Ejercicios Lección n°2: σ-álgebras y medidas

EPN, verano 2009

Ejercicio 1 — Límite superior y límite inferior

Calcular $\limsup_{n\to+\infty} A_n$ y $\liminf_{n\to+\infty} A_n$ en los casos siguientes:

1. $A_n =]-\infty, a_n]$ en donde $a_{2n} = 2 + 1/(2n)$ y $a_{2n+1} = -2 - 1/(2n+1)$, $n \geq 1$.
2. $A_{2n} =]1, 4 + 1/(4n)]$ y $A_{2n+1} =]-5 - 1/(2n+1), 2]$, $n \geq 1$.

Ejercicio 2 — Algebras sobre $\mathbb{R}^n$

1. Sea $\mathcal{A}$ el álgebra sobre $\mathbb{R}$ determinada por la reunión finita de intervalos. Diremos que dos intervalos son *separados* si su unión no es un intervalo. Mostrar que cada elemento de $\mathcal{A}$ se escribe de manera única como reunión finita de intervalos dos a dos separados.
2. Sea $\mathcal{A}$ el álgebra de partes sobre $\mathbb{R}^n$ determinada por la reunión finita de conjuntos adoquinables.
   a) Mostrar que el complementario de un adoquín es la unión finita de adoquines disjuntos. ¿Cúantos adoquines se necesita si $n = 2$, $n = 3$?
   b) Sean A y B dos adoquines notamos $A^c = \cup_i A_i$ y $B^c = \cup_j B_j$ las descomposiciones precedentes. Mostrar que $A \cup B$ es la unión disjunta de los adoquines $A \cap B$, $A_i \cap B$ y $A \cap B_j$.
   c) Razonando por recurrencia concluir que los conjuntos adoquinables constituyen una álgebra de partes.
3. Sea $\mathcal{A}$ el álgebra sobre $\mathbb{R}^n$ determinada por la reunión finita de adoquines. Mostrar que la aplicación *vol* es una función aditiva de conjuntos y que no depende de la descomposición adoptada para expresar los conjuntos adoquinables.

Ejercicio 3 — Particiones

Decimos que π es una *partición* de X si es una familia de partes dos a dos disjuntas que recubren X.

1. Mostrar que dada una partición finita π sobre X es posible definir una álgebra $\mathcal{A}_\pi$ tomando todas las reuniones finitas de elementos de π.
2. Si la partición es finita y posee N elementos, ¿Cuántos elementos posee el álgebra $\mathcal{A}_\pi$?

Ejercicio 4 — Algebras sobre $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$

Un elemento de Ω es una sucesión infinita $\omega = (\omega_1, \omega_2, ...)$ en donde ω_i es igual a 0 ó 1 para todo i.

Este conjunto tiene una interpretación probabilística. Podemos relacionar un punto ω a un juego de "cara o sello" infinito: al lanzar i veces una moneda diremos que ω_i vale 0 si es cara y 1 si es sello y entonces el conjunto Ω describe todas las posibilidades de este juego.

Para cada entero $n \geq 1$ consideramos las sucesiones finitas $\alpha = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \in \{0,1\}^n$ (de longitud n) y definimos $S_\alpha = \{\omega \in \Omega : \omega_1 = \alpha_1, ..., \omega_n = \alpha_n\}$ como el conjunto de sucesiones infinitas que comienzan por α.

1. Mostrar que los conjuntos S_α forman una partición de Ω.
2. Notamos $\mathcal{F}_n$ el álgebra asociada a la partición del punto anterior. Mostrar que la sucesión $\mathcal{F}_n$ es creciente.
3. Mostrar que la unión $\bigcup_{n\geq 1} \mathcal{F}_n$ es también una álgebra sobre Ω.
4. Sea $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ dotado del álgebra $\mathcal{A} = \bigcup_{n\geq 1} \mathcal{F}_n$. Para todo $A \in \mathcal{A}$ se tiene que $A \in \mathcal{F}_n$ para algún n y es por lo tanto la unión de un cierto número de S_α que podemos suponer igual a k. Definimos la aplicación $\mathbb{P} : \mathcal{A} \longrightarrow [0, +\infty]$ como $\mathbb{P}(A) = k2^{-n}$. ¿Es el entero n único?
5. Verificar que la forma de calcular $\mathbb{P}(A)$ no depende del entero n escogido.
6. Verificar que $\mathbb{P}$ es una función aditiva de conjuntos.
7. Calcular la cantidad $\mathbb{P}(A)$ en donde $A = \{\omega \in \Omega : \omega_1 = 0\}$.

Ejercicio 5 — Unión e intersección

Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de una σ-álgebra $\mathscr{A}$ sobre X.

1. Representar $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ por medio de una reunión de elementos dos a dos disjuntos de $\mathscr{A}$.
2. Representar $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ por medio de una reunión de elementos crecientes de $\mathscr{A}$.
3. Representar $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ por medio de una intersección de elementos decrecientes de $\mathscr{A}$.

Ejercicio 6 — Algebras engendradas

1. Sea X un conjunto y sean $A, B \subset X$. Fijamos $\mathcal{K} = \{A, B\}$, calcule la σ-álgebra engendrada $\sigma(\mathcal{K})$.
2. Sean X un conjunto, $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(X)$ y $C \subset X$. ¿Se tiene la identidad $\sigma(\mathcal{K}) \cap C = \sigma(\mathcal{K} \cap C)$? ¿Qué sucede si se toma en cuenta la reunión?
3. Mostrar que si $\mathcal{A}$ es una álgebra de partes que es estable por reunión de sucesiones crecientes, entonces $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra.

