbb{R}^*$ y para todo $t\in\mathbb{R}^*$.

5. Si μ es una medida de Haar invariante por la izquierda entonces, para todo boreliano A y para todo $z \in \mathbb{G}$, se tiene $\mu(z \cdot A) = \mu(A)$, es decir $\int_{\mathbb{G}} \mathbb{1}_{z\cdot A}(x)d\mu(x) = \int_{\mathbb{G}} \mathbb{1}_A(x)d\mu(x)$, de manera que se tiene la propiedad buscada para todas las funciones simples. La construcción de la integral de Lebesgue con respecto a la medida μ nos permite afirmar que se tiene esta propiedad para toda función integrable.

* * * * *

Corrección Ejercicio 4

1. El punto **5.** del ejercicio anterior aplicado a la función $|f|^p$ muestra que

$$\|f_\tau\|_{L^p}^p = \int_{\mathbb{G}} |f(\tau \cdot x)|^p d\mu(x) = \int_{\mathbb{G}} |f(x)|^p d\mu(x) = \|f\|_{L^p}^p$$

2. Sea $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos del grupo $\mathbb{G}$ que tiende hacia e. Dado que tenemos por el punto precedente la identidad $\|f_{\tau_n}\|_{L^p} = \|f\|_{L^p}$, podemos escribir $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_{\tau_n}\|_{L^p} = \|f\|_{L^p}$. Aplicamos entonces la recíproca del Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue (también conocido como lema de Scheffé) dado en la proposición 4.2.7 - 2) de [1] para obtener el resultado buscado.

* * * * *

2. Producto de Convolución, primeras propiedades

Corrección Ejercicio 5

Como la medida de Haar es invariante por la izquierda, si $z = x^{-1} \cdot y$, tenemos $y = x \cdot z$, $y^{-1} = z^{-1} \cdot x^{-1}$ y $d\mu(z) = d\mu(y)$, de manera que podemos escribir

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{G}} f(y)g(y^{-1} \cdot x)d\mu(y) = \int_{\mathbb{G}} f(x \cdot z)g(z^{-1})d\mu(z).$$

* * * * *

Corrección Ejercicio 6

1. Sean f y g son dos funciones de $L^1(\mathbb{G}, \mathbb{K})$. Tenemos entonces

$$|f * g(x)| \leq \int_{\mathbb{G}} |f(y)g(y^{-1} \cdot x)|d\mu(y)$$

Integrando con respecto a $d\mu(x)$ y aplicando el teorema de Fubini (ver sección 3.4.3 de [1]) se obtiene

$$\|f * g\|_{L^1} = \int_{\mathbb{G}} |f * g(x)|d\mu(x) \leq \int_{\mathbb{G}} |f(y)| \int_{\mathbb{G}} |g(y^{-1} \cdot x)|d\mu(x)d\mu(y) = \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}.$$

2. Basta escribir

$$\|f * f\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi y^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi(x-y)^2} dxdy = \|f\|_{L^1}\|f\|_{L^1}$$

* * * * *

Corrección Ejercicio 7

Sea la función $f(x) = \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$ definida sobre $\mathbb{R}$.

1. Observamos en primer lugar que si $x \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$ entonces $f * f(x) = 0$ y esto nos permite restringir nuestro estudio al intervalo $[-2, 2]$. Tenemos pues

$$f * f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{[-1,1]}(y)\mathbb{1}_{[-1,1]}(x - y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{[-1,1]}(y)\mathbb{1}_{[x-1,x+1]}(y)dy$$

es decir

$$f * f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{[x-1,x+1]\cap[-1,1]}(y)dy.$$

Dado que el intervalo $[x-1, x+1]$ se translada en función de x vemos sin mayor dificultad que

$$f * f(x) = \begin{cases} 2+x & \text{si} \quad x \in [-2,0]; \\ \\ x-2 & \text{si} \quad x \in [0,2]. \end{cases}$$

2. El soporte de $f * f$ es $[-2, 2]$ y contiene el soporte de f.

3. La función inicial f era discontinua, la nueva función $f * f$ es continua: el producto de convolución nos permite *ganar* regularidad.

