Curso de Verano EPN Julio-Agosto 2009

Deber en casa n°1: Medida de Hausdorff. Fecha de entrega:

Diego Chamorro

Resumen

La medida de Lebesgue permite medir objetos que poseen un volúmen; pero es inadaptada para "medir" los objetos que no tienen volúmen. Las medidas de Hausdorff sirven para remediar este inconveniente.

1. Preliminares

Ejercicio 1 *Sea (X, d) un espacio métrico. Decimos que dos conjuntos A y B son* positivamente separados *si verifican*

$$d(A, B) = \text{ínf}\{d(x, y) : \ x \in A, y \in B\} > 0.$$

Una medida exterior μ definida sobre $\mathcal{P}(X)$ es una medida exterior métrica *si, para todo A, B, dos conjuntos positivamente separados, se tiene la identidad $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.*

Mostrar que si μ es una medida exterior métrica entonces la colección de conjuntos μ-medibles contiene los conjuntos borelianos. Para ello seguir las siguientes etapas:

1. *Sea $E \in \mathcal{P}(X)$ tal que $\mu(E) < +\infty$ y sea C un conjunto cerrado. Considerando los conjuntos $C_n = \{x \in X : d(x, C) \geq 1/n\}$ mostrar que $\mu(E) \geq \mu(E \cap C) + \mu(E \cap C_n)$.*
2. *Definimos $A_k = \{x \in X : 1/(k + 1) \leq d(x, C) < 1/k\}$. Verificar que se tienen las inclusiones*
$$E \cap C_n \subset E \setminus C \subset (E \cap C_n) \cup \bigcup_{k \geq n} (E \cap A_k).$$
3. *Mostrar que $\sum_{k\geq 1} \mu(E \cap A_k) \leq 2\mu(E)$ y deducir que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k\geq n} \mu(E \cap A_k) = 0$.*
4. *Mostrar utilizando los dos puntos anteriores que se tiene $\lim\limits_{n\to+\infty} \mu(E \cap C_n) = \mu(E \setminus C)$.*
5. *Obtener la estimación $\mu(E) \geq \mu(E \cap C) + \mu(E \setminus C)$ y concluir que una medida exterior métrica contiene los conjuntos borelianos.*

2. Medida de Hausdorff

El conjunto de base que utilizamos es el espacio euclídeo n-dimensional $\mathbb{R}^n$ dotado de su distancia natural

$$d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2\right)^{1/2}.$$

Definición 1 *Si A es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ y si $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos convexos tales que $A \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i$ en dónde $0 < diam(U_i) \leq \delta$, diremos entonces que $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es un δ-*recubrimiento (convexo) *de A.*

Si A es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ y si s es un real positivo, definimos para $\delta > 0$, la aplicación:

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) = \inf_{\mathcal{R}_{\delta,A}} \sum_{i=0}^{+\infty} diam(U_i)^s, \tag{1}$$

en donde el ínfimo considera todos los δ-recubrimientos de A notados $\mathcal{R}_{\delta,A}$.

Ejercicio 2 *Mostrar que la aplicación (1) es una función decreciente del parámetro δ.*

* * * * *

Definición 2 (Medida exterior s-dimensional de Hausdorff) *Para obtener la medida exterior s-dimensional de Hausdorff de un subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ hacemos tender $\delta \longrightarrow 0$ en la expresión (1) de manera que*

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^s_\delta(A) = \sup_{\delta>0} \mathcal{H}^s_\delta(A). \tag{2}$$

Ejercicio 3 *Mostrar que $\mathcal{H}^s$ es efectivamente una medida exterior. Para ello seguir las siguientes etapas.*

1. *Sea $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión numerable de conjuntos de $\mathbb{R}^n$, sea $A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$, sea $\delta > 0$ y sea $\varepsilon > 0$. Verificar que para todo $i \in \mathbb{N}$, existe $(B^i_j)_{j\in\mathbb{N}}$ un δ-recubrimiento de A_i tal que*

$$\left|\mathcal{H}^s_\delta(A_i) - \sum_{j\in\mathbb{N}} diam(B^i_j)^s\right| \leq \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

2. *Mostrar que se tiene la inclusión $A \subset \bigcup\limits_{I\in\mathbb{N}, j\in\mathbb{N}} B^i_j$ y que esta unión es numerable.*
3. *Mostrar que*

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}}\sum_{j\in\mathbb{N}} diam(B^i_j)^s \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} (\mathcal{H}^s_\delta(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i})$$

4. *Haciendo $\varepsilon, \delta \longrightarrow 0$ comprobar que $\mathcal{H}^s(A) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{H}^s(A_i)$.*

* * * * *

Ejercicio 4 *Mostrar que para todo conjunto $\mathcal{H}^s$-medible A se tienen las identidades*

1. *$\mathcal{H}^s(x + A) = \mathcal{H}^s(A)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.*
2. *$\mathcal{H}^s(cA) = c^s\mathcal{H}^s(A)$ para todo $c \in \mathbb{R}$.*

Recuérdese que $x + A = \{x + y : y \in A\}$ y $cA = \{cy : y \in A\}$.

