Ejercicios Lección n°3: Clases monótonas, medidas exteriores EPN, verano 2009

Ejercicio 1 — Clase monótona

Sea $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ un espacio medible sobre el cual consideramos la medida cardinal μ y la medida gruesa ν.

1. Determinar el conjunto $\mathcal{D} = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : \mu(A) = \nu(A)\}$
2. ¿Es el conjunto $\mathcal{D}$ una σ-álgebra?
3. Consideremos ahora $X = \{1, 2, 3, 4\}$ y $\mathscr{A} = \mathcal{P}(X)$ con $\mu = Card$. Definimos una aplicación ν por

$$\begin{aligned}
\nu(A) &= 0 \quad si \quad A = \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\},\\
\nu(A) &= 2 \quad si \quad A = \{3\}, \{4\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\},\\
\nu(A) &= 4 \quad si \quad A = \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, X
\end{aligned}$$

Verificar que ν es una medida sobre $(X, \mathscr{A})$. Determinar el conjunto $\mathcal{D} = \{A \in \mathcal{P}(X) : \mu(A) = \nu(A)\}$, ¿es el conjunto $\mathcal{D}$ una σ-álgebra?

Ejercicio 2 — Medidas Exteriores

1. Sea X un conjunto cualquiera y sea $\mathcal{K} = \{\emptyset, X\}$. Definimos una aplicación μ sobre $\mathcal{K}$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\mu : \mathcal{K} &\longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+\\
\emptyset &\longmapsto \mu(\emptyset) = 0\\
X &\longmapsto \mu(X) = 1.
\end{aligned}$$

   a) Calcular la medida exterior μ^* asociada a esta aplicación.
   b) Determinar la colección de conjuntos μ^*-medibles. ¿Qué σ-álgebra se obtiene?

2. Sea $\nu^* : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow [0, +\infty[$ una aplicación determinada por $\nu^*(\emptyset) = 0$, $\nu^*(\mathbb{N}) = 2$ y $\nu^*(A) = 1$ para todo $A \neq \{\emptyset, \mathbb{N}\}$.
   a) Mostrar que ν^* es una medida exterior y determinar la σ-álgebra $\mathscr{M}_{\nu^*}$.
   b) Si definimos la sucesión de conjuntos $A_n = \{k \in \mathbb{N} : k \leq n\}$, ¿se tiene la relación $\nu^*(\lim\limits_{n\to+\infty} A_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \nu^*(A_n)$?

3. Sea $\eta : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow [0, +\infty[$ una aplicación determinada por $\eta(\emptyset) = 0$, $\eta(A) = 1$ si $A \neq \emptyset$.
   a) Mostrar que η es una medida exterior y determinar la σ-álgebra $\mathscr{M}_\eta$.
   b) Si definimos la sucesión de conjuntos $B_n = \{k \in \mathbb{N} : k \geq n\}$, ¿se tiene la relación $\eta(\lim\limits_{n\to+\infty} B_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \eta(B_n)$?

4. Sea χ una aplicación determinada por:

$$\begin{aligned}
\chi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) &\longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+\\
A &\longmapsto \chi(A) = \frac{Card(A)}{Card(A) + 1} \quad \text{si } Card(A) < +\infty,\\
A &\longmapsto \chi(A) = 1 \quad \text{si } Card(A) = +\infty.
\end{aligned}$$

   a) Mostrar que χ es una aplicación creciente de conjuntos.
   b) ¿Se tiene $\chi(\lim\limits_{n\to+\infty} A_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \chi(A_n)$ para toda sucesión creciente de conjuntos $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
   c) ¿Y para toda sucesión decreciente de conjuntos?
   d) Mostrar que χ es una medida exterior. Indicación: empezar con la unión finita de conjuntos y utilizar el punto *b*) para pasar al límite.
   e) Determinar la colección $\mathscr{M}_\chi$.

Ejercicio 3 — Propiedades de la Medida de Lebesgue

1. Mostrar que $\mathbb{R}^n$ es un espacio σ-compacto.
2. Mostrar que la medida exterior de Lebesgue $\lambda_n^* : \mathscr{L}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ es σ-finita.
3. Mostrar que la medida de Lebesgue $\lambda_n^* : \mathscr{L}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ es regular.
4. Mostrar que todo subconjunto numerable de $\mathbb{R}$ es un conjunto boreliano de medida nula.
5. Sea μ una medida no nula definida sobre el espacio medible $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n))$. Si suponemos que esta medida es invariante por traslación y que es finita para todo subconjunto acotado boreliano de $\mathbb{R}^n$; mostrar que existe una constante positiva $c > 0$ tal que la identidad $\mu(A) = c\lambda_n(A)$ es válida para todo boreliano A.