4. Supongamos que $x \notin sop(f) + sop(g)$. Entonces para todo $y \in sop(f)$ se tiene que $x - y \notin sop(g)$ y entonces

$$\int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)dy = 0$$

Podemos ver entonces que el interior de $(sop(f) + sop(g))^c$ está incluido en el complementario de $sop(f * g)$, de donde se obtiene que $sop(f * g) \subset \overline{sop(f) + sop(g)}$.

$$* \quad * \quad * \quad * \quad *$$

Corrección Ejercicio 8

Sean f, g y h tres funciones de $L^1(\mathbb{G}, \mathbb{K})$.

1. Tenemos

$$f * [g * h](x) = \int_{\mathbb{G}} f(y) \left(\int_{\mathbb{G}} g(u)h(u^{-1} \cdot y^{-1} \cdot x)d\mu(u) \right) d\mu(y)$$

Haciendo el cambio de variable $z = y \cdot u$ en la integral entre paréntesis obtenemos

$$f * [g * h](x) = \int_{\mathbb{G}} f(y) \left(\int_{\mathbb{G}} g(y^{-1} \cdot z)h(z^{-1} \cdot x)d\mu(z) \right) d\mu(y)$$

Aplicando el teorema de Fubini, se tiene

$$\int_{\mathbb{G}} f(y) \left(\int_{\mathbb{G}} g(y^{-1} \cdot z)h(z^{-1} \cdot x)d\mu(z) \right) d\mu(y) = \int_{\mathbb{G}} \left(\int_{\mathbb{G}} f(y)g(y^{-1} \cdot z)d\mu(y) \right) h(z^{-1} \cdot x)d\mu(z) = [f * g] * h(x)$$

2.-3. Estos dos puntos se deducen directamente de la propiedad de linealidad de la integral y verificamos solo el primero.

$$f * (g+h)(x) = \int_{\mathbb{G}} f(y)(g+h)(y^{-1} \cdot x)d\mu(y) = \int_{\mathbb{G}} f(y)g(y^{-1} \cdot x) + f(y)h(y^{-1} \cdot x)d\mu(y) = f * g(x) + f * h(x)$$

4. Basta hacer el cambio de variable $u = \tau \cdot y$ para obtener la primera identidad:

$$f_\tau * g(x) = \int_{\mathbb{G}} f_\tau(y)g(y^{-1} \cdot x)d\mu(y) = \int_{\mathbb{G}} f(\tau \cdot y)g(y^{-1} \cdot x)d\mu(y) = \int_{\mathbb{G}} f(u)g(u^{-1} \cdot \tau \cdot x)d\mu(y) = (f * g)_\tau(x)$$

5. Solo nos queda por verificar (ver la definición 4.5.1 de álgebra de Banach en [1]) que $(\lambda f) * g = f * (\lambda g) = \lambda(f * g)$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$. Esto es inmediato por la linealidad de la integral. Con estos puntos y con la estimación del primer punto del ejercicio 6, se tiene que $(L^1(\mathbb{G}, \mathbb{K}), *)$ es una álgebra de Banach.

$$* \quad * \quad * \quad * \quad *$$

Corrección Ejercicio 9

1. Se tiene $\|f_n\|_{L^1} = 2$ para todo $n \geq 1$.

2. Escribimos $f_n * \delta(0) = \int_{\mathbb{R}} n\mathbb{1}_{[-1/n,1/n]}(y)\delta(y)d\mu(y) = n\int_{-1/n}^{1/n} \delta(y)d\mu(y)$.

