Curso de Verano EPN Julio-Agosto 2009

Corrección del Deber en casa n°1: Medida de Hausdorff.
Fecha de entrega:

Diego Chamorro

1. Preliminares

Corrección Ejercicio 1

En este ejercicio queremos mostrar que:

Si μ es una medida exterior métrica entonces la colección de conjuntos μ-medibles contiene los conjuntos borelianos.

No vamos a hacer la verificación que cada boreliano es μ-medible, basta concentrarse en los conjuntos cerrados pues éstos generan la σ-álgebra de los borelianos. Sea C un subconjunto cerrado de X, debemos comprobar que para todo $E \subset \mathcal{P}(X)$ se tiene $\mu(E) \geq \mu(E \cap C) + \mu(E \setminus C)$ (ver las definiciones y más detalles en la sección 2.3.1 del folleto [1]).

1. Vemos por definición que los conjuntos $E \cap C_n$ y $E \cap C$ están positivamente separados, de manera que podemos escribir $\mu(E \cap C) + \mu(E \cap C_n) = \mu((E \cap C) \cup (E \cap C_n)) \leq \mu(E)$.

2. La inclusión $E \cap C_n \subset E \setminus C$ es inmediata, para la inclusión $E \setminus C \subset (E \cap C_n) \cup \bigcup_{k \geq n}(E \cap A_k)$ basta hacer un dibujo. Más rigurosamente, la definición de los conjuntos $\bigcup_{k \geq n}(E \cap A_k)$ permite acercarse al conjunto C tanto como se quiere.

3. Escribimos $\sum_{k \geq 1} \mu(E \cap A_k) = \sum_{k \geq 1} \mu(E \cap A_{2k}) + \sum_{k \geq 1} \mu(E \cap A_{2k+1})$, observando que los "anillos" pares $E \cap A_{2k}$ son positivamente separados, tenemos $\sum_{k \geq 1} \mu(E \cap A_{2k}) = \mu(E \cap \bigcup_{k \geq 1} A_{2k}) \leq \mu(E)$. Razonando de la misma manera para los "anillos" impares $E \cap A_{2k+1}$ se obtiene la estimación buscada.

Dado que la suma de números reales $\sum_{k \geq 1} \mu(E \cap A_k)$ es acotada podemos concluir que $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k \geq n} \mu(E \cap A_k) = 0$.

4. Tenemos por el punto **2.** que

$$\mu(E \cap C_n) \leq \mu(E \setminus C) \leq \mu((E \cap C_n) \cup \bigcup_{k \geq n}(E \cap A_k)) \leq \mu(E \cap C_n) + \sum_{k \geq n} \mu(E \cap A_k)$$

Pasando al límite cuando $n \to +\infty$ en la expresión anterior, utilizando el punto **3.** y el sabroso teorema del sánduche podemos concluir que se tiene $\lim\limits_{n \to +\infty} \mu(E \cap C_n) = \mu(E \setminus C)$.

5. Con la estimación del punto **1.** y el resultado del punto **4.** tenemos la estimación $\mu(E) \geq \mu(E \cap C) + \mu(E \setminus C)$ para todo conjunto cerrado C y hemos terminado el ejercicio.

* * * * *

2. Medida de Hausdorff

Corrección Ejercicio 2

Queremos mostrar que la aplicación $\mathcal{H}^s_\delta(A) = \inf\limits_{\mathcal{R}_{\delta,A}} \sum_{i=0}^{+\infty} diam(U_i)^s$, es una función decreciente del parámetro δ. Sean pues $0 < \delta_1 < \delta_2$ dos reales. Observamos que para todo conjunto A, todo δ_1-recubrimiento de A es también un δ_2-recubrimiento: es decir que $\mathcal{R}_{\delta_1,A} \subset \mathcal{R}_{\delta_2,A}$. Como $\mathcal{H}^s_{\delta_2}(A)$ es el ínfimo realizado sobre un conjunto más grande que $\mathcal{H}^s_{\delta_1}(A)$ se deduce que $\mathcal{H}^s_{\delta_2}(A) \leq \mathcal{H}^s_{\delta_1}(A)$.