* * * * *

Ejercicio 5 *Mostrar que la medida exterior de Hausdorff $\mathcal{H}^s$ es una medida métrica en el sentido del ejercicio 1. Deducir que la medida de Hausdorff s-dimensional es una medida Boreliana. Indicaciones:*

1. *Sean A, B dos conjuntos medibles positivamente separados. Sea $\delta \in]0, d(A, B)/3[$ y sea $\varepsilon > 0$. Verificar que existe $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ un δ-recubrimiento de $A \cup B$ tal que*

$$\left|\mathcal{H}^s_\delta(A\cup B) - \sum_{i\in\mathbb{N}} diam(A_i)^s\right| \leq \varepsilon.$$

2. *Notando $I_A = \{i \in \mathbb{N} : A_i \cap A \neq \emptyset\}$ y $I_B = \{i \in \mathbb{N} : A_i \cap B \neq \emptyset\}$ verificar que $I_A \cap I_B = \emptyset$ y que $(A_i)_{I_A}$ es un δ-recubrimiento de A y que $(A_i)_{I_B}$ es un δ-recubrimiento de B.*
3. *Mostrar que se tiene la estimación*

$$\mathcal{H}^s_\delta(A\cup B) + \varepsilon \geq \sum_{i\in I_A} diam(A_i)^s + \sum_{i\in I_B} diam(A_i)^s$$

4. *Haciendo $\varepsilon, \delta \longrightarrow 0$ concluir.*

Notación: *La restricción de $\mathcal{H}^s$ a los Borelianos de $\mathbb{R}^n$ se denomina la* medida *de Hausdorff s-dimensional.*

* * * * *

Ejercicio 6 *Fijamos $s = 0$. Calcular $\mathcal{H}^0(A)$ en donde $A = \{x\}$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y calcular $\mathcal{H}^0(B)$ en donde $B = \{x, y\}$ con $x \neq y \in \mathbb{R}^n$. ¿A qué medida conocida corresponde la medida de Hausdorff 0-dimensional? Fijemos ahora $s > 0$, calcule $\mathcal{H}^s(A)$ y $\mathcal{H}^s(B)$ en donde A y B son los conjuntos anteriores.*

* * * * *

Definición 3 *Una* clase de Vitali *para un conjunto A es una familia de conjuntos $\mathcal{V}$ tal que, para todo $x \in A$ y para todo $\delta > 0$, existe $U \in \mathcal{V}$ con $x \in U$ tal que $0 < diam(U) \leq \delta$.*

Teorema 1 (Teorema de recubrimiento de Vitali) *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto $\mathcal{H}^s$-medible y sea $\mathcal{V}$ una clase de Vitali de A formada por conjuntos cerrados. Entonces podemos escoger una sucesión (finita o numerable) $(U_i)_{i\in I}$ de $\mathcal{V}$ tal que: o se tiene $\sum_{i\in I} diam(U_i)^s = +\infty$ o se tiene $\mathcal{H}^s(A \setminus \bigcup_{i\in I} U_i) = 0$.*

Ejercicio 7 (Relaciones entre la medida de Hausdorff y la medida de Lebesgue) *Definimos la constante*

$$c_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{2^n\Gamma(\frac{n}{2}+1)},$$

en dónde Γ es la función Gamma clásica: $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ (nótese que $c_1 = 1$ y que $c_2 = \frac{\pi}{4}$).

Vamos a verificar que si $A \subset \mathbb{R}^n$, entonces se tiene la identidad $\lambda_n(A) = c_n\mathcal{H}^n(A)$.

1. *Mostrar que sobre $\mathbb{R}$ las medidas λ y $\mathcal{H}^1$ coïnciden.*
2. *Verificar que para todo $\delta > 0$ y todo $\varepsilon > 0$, se puede recubrir un conjunto A por una colección de conjuntos cerrados $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tales que*
$$\sum_{i\in\mathbb{N}} diam(U_i)^n \leq \mathcal{H}^n_\delta(A) + \varepsilon.$$
3. *Suponiendo que para todo conjunto cerrado y convexo $C \subset \mathbb{R}^n$ se tiene la mayoración*
$$\lambda_n(C) \leq c_n diam(C)^n \qquad \text{(en particular se tiene la igualdad para las bolas cerradas).}$$
Mostrar que se tiene $\lambda_n(A) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_n(U_i) \leq c_n\mathcal{H}^n_\delta(A) + c_n\varepsilon$ y deducir que $\lambda_n(A) \leq c_n\mathcal{H}^n(A)$.
4. *Verificar que es suficiente estudiar los conjuntos A tales que $\mathcal{H}^s(A) < +\infty$.*
5. *Para la estimación recíproca, sea $(Q_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una colección de cubos que recubren A tal que*
$$\sum_{i\in\mathbb{N}} vol(Q_i) \leq \lambda_n(A) + \varepsilon.$$
Mostrar que para todo $i \in \mathbb{N}$, las bolas cerradas contenidas en Q_i de radio máximo δ forman una clase de Vitali de Q_i.
6. *Utilizando el teorema de Vitali, mostrar que existe una familia de bolas disjuntas $(B^i_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de Q_i de diámetro maximal δ tales que $\mathcal{H}^n(Q_i \setminus \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B^i_j) = 0$.*
7. *Mostrar que se tiene la estimación*
$$\mathcal{H}^n_\delta(A) \leq \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} \mathcal{H}^n_\delta(B^i_j)$$
8. *Mostrar que*
$$\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} \mathcal{H}^n_\delta(B^i_j) \leq c_n^{-1}\sum_{i=0}^{+\infty} vol(Q_i) \leq c_n^{-1}(\lambda_n(A) + \varepsilon)$$
Concluir que $c_n\mathcal{H}^n(A) \leq \lambda_n(A)$.