3. Si se tiene $f_n * \delta = f_n$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces $f_n(0) = n$ y por lo tanto $n\int_{-1/n}^{1/n} \delta(y)d\mu(y) = n$; es decir que se tiene, para todo $n \geq 1$:

$$\int_{-1/n}^{1/n} \delta(y)d\mu(y) = 1.$$

4. Como hemos supuesto que $\delta \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, podemos aplicar el Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue para obtener $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{-1/n}^{1/n} \delta(y)d\mu(y) = 0$ lo cual es una contradicción con la identidad del punto anterior.

* * * * *

3. Propiedades adicionales del producto de convolución

Corrección Ejercicio 10 (Desigualdad de Young)

1. Observamos que si p' y q' son los conjugados armónicos de p y q, entonces tenemos $1 = 1/r + 1/p' + 1/q'$. Aplicando la desigualdad de Hölder generalizada (teorema 4.2.4 [1]) a la expresión $\left(|f(y)|^p|g(x-y)|^q\right)^{1/r} |f(y)|^{1-p/r}|g(x-y)|^{1-q/r}$ tenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(|f(y)|^p|g(x-y)|^q\right)^{1/r} |f(y)|^{1-p/r}|g(x-y)|^{1-q/r}dy \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p|g(x-y)|^q dy\right)^{1/r}$$

$$\times \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^{(1-p/r)q'}dy\right)^{1/q'} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)|^{(1-q/r)p'}dy\right)^{1/p'}$$

2.-3. Un cálculo inmediato muestra que $(1-p/r)q' = p$ y que $(1-q/r)p' = q$. Esto nos permite reescribir la expresión precedente de la forma siguiente

$$|f*g(x)|^r \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)g(x-y)|dy\right)^r \leq \|f\|_{L^p}^{\frac{pr}{q'}}\|g\|_{L^q}^{\frac{qr}{p'}} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p|g(x-y)|^q dy$$

4. Integrando con respecto a dx y aplicando el teorema de Fubini se tiene

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f*g(x)|^r dx \leq \|f\|_{L^p}^{\frac{pr}{q'}}\|g\|_{L^q}^{\frac{qr}{p'}} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p|g(x-y)|^q dydx = \|f\|_{L^p}^{\frac{pr}{q'}+p}\|g\|_{L^q}^{\frac{qr}{p'}+q} = \|f\|_{L^p}^r\|g\|_{L^q}^r$$

de donde se deduce la desigualdad de Young.

* * * * *

Corrección Ejercicio 11

1. Notamos $\varphi(y,x) = f(y)g(x-y)$ y vemos que esta función es medible para todo $x \in \mathbb{R}$, es continua en x para todo $y \in \mathbb{R}$ y además se tiene $|\varphi(y,x)| \leq \|g\|_{L^\infty}|f(y)|$. Tenemos todas las condiciones para aplicar el teorema 3.3.4 de continuidad con respecto a un parámetro de [1] y podemos concluir que $f*g$ es una función continua.

2. Si las derivadas $\partial^\alpha g$ (para $|\alpha| \leq k$) son acotadas sobre $\mathbb{R}^n$ podemos aplicar el teorema 3.3.5 de derivación bajo el signo integral para obtener el resultado deseado. Llamamos la atención del lector sobre el hecho que la derivación se aplica en la función g que es derivable y no sobre f que no posee ninguna propiedad de regularidad: $\partial^\alpha(f*g) = f*\partial^\alpha g$.

* * * * *

Corrección Ejercicio 12

1. Notemos primero que si el soporte de φ es la bola $\{|x| \leq 1\}$ entonces el soporte que φ_ε es la bola $\{|x| \leq \varepsilon\}$. Tenemos además, gracias a un simple cambio de variable:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x)dx = \frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^n} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)dx = 1$$

Por lo tanto las funciones φ_ε son una aproximación de la identidad.

2. Una recurrencia en el ejercicio anterior muestra inmediatamente que las funciones $f * \varphi_\varepsilon$ son infinitamente derivables a soporte compacto.