* * * * *

Corrección Ejercicio 3

Mostremos que $\mathcal{H}^s$ es una medida exterior. Notemos para empezar que se tiene $\mathcal{H}^s(\emptyset) = 0$: basta recubrir el conjunto vacío por una familia de conjuntos de diámetro nulo. Luego sea $A \subset B$ y sea $x \in B \setminus A$. Fijemos $\delta \in]0, d(x, A)/5[$, entonces el más pequeño (en cardinal) δ-recubrimiento de B requiere al menos un elemento más que el más pequeño δ-recubrimiento de A de manera que

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) = \inf_{\mathcal{R}_{\delta,A}} \sum_{i=0}^{+\infty} diam(U_i)^s \leq \inf_{\mathcal{R}_{\delta,B}} \sum_{i=0}^{+\infty} diam(U_i)^s = \mathcal{H}^s_\delta(B)$$

Pasando al límite $\delta \to 0$ se obtiene el resultado $\mathcal{H}^s(A) \leq \mathcal{H}^s(B)$.

La única dificultad reside entonces en mostrar que para toda unión $A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ de conjuntos se tiene $\mathcal{H}^s(A) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{H}^s(A_i)$.

1. Sea $\delta > 0$ y sea $\varepsilon > 0$ y fijemos un conjunto A_i de la sucesión $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Dado que $\mathcal{H}^s_\delta(A_i) = \inf\limits_{\mathcal{R}_{\delta,A_i}} \sum_{j=0}^{+\infty} diam(U_j)^s$, por la definición misma de ínfimo podemos encontrar $(B^i_j)_{j\in\mathbb{N}}$ un δ-recubrimiento de A_i tal que

$$\left| \mathcal{H}^s_\delta(A_i) - \sum_{j\in\mathbb{N}} diam(B^i_j)^s \right| \leq \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

2. Tenemos entonces que para todo $i \in \mathbb{N}$, $A_i \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B^i_j$ de donde se deduce que $A \subset \bigcup\limits_{I\in\mathbb{N}, j\in\mathbb{N}} B^i_j$. Dado que $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ es numerable, se obtiene que el δ-recubrimiento $(B^i_j)_{i,j\in\mathbb{N}}$ es numerable.

3. Tenemos por la pregunta anterior la estimación siguiente:

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) = \inf_{\mathcal{R}_{\delta,A}} \sum_{i=0}^{+\infty} diam(U_i)^s \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{j\in\mathbb{N}} diam(B^i_j)^s$$

mientras que por el punto **1.** podemos escribir

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{j\in\mathbb{N}} diam(B^i_j)^s \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} (\mathcal{H}^s_\delta(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{H}^s_\delta(A_i) + 2\varepsilon$$

4. Pasamos ahora al límite $\varepsilon, \delta \longrightarrow 0$ y obtenemos $\mathcal{H}^s(A) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{H}^s(A_i)$; de donde concluimos que la medida de Hausdorff s-dimensional $\mathcal{H}^s$ es una medida exterior.

* * * * *

Corrección Ejercicio 4

1. Dado que $x + A = \{x + y : y \in A\}$, no es difícil ver que todo δ-recubrimiento de A es también un δ-recubrimiento de $x + A$ de donde se obtiene sin problema la identidad $\mathcal{H}^s(x + A) = \mathcal{H}^s(A)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

2. Sea $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ un δ-recubrimiento de A. Observamos entonces que $(cU_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es un $c\delta$-recubrimiento de cA y que se tiene la identidad $diam(c\,U_i)^s = c^s diam(U_i)^s$. Por lo tanto

$$\mathcal{H}^s_{c\delta}(cA) = \inf_{\mathcal{R}_{c\delta,cA}} \sum_{i=0}^{+\infty} diam(cU_i)^s = \inf_{\mathcal{R}_{\delta,A}} \sum_{i=0}^{+\infty} c^s diam(U_i)^s = c^s \mathcal{H}^s_\delta(A)$$

Pasando al límite $\delta \longrightarrow 0$ se obtiene el resultado buscado.