Ejercicio 4 — Conjunto no Lebesgue medible

1. Definiendo una relación sobre $\mathbb{R}$ de la siguiente forma: notamos $x \sim y$ si y solo si $x - y$ es racional. Verificar que $\sim$ es una relación de equivalencia.
2. Mostrar que cada clase de equivalencia bajo la relación $\sim$ es de la forma $\mathbb{Q} + x$ para algún x. Deducir que el conjunto de clases de equivalencia es denso en $\mathbb{R}$.
3. Verificar que estas clases de equivalencia son disjuntas y que cada una de ellas intersecta el intervalo $]0, 1[$.
4. ¿Cuál es el cardinal el conjunto de clases de equivalencia?
5. Construimos un subconjunto $\mathscr{E}$ de $]0, 1[$ que contiene exactamente un elemento de cada una de estas clases. Sea $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una enumeración de los números racionales en el intervalo $]-1, 1[$ y para cada n definimos $\mathscr{E}_n = \mathscr{E} + r_n$.
   a) Verificar que los conjuntos $\mathscr{E}_n$ son disjuntos.
   b) Comprobar que su unión está incluída en el intervalo $]-1, 2[$.
   c) Mostrar que su unión contiene el intervalo $]0, 1[$ y que se tienen las inclusiones
   $$]0, 1[\subset \bigcup_n \mathscr{E}_n \subset]-1, 2[.$$
6. Mostrar que para cada n el conjunto $\mathscr{E}_n$ es una traslación de $\mathscr{E}$.
7. ¿Es el conjunto $\mathscr{E}$ un conjunto Lebesgue-medible? Proceder por el absurdo.

   Es muy importante notar que este resultado implica la imposibilidad de prolongar la medida de Lebesgue a la clase de todos *los subconjuntos de la recta real de manera que la función obtenida sea una medida invariante por traslación.*

Ejercicio 5 — Cubos diádicos

Definimos los intervalos diádicos por la fórmula $[m2^{-k}, (m + 1)2^{-k}[$ en donde m, k son enteros relativos. Un *cubo diádico* es entonces el producto cartesiano de intervalos diádicos, es decir es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ de la forma
$$Q = \prod_{j=1}^{n} [m_j 2^{-k}, (m_j + 1)2^{-k}[\qquad \text{en donde } m_1, ..., m_n, k \in \mathbb{Z}.$$
Si Q es un cubo diádico de $\mathbb{R}^n$, notaremos $|Q|$ su medida de Lebesgue y $\ell(Q)$ la longitud de sus lados.

1. Verificar que dos intervalos diádicos de misma longitud son siempre disjuntos.
2. Verificar que dos cubos diádicos son o disjuntos o contenidos el uno en el otro.
3. Mostrar que para todo cubo diádico Q de $\mathbb{R}^n$ se tiene la identidad $|Q| = \ell(Q)^n$.
4. Mostrar que todo conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ es la unión disjunta numerable de cubos diádicos.
5. Para todo vector $x \in \mathbb{R}^n$ y todo subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ definimos $x + A$ el conjunto determinado por $x + A = \{y \in \mathbb{R}^n : y = a + x, a \in A\}$. Mostrar que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y para todo conjunto $A \in \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n)$, $x + A$ es un conjunto medible y se tiene $\lambda_n(x + A) = \lambda_n(A)$.
6. Mostrar que B es un subconjunto Lebesgue-medible de $\mathbb{R}^n$ si y solo si $x + B$ es Lebesgue-medible.
7. Para todo $\alpha > 0$, a partir de $A \in \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n)$ definimos el conjunto
   $$\alpha A = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \alpha y = (\alpha y_1, ..., \alpha y_n) \,; y \in A\}.$$

Verificar que la medida de Lebesgue λ_n es homogénea de grado n. Es decir, para todo $\alpha > 0$ y para todo $A \in \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n)$ tenemos $\lambda_n(\alpha A) = \alpha^n \lambda_n(A)$.

Ejercicio 6 — Quién es quién

1. Henri Lebesgue (1875-1941)
2. Felix Hausdorff (1868-1942)
3. Eugene Dynkin (1924-)
4. Constantin Caratheodory (1873-1950)


(A)


(B)


(C)


(D)