Ejercicio 7 — Algebras Borelianas reales

1. Mostrar que la σ-álgebra boreliana de $\overline{\mathbb{R}}$ es igual a la σ-álgebra engendrada por los intervalos de la forma $[-\infty, a[$ en donde a recorre un conjunto A denso en $\mathbb{R}$.
2. Mostrar que todo abierto de $]0, 1[$ puede expresarse como unión numerable de subintervalos de $]0, 1[$ de la forma $]p - q, p + q[$ en donde p y q son números racionales de $]0, 1[$.
3. Mostrar que la σ-álgebra $\mathcal{B}or(]0, 1[)$ es engendrada por la familia

$$\mathcal{K} = \{]0, 1/2^n[, [k/2^n, (k + 1)/2^n[: n, k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq 2^n - 1\}$$

4. ¿Es el conjunto $\mathbb{Q}$ un subonjunto Boreliano de $\mathbb{R}$?

Ejercicio 8 — Cardinalidad de σ-álgebras

Mostrar, procediendo por una reducción al absurdo, que toda σ-álgebra infinita $\mathscr{A}$ definida sobre un conjunto infinito X es no numerable. Seguir los pasos siguientes.

1. Sea X un conjunto infinito numerable y sea $\mathscr{A}$ una σ-álgebra infinita numerable. Para todo $x \in X$ considerar los conjuntos $\mathscr{A}_x = \{A \in \mathscr{A} : x \in A\}$ y $A_x = \bigcap_{A\in\mathscr{A}_x} A$. Verificar que A_x es un elemento de $\mathscr{A}$.
2. Mostrar que $F = (A_x)_{x\in X}$ es una partición de X y verificar que el conjunto F es infinito.
3. Mostrar que $\mathcal{P}(F)$ se inyecta en $\mathscr{A}$ y concluir que $\mathscr{A}$ es no numerable.

Ejercicio 9 — Funciones aditivas de conjuntos y medidas

1. Sea X un conjunto y sea $\mathscr{A}$ una σ-álgebra definida sobre X. Sea $\mu : \mathscr{A} \longrightarrow [0, +\infty]$ una función definida por $\mu(A) = 1$ si $A \neq \emptyset$ y $\mu(A) = 0$ si $A = \emptyset$. ¿La función μ es una medida?
2. Sea X un conjunto no numerable. Para todo $A \in \mathcal{P}(X)$ definimos $\mu(A) = 0$ si $Card(A) \leq Card(\mathbb{N})$ y $\mu(A) = +\infty$ si $Card(A) > Card(\mathbb{N})$. ¿La función μ es una medida?
3. Sea $\mathfrak{m} : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow [0, +\infty]$ tal que para todo $A \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ se tiene $\mathfrak{m}(A) = \sum_{n\in A} \frac{1}{n^2}$ si $Card(A) < +\infty$ con la convención $\frac{1}{0} = +\infty$, $\mathfrak{m}(\emptyset) = 0$ y $\mathfrak{m}(A) = +\infty$ sino.
   a) Mostrar que la aplicación $\mathfrak{m}$ posee la propiedad de la aditividad fina.
   b) Verificar que $\mathfrak{m}$ no es una medida sobre $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

Ejercicio 10 — Propiedades de medidas

Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido.

1. Si $A, B \in \mathscr{A}$ tal que $A \subset B$, mostrar que $\mu(A) \leq \mu(B)$.
2. Si $\mu(A) < +\infty$, verificar que $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$. ¿Qué sucede si $\mu(A) = +\infty$?
3. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ verificar que se tiene $\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$.
4. Mostrar que la unión numerable de conjuntos medibles de μ-medida nula es de medida nula.

Ejercicio 11 — Conjuntos de medida nula

Para cada uno de los casos siguientes:

- $(X, \mathcal{P}(X))$ con $\mu(A) = \mathbb{1}_A(a)$ con $a \in X$.
- $(X, \mathscr{A})$ con $X = \mathbb{R}$ y $\mathscr{A} = \{A \subseteq \mathbb{R} : Card(A)$ numerable o $Card(A^c)$ numerable$\}$ y $\mu(A) = 0$ si $Card(A) \leq Card(\mathbb{N})$ y $\mu(A) = 1$ sino.

1. Mostrar que μ es una medida sobre $(X, \mathscr{A})$.
2. Determinar la familia de conjuntos de μ-medida nula.

Ejercicio 12 — Hormiga atómica

Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido tal que la medida μ sea no-atómica y tal que existe un conjunto $A \in \mathscr{A}$ de medida postiva. Mostrar que se puede construir una sucesión decreciente de conjuntos medibles $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tales que

$$A = A_0 \supset A_1 \supset ...$$

y tales que $\mu(A_0) > \mu(A_1) > ... > 0$.

Ejercicio 13 — Espacio probabilizado

Sea $(X, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espacio probabilizado de medida $\mathbb{P}$ y sea $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos de $\mathscr{A}$ tal que $A_n \downarrow \emptyset$ (es decir que la sucesión es decreciente y tiende hacia $\emptyset$). Mostrar entonces que $\mathbb{P}(A_n) \downarrow 0$.