Corrección Ejercicio 5

La medida exterior de Hausdorff $\mathcal{H}^s$ es una medida métrica como lo demostramos siguiendo los pasos propuestos.

1. Este punto se deduce de la misma forma que el punto **1.** del ejercicio 3: con $\delta \in]0, d(A,B)/3[$ y $\varepsilon > 0$ obtenemos entonces $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ un δ-recubrimiento de $A \cup B$ tal que

$$\left| \mathcal{H}^s_\delta(A\cup B) - \sum_{i\in\mathbb{N}} diam(A_i)^s \right| \leq \varepsilon.$$

2. Como $\delta \in]0, d(A,B)/3[$ se tiene para todo $i \in \mathbb{N}$ que, o bien A_i interseca A, o bien A_i interseca B, pero no se tiene la situación en donde A_i interseca a la vez A y B. Con esta observación, si notamos $I_A = \{i \in \mathbb{N} : A_i \cap A \neq \emptyset\}$ y $I_B = \{i \in \mathbb{N} : A_i \cap B \neq \emptyset\}$ se tiene que $I_A \cap I_B = \emptyset$ y que $(A_i)_{I_A}$ es un δ-recubrimiento de A y que $(A_i)_{I_B}$ es un δ-recubrimiento de B.

3. Por el punto **1.** tenemos para el recubrimiento $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ la estimación

$$\mathcal{H}^s_\delta(A\cup B) + \varepsilon \geq \sum_{i\in\mathbb{N}} diam(A_i)^s$$

Dado que los conjuntos de índices I_A y I_B son disjuntos podemos escribir

$$\mathcal{H}^s_\delta(A\cup B) + \varepsilon \geq \sum_{i\in\mathbb{N}} diam(A_i)^s = \sum_{i\in I_A} diam(A_i)^s + \sum_{i\in I_B} diam(A_i)^s$$

4. A partir de la estimación anterior, obtenemos sin problema la mayoración

$$\mathcal{H}^s_\delta(A\cup B) + \varepsilon \geq \mathcal{H}^s_\delta(A) + \mathcal{H}^s_\delta(B),$$

Basta entonces hacer tender ε y δ hacia 0 para obtener $\mathcal{H}^s(A\cup B) \geq \mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B)$. Dado que se tiene por las propiedades de medida exterior la estimación $\mathcal{H}^s(A\cup B) \leq \mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B)$, hemos demostrado que, para todo A, B dos conjuntos positivamente separados, se tiene la identidad $\mathcal{H}^s(A\cup B) = \mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B)$: es decir que la medida de Hausdorff es una medida exterior métrica.

* * * * *

Corrección Ejercicio 6

Si $s = 0$, tenemos $\mathcal{H}^0_\delta = \inf\limits_{\mathcal{R}_{\delta,A}} \sum_{i=0}^{+\infty} diam(U_i)^0 = \inf\limits_{\mathcal{R}_{\delta,A}} \{Card(\mathcal{R}_{\delta,A})\}$: es decir que esta cantidad es el más pequeño cardinal de los δ-recubrimientos de A. Dado que para el conjunto $A = \{x\}$, se tiene para todo $\delta > 0$ que el más pequeño recubrimiento es el conjunto formado por un solo punto $\{x\}$, obtenemos que $\mathcal{H}^0(A) = 1$. Un razonamiento similar muestra que para $B = \{x, y\}$ con $x \neq y \in \mathbb{R}^n$ se tiene $\mathcal{H}^0(B) = 2$. La generalización de estas observaciones muestra que la medida de Hausdorff $\mathcal{H}^0$ no es más que la medida de conteo.