* * * * *

3. Dimensión de Hausdorff

Ejercicio 8

1. *Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ y $\delta > 0$ un real, si $0 < s < t$, muestre que se tiene la estimación*
$$\mathcal{H}^s_\delta(A) \geq \delta^{s-t}\mathcal{H}^t_\delta(A).$$
2. *Mostrar utilizando la estimación anterior que si para todo conjunto A existe un valor notado $dim(A)$ tal que $0 < \mathcal{H}^{dim(A)}(A) < +\infty$, entonces se tiene*
$$\mathcal{H}^s(A) = \begin{cases} +\infty & si \ \ 0 \leq s < dim(A), \\ 0 & si \ \ dim(A) < s < +\infty. \end{cases}$$
A la cantidad $dim(A)$ se le denomina la dimensión de Hausdorff *del conjunto A.*
3. *Sea Q el cubo unidad de $\mathbb{R}^n$ que dividimos en k^n cubos de lado $1/k$. Mostrar que si $\delta \geq k^{-1}n^{1/2}$ entonces $\mathcal{H}^n_\delta(Q) < +\infty$.*

4. *A partir del cálculo precedente, mostrar que si* $s > n$ *entonces* $\mathcal{H}^s(Q) = 0$ *y* $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n) = 0$.
5. *Mostrar que para todo subconjunto* $A \subset \mathbb{R}^n$ *se tiene* $0 \leq dim(A) \leq n$.

* * * * *

Ejercicio 9 *Sea* K *el conjunto triádico de Cantor.*

1. *Observando que* K *puede ser recubierto por* 2^j *intervalos de longitud* 3^{-j} *que conforman los conjuntos* K_j, *mostrar que* $\mathcal{H}^s_{3^{-j}}(K) \leq 2^j 3^{-sj}$. *Si fijamos* $s = \ln(2)/\ln(3)$, *mostrar que* $\mathcal{H}^s(K) \leq 1$.
2. *¿Cuál es la dimensión de Hausdorff del conjunto triádico de Cantor? Dar una cota superior al valor de* $dim(K)$.
3. *Queremos demostrar que, para toda colección* $\mathcal{C}$ *de intervalos que recubren* K, *se tiene*
$$1 \leq \sum_{A \in \mathcal{C}} diam(A)^s. \tag{3}$$
Mostrar que basta hacerlo cuando $\mathcal{C}$ *es una colección finita.*
4. *Supongamos que* $A_0 \in \mathcal{C}$ *es el más pequeño intervalo que contiene dos intervalos* J *y* J' *que aparecen en la construcción del conjunto triádico de Cantor* K *(no necesariamente en la misma etapa de la construcción, es decir, no necesariamente en el mismo conjunto* K_j*). Mostrar que* A_0 *es la unión disjunta de* J *con* L, *un intervalo en el complementario de* K, *y con* J'.
5. *Mostrar que para tales conjuntos se tiene* $diam(J), diam(J') \leq diam(L)$ *y*
$$diam(A_0)^s = \big(diam(J) + diam(L) + diam(J')\big)^s \geq \left(\frac{3}{2}(diam(J) + diam(J')\right)^s \geq diam(J)^s + diam(J')^s$$
Observar que no se aumenta la suma (3) si se reemplaza A_0 *por los dos intervalos* J *y* J'.
6. *Verificar que se puede proceder de esta forma hasta obtener un recubrimiento de* K *formado por intervalos de igual longitud (que podemos fijar a* 3^{-j}*).*
7. *Observar que procediendo de esta manera incluímos todos los intervalos que conforman* K_j. *Como la mayoración (3) es válida para este recubrimiento, lo es también para el recubrimiento original* $\mathcal{C}$.
8. *Concluir que cuando* $s = \ln(2)/\ln(3)$ *entonces* $\mathcal{H}^s(K) = 1$.