Ejercicios Lección n°4: Construcción de la integral de Lebesgue

EPN, verano 2009

Ejercicio 1 — Medibilidad

Sea $X = \mathbb{R}$ y $\mathscr{A} = \{A \in \mathcal{B}or(\mathbb{R}) : A = -A\}$ en donde definimos $-A = \{-x : x \in A\}$.

1. Mostrar que $\mathscr{A}$ es una σ-álgebra.
2. Definimos $f(x) = e^x$, $g(x) = x^3$ y $h(x) = x$. ¿Son estas funciones
   a) $(\mathcal{B}or(\mathbb{R}), \mathscr{A})$-medibles?
   b) $(\mathscr{A}, \mathcal{B}or(\mathbb{R}))$-medibles?
   c) $(\mathscr{A}, \mathscr{A})$-medibles?
3. Dar una condición para que una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sea $(\mathscr{A}, \mathcal{B}or(\mathbb{R}))$-medible.

Ejercicio 2 — Medibilidad - bis

Sea $(X, \mathscr{A})$ un conjunto medible y sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función medible. Si $a \in \mathbb{R}^*_+$ definimos

$$\begin{aligned} f_a(x) : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f_a(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad |f(x)| \leq a, \\ a & \text{si} \quad f(x) > a, \\ -a & \text{si} \quad f(x) < -a. \end{cases} \end{aligned}$$

Mostrar que f_a es una función medible.

Ejercicio 3 — Funciones Borelianas

Verificar que las aplicaciones siguientes, definidas sobre $\mathbb{R}$ a valores en $\mathbb{R}$, son Borelianas.

1. $f(x) = e^x$ si $x \in \mathbb{Q}$ y $f(x) = 1/x$ sino
2. $g(x) = \inf\limits_{n \in \mathbb{N}} \sin(e^n x)$

Ejercicio 4 — Medida, conjuntos despreciables, integral

Sea X un conjunto y sea $\mathscr{A} = \mathcal{P}(X)$. Sea $a \in X$ fijo y $\mu(A) = \mathbb{1}_A(a)$ para todo $A \in \mathscr{A}$.

1. Mostrar que μ es una medida sobre el espacio medible $(X, \mathscr{A})$.
2. Determinar el conjunto de partes μ-despreciables de X.
3. Para $f \in \mathcal{M}(X, \mathscr{A}, \mathbb{R}_+, \mathcal{B}or(\mathbb{R}_+))$ expresar $\int_X f(x) d\mu(x)$.

Ejercicio 5 — Sumas de Lebesgue

Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido y sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ una función medible. Definimos las *sumas de Lebesgue* de f por la expresión:

$$L_n(f) = \sum_{1 \leq k \leq n2^n} \frac{k-1}{2^n} \mu\left(\left\{x \in X : \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n}\right\}\right)$$

1. Mostrar que $L_n(f)$ tiende creciendo hacia $\int_X f d\mu$.
2. ¿Qué diferencias encuentra entre las Sumas de Lebesgue y las Sumas de Riemann?

Ejercicio 6 — Integrabilidad

Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido y sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ una función integrable.

1. Mostrar que se tiene entonces $\sup\limits_{t \geq 0} t\mu(\{x \in X : f(x) \geq t\}) < +\infty$.
2. ¿Es esta condición suficiente para que la función f sea integrable?

Ejercicio 7 — Integrabilidad - bis

Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido y sean $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ dos funciones integrables.

1. Encontrar un ejemplo de funciones f, g tales que el producto fg no sea integrable.
2. Sea $A \in \mathscr{A}$ tal que $\mu(A) = 0$. Mostrar que $\int_A f(x) d\mu(x) = 0$.
3. Mostrar que si f es integrable entonces $|f(x)| < +\infty$ en μ-c.t.p.
4. Mostrar que si $\int_X |f(x)| d\mu(x) = 0$ entonces $f = 0$ en μ-c.t.p.

Ejercicio 8 — Criterios de