Si $s > 0$, entonces $\{x\}$ es un recubrimiento de A de diámetro nulo de manera que $\mathcal{H}^s(A) = 0$ y de igual forma $\mathcal{H}^s(B) = 0$.

* * * * *

Corrección Ejercicio 7 (Relaciones entre la medida de Hausdorff y la medida de Lebesgue)

1. Observando que sobre $\mathbb{R}$ las nociones de *volúmen* y de *diámetro* coïnciden para los conjuntos convexos (que son entonces adoquines), podemos afirmar que las medidas λ y $\mathcal{H}^1$ coïnciden: en efecto, la construcción de estas dos medidas es totalmente similar. Ver las similitudes de construcción de la medida de Lebesgue en el teorema 2.4.4 del capítulo 2 de [1].

2. Las propiedades del ínfimo (argumento utilizado varias veces ya) nos permiten encontrar, para todo $\delta > 0$ y todo $\varepsilon > 0$, una colección de conjuntos cerrados $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tales que

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} diam(U_i)^n \leq \mathcal{H}^n_\delta(A) + \varepsilon.$$

3. Si $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es el δ-recubrimiento cerrado de A del punto anterior, como se tiene la mayoración $\lambda_n(U_i) \leq c_n diam(U_i)^n$, podemos escribir que
$$\lambda_n(A) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_n(U_i) \leq c_n \sum_{i\in\mathbb{N}} diam(U_i)^n \leq c_n \mathcal{H}^n_\delta(A) + c_n\varepsilon.$$
Es suficiente hacer tender ε y δ hacia 0 para obtener que $\lambda_n(A) \leq c_n \mathcal{H}^n(A)$.

4. Por la pregunta anterior, si $\lambda_n(A) = +\infty$ entonces $\mathcal{H}^n(A) = +\infty$. Recíprocamente, si $\mathcal{H}^n(A) = +\infty$ entonces, por construcción de la medida de Lebesgue de A (que toma en cuenta solamente los recubrimientos por medio de conjuntos adoquinables) también es infinita. Podemos entonces restringir nuestro estudio a los conjuntos de medida de Hausdorff finita.

5. Sea $(Q_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una colección de cubos que recubren A tal que $\sum_{i\in\mathbb{N}} vol(Q_i) \leq \lambda_n(A) + \varepsilon$. Como las bolas cerradas forman una base de la topología de $\mathbb{R}^n$, vemos sin dificultad que las bolas cerradas contenidas en Q_i de radio máximo δ forman una clase de Vitali de Q_i.

6. Dado que por el punto anterior las bolas cerradas forman una clase de Vitali para el cubo Q_i, el teorema de Vitali nos permite escoger una familia de bolas disjuntas $(B^i_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de Q_i de diámetro maximal δ tales que $\mathcal{H}^n(Q_i \setminus \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B^i_j) = 0$, pues sabemos que el conjunto Q_i, contenido en A, es de medida de Hausdorff finita. Obsérvese en particular que la identidad $\mathcal{H}^n(Q_i \setminus \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B^i_j) = 0$ implica por definición que $\mathcal{H}^n_\delta(Q_i \setminus \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B^i_j) = 0$ para todo $\delta > 0$.

7. Utilizando los cubos Q_i y las bolas B^i_j escribimos
$$\mathcal{H}^n_\delta(A) \leq \sum_{i=0}^{+\infty} \mathcal{H}^n_\delta(Q_i) \qquad \text{pues } A \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} Q_i$$
Dado que $Q_i = (\bigcup_{j\in\mathbb{N}} B^i_j) \cup (Q_i \setminus \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B^i_j)$ tenemos
$$\mathcal{H}^n_\delta(Q_i) \leq \mathcal{H}^n_\delta(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} B^i_j) + \mathcal{H}^n_\delta(Q_i \setminus \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B^i_j) \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} \mathcal{H}^n_\delta(B^i_j)$$
Juntando estas dos estimaciones obtenemos
$$\mathcal{H}^n_\delta(A) \leq \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} \mathcal{H}^n_\delta(B^i_j) \tag{1}$$