3. Como f es continua a soporte compacto, es entonces uniformemente continua (ver proposición 1.2.8 de [1]). Entonces para todo $\eta > 0$ y para todo $\delta > 0$ se tiene que $|x-y| \leq \delta$ implica $|f(y) - f(x)| \leq \eta$. Fijemos ahora $\varepsilon \leq \delta$, y por el punto **1.** el soporte de $\varphi_\varepsilon(x-y)$ está contenido en la bola $\{|x-y| \leq \delta\}$.

Dado que $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x)dx = 1$ podemos aplicar un truco muy importante y de uso frecuente en el análisis:

$$\begin{aligned} |f * \varphi_\varepsilon(x) - f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\varphi_\varepsilon(x-y)dy - f(x)\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x-y)dy \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} (f(y) - f(x))\, \varphi_\varepsilon(x-y)dy \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y) - f(x)|\, |\varphi_\varepsilon(x-y)| dy \end{aligned}$$

Como el soporte de $\varphi_\varepsilon(x-y)$ está contenido en la bola $\{|x-y| \leq \delta\}$ tenemos $|x-y| \leq \delta$ y por la continuidad uniforme de f tenemos $|f(y) - f(x)| \leq \eta$. Es decir, que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene:

$$|f * \varphi_\varepsilon(x) - f(x)| \leq \eta \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_\varepsilon(x-y)| dy = \eta$$

Hemos mostrado entonces que para todo $\eta > 0$ existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $\varepsilon > \varepsilon_0$ se tiene

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f * \varphi_\varepsilon(x) - f(x)| \leq \eta$$

Es decir que las funciones $f * \varphi_\varepsilon$ convergen uniformemente sobre $\mathbb{R}^n$ hacia f si $\varepsilon \longrightarrow 0$.

En esta verificación no hemos utilizado ninguna propiedad de regularidad de las funciones φ_ε, lo cual permite generalizar este resultado a toda aproximación de la identidad.

* * * * *

Corrección Ejercicio 13 (Un teorema de Weierstrass)

Sea f una función continua a soporte en $[-1, 1]$ a valores en $\mathbb{R}$.

1. Por definición se tiene, para todo $n \geq 1$, que $\int_{\mathbb{R}} \varphi_n(x)dx = 1$. Además, el soporte de φ_n está contenido en $[-1/n, 1/n]$ de manera que para todo $\alpha > 0$, se tiene, utilizando el teorema de convergencia dominada de Lebesgue que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{|x| > \alpha} \varphi_n(x)dx = 0.$$

La familia $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ es entonces una aproximación de la identidad.

2. Para mostrar que $f * \varphi_n$ es un polinomio, vamos a verificar que la k-ésima derivada de esta función es nula para k suficientemente grande: obtendríamos así que $f * \varphi_n$ es un polinomio de grado menor que k. Utilizando el ejercicio anterior podemos ver que $d^k(f * \varphi_n) = f * d^k\varphi_n$ y observando que si $k > 2n$ entonces $d^k\varphi_n = 0$, podemos concluir que $f * \varphi_n$ es un polinomio.

3. Con los puntos anteriores y con el ejercicio 12 hemos demostrado que toda función continua a soporte en $[-1, 1]$ puede ser aproximada uniformemente por polinomios. Debemos ahora ver que el caso general puede restringirse a este caso particular. Si f es una función continua a soporte en un intervalo $[a, b]$; definimos la función

$$g(x) = f\left(\frac{(b-a)x + (a+b)}{2}\right)$$

de manera que el soporte de g es el intervalo $[-1, 1]$.

Tenemos entonces que g es límite uniforme de polinomios y, como la imagen de un polinomio por un cambio de variable afín sigue siendo un polinomio, obtenemos que f es también límite uniforme de polinomios y hemos demostrado el teorema de Weierstrass.

"toda función continua a soporte compacto es el límite uniforme de polinomios".

Referencias

[1] D. Chamorro. Análisis Intermedio I, "Espacios de Lebesgue y de Lorentz, Teoría de la medida, teoría de la integración y una introducción al análisis funcional". Asociación Amarun, versión 0.0.4, verano 2009.