Ejercicios Lección n°1: Integral y sumas de Riemann, problemas y limitaciones

EPN, verano 2009

Ejercicio 1 — Arquímedes

1. Mostrar que se tiene la identidad
$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$
2. Calcular, utilizando el método de Arquímedes, el área bajo la curva $f(x) = x^3$ con $x \in [0,1]$.
3. Verificar de forma "moderna" el resultado.

Ejercicio 2 — Primera fórmula del promedio

Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y sea $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función Riemann-integrable positiva.

1. Mostrar que existe $c \in]a,b[$ tal que
$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx.$$
Indicación: aplicar el teorema de los valores intermedios.
2. ¿Qué sucede si g no es positiva?

Ejercicio 3 — Integral de Riemann

1. La función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ definida sobre $]0,1]$ ¿es Riemann-integrable?
2. ¿Cómo estimar intuitivamente $\int_0^1 f(x)dx$?
3. ¿Es la función $g(x) = f^2(x)$ integrable?

Ejercicio 4 — Sumas de Riemann

1. Calcular $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^n \frac{i^4}{n^5}$ y $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{\pi n}\sum_{i=1}^n \cos\left(\frac{\pi i}{2n}\right)$.
2. Sea $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Sea $R_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(k/n)$ y sea $\ell = \int_0^1 f(x)dx$.
Mostrar que si f es creciente entonces $0 \leq R_n - \ell \leq \frac{f(1)-f(0)}{n}$.

Ejercicio 5 — Problemas de Convergencia

Definimos una sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sobre $[0,1]$ a valores reales por
$$f_n(x) = \frac{2n^2x}{(1+n^2x^2)^2} \quad \text{y escribimos} \quad g_n(x) = nf_n(x).$$

1. Calcular $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$ y $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(x)$.
2. Verificar que se tiene
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = 1, \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 g_n(x)dx = +\infty.$$
3. ¿Porqué no se obtiene la igualdad al intercambiar los signos " lím" y "$\int$"?

Ejercicio 6 — Problemas de completitud

1. Sea $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ el conjunto de las funciones continuas a valores reales definidas sobre el intervalo $[0,1]$. Mostrar que la cantidad $\|f\| = \int_0^1 |f(x)|dx$ es una norma sobre este espacio de funciones.
2. ¿Es este espacio $(\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|)$ un espacio normado completo? Si/No.

3. Consideramos la sucesión para todo $n \geq 2$:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}n + 1 - nx & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{si } x > \frac{1}{2} + \frac{1}{n}. \end{cases}$$

   Verificar que cada función f_n es continua.
4. Calcular $\|f_n\|$, ¿hacia qué valor tiende $\lim\limits_{n \to +\infty} \|f_n\|$? ¿Es una sucesión de Cauchy?
5. ¿Hacia qué función f converge la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Calcular $\|f\|$.
6. Con las preguntas 3.-5. responder a la pregunta 2.

Ejercicio 7 — Imagenes directas e Imagenes recíprocas

Si f es una aplicación de X en Y, la *imagen directa* $f(A)$ de un conjunto $A \in \mathcal{P}(X)$ es el conjunto de puntos $y \in Y$ de la forma $y = f(x)$ con $x \in A$:

$$f(A) = \{y \in Y : \quad y = f(x);\ x \in A\}$$

La *imagen recíproca* de $B \in \mathcal{P}(Y)$ es el conjunto definido por

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : \quad f(x) \in B\}$$

1. Mostrar que se tienen las identidades para I una colección de índices cualquiera.

   a) $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$

   b) $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$

   c) $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$

2. ¿Cuál de estas identidades se mantiene para la imagen directa? Justifique sus respuestas.

Ejercicio 8 — Funciones indicatrices

Sea X un conjunto. Para todo subconjunto A de X definimos su función indicatriz:

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_A : X &\longrightarrow \{0,1\} \\ x &\longmapsto \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases} \end{aligned}$$

1. Verificar que se tienen las identidades $\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = \mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(x)$ y $\mathbb{1}_{A\Delta B}(x) = \mathbb{1}_{A\setminus B}(x) + \mathbb{1}_{B\setminus A}(x)$.
2. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos de $\mathcal{P}(X)$, determinar $\mathbb{1}_{\{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\}}$ en función de $\mathbb{1}_{A_n}$.

Ejercicio 9 — Propiedades básicas de medidas

Consideremos $\mathcal{A}$ la colección formada por los intervalos de la forma (a,b) con $a,b \in \mathbb{R}$ y sea una aplicación $\mathfrak{m} = \mathcal{A} \longrightarrow [0,+\infty]$. ¿Qué condiciones *naturales* deben exigirse a la aplicación $\mathfrak{m}$ para "medir" de forma "adecuada" los intervalos de la familia $\mathcal{A}$?