8. Como para toda bola B^i_j se tiene la identidad $diam(B^i_j)^n = c_n^{-1}\lambda_n(B^i_j)$, y como el conjunto $\{B^i_j\}$ es un δ-recubrimiento (por construcción) de B^i_j, podemos escribir $\mathcal{H}^n_\delta(B^i_j) \leq diam(B^i_j)^n = c_n^{-1}\lambda_n(B^i_j)$. Tenemos por lo tanto
$$\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} \mathcal{H}^n_\delta(B^i_j) \leq c_n^{-1} \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} \lambda_n(B^i_j) \leq c_n^{-1}\sum_{i=0}^{+\infty} vol(Q_i)$$
pues las bolas $(B^i_j)_{j\in\mathbb{N}}$ son todas disjuntas y contenidas en Q_i. Inyectando esta estimación en la expresión (1) y utilizando el punto **5.** se tiene
$$\mathcal{H}^n_\delta(A) \leq c_n^{-1}\sum_{i=0}^{+\infty} vol(Q_i) \leq c_n^{-1}(\lambda_n(A) + \varepsilon)$$
Haciendo $\delta, \varepsilon \to 0$ y utilizando el punto **5.** obtenemos la mayoración $c_n\mathcal{H}^n_\delta(A) \leq \lambda_n(A)$. Finalmente, por el punto **3.** podemos concluir que $c_n\mathcal{H}^n_\delta(A) = \lambda_n(A)$.

3. Dimensión de Hausdorff

Corrección Ejercicio 8

1. Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ y $\delta > 0$ un real. Si $0 < s < t$ podemos escribir
$$\mathcal{H}^t_\delta(A) = \inf_{\mathcal{R}_{\delta,A}} \sum_{i=0}^{+\infty} diam(U_i)^t = \inf_{\mathcal{R}_{\delta,A}} \sum_{i=0}^{+\infty} diam(U_i)^{t-s} diam(U_i)^s \leq \delta^{t-s} \inf_{\mathcal{R}_{\delta,A}} \sum_{i=0}^{+\infty} diam(U_i)^s = \delta^{t-s}\mathcal{H}^s_\delta(A).$$

2. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ y $dim(A) \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \mathcal{H}^{dim(A)}(A) < +\infty$, esto implica por definición que $0 < \lim\limits_{\delta \to 0} \mathcal{H}_\delta^{dim(A)}(A) < +\infty$.

Por el punto anterior vemos que:

a) si $0 \leq s < dim(A)$, entonces $\mathcal{H}_\delta^{dim(A)}(A) \leq \delta^{dim(A)-s}\mathcal{H}_\delta^s(A)$ y esto obliga que $\mathcal{H}_\delta^s(A) \underset{\delta \to 0}{\longrightarrow} +\infty$.

b) si $dim(A) < s < +\infty$, un razonamiento similar muestra que se tiene $\mathcal{H}^s(A) = 0$.

3. Sea Q el cubo unidad de $\mathbb{R}^n$ dividido en k^n cubos de lado $1/k$: tenemos en particular que $diam(Q_i) = \frac{n^{1/2}}{k}$, para todo $i = 1, ..., k^n$. Entonces, si $\delta \geq k^{-1}n^{1/2}$ se tiene

$$\mathcal{H}_\delta^n(Q) = \inf_{\mathcal{R}_{\delta,A}} \sum_{i=0}^{+\infty} diam(U_i)^n \leq \sum_{i=1}^{k^n} diam(Q_i)^n = \sum_{i=1}^{k^n} \frac{n^{n/2}}{k^n} = n^{n/2} < +\infty.$$

4. El cálculo precedente muestra que $\mathcal{H}^n(Q) \leq n^{n/2} < +\infty$ y el primer punto muestra que si $s > n$ entonces $\mathcal{H}^s(Q) = 0$. Como $\mathbb{R}^n$ es la unión numerable de este tipo de cubos, también se tiene, para todo $s > n$, que $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n) = 0$.

5. Para este punto, es suficiente utilizar los cálculos realizados anteriormente: si $A \subset \mathbb{R}^n$, basta recubrirlo por cubos diádicos para ver que su dimensión de Hausdorff no puede ser mayor a n.

* * * * *

Corrección Ejercicio 9

1. Por contrucción del conjunto triádico de Cantor, se tiene que K puede ser recubierto por 2^j intervalos I_{K_j} de longitud 3^{-j} que conforman los conjuntos K_j. Entonces vemos que, para todo $j \in \mathbb{N}$ si fijamos $s = \ln(2)/\ln(3)$ (lo cual será hecho de ahora en adelante), se tiene

$$\mathcal{H}_{3^{-j}}^s(K) = \inf_{\mathcal{R}_{3^{-j},A}} \sum_{i=0}^{+\infty} diam(U_i)^s \leq \sum_{i=1}^{2^j} diam(I_{K_j})^s = \sum_{i=1}^{2^j} 3^{-sj} = 2^j 3^{-sj} = 1$$

de donde se obtiene, haciendo tender $j \to +\infty$, que $\mathcal{H}^s(K) \leq 1$.

2. Por el cálculo precedente y por el ejercicio anterior, podemos decir que la dimensión del conjunto triádico de Cantor verifica $0 < dim(K) \leq \ln(2)/\ln(3)$. Para verificar que se tiene $dim(K) = \ln(2)/\ln(3)$ necesitamos los puntos que siguen.

3. Sabemos (ver el final de la sección 2.2.2 de [1]) que el conjunto K es compacto: basta entonces estudiar los recubrimientos finitos.

4. Un dibujo puede ser de utilidad :-) se tiene entonces la unión disjunta $J \cup L \cup J' = A_0$.

5. Por construcción del conjunto triádico, si J, J' y L pertenecen al mismo nivel se tiene $diam(J) = diam(J') = diam(L)$, sino el diámetro del conjunto complementario L siempre será mayor al diámetro de los dos otros conjuntos. Se tiene entonces

$$2\left(diam(J) + diam(L) + diam(J')\right) \geq 3\left(diam(J) + diam(J')\right).$$

Utilizando el hecho que $s = \ln(2)/\ln(3)$ y la concavidad de la función t^s obtenemos sin problema que

$$\left(\frac{3}{2}(diam(J) + diam(J'))\right)^s \geq diam(J)^s + diam(J')^s.$$

Es decir que se tiene $diam(A_0)^s \geq diam(J)^s + diam(J')^s$. Si A_0 es el más pequeño intervalo contiene los intervalos J y J', no se aumenta la suma $\sum_{A \in \mathcal{C}} diam(A)^s$.

6.-7. Por construcción del conjunto triádico de Cantor y por el proceder anteriomente expuesto, es posible continuar de esta forma hasta obtener un recubrimiento de K formado por intervalos de igual longitud fijada a 3^{-j}. De esta forma incluímos todos los intervalos que conforman K_j. Estos recubrimientos verifican $1 \leq \sum_{A \in K_j} diam(A)^s$ y esta propiedad es entonces válida para el recubrimiento inicial $\mathcal{C}$.

8. Por el punto **3.** tenemos que todos los recubrimientos de K formados por intervalos $\mathcal{C}$ verifican $1 \leq \sum_{A \in \mathcal{C}} diam(A)^s$. Tenemos entonces que si $s = \ln(2)/\ln(3)$ entonces $\mathcal{H}^s(K) = 1$ y la dimensión de Hausdorff del conjunto triádico de Cantor K es igual a $\ln(2)/\ln(3)$.

Referencias

[1] D. Chamorro. ANÁLISIS INTERMEDIO I, "Espacios de Lebesgue y de Lorentz, Teoría de la medida, teoría de la integración y una introducción al análisis funcional". Asociación AMARUN, versión 0.0.4, verano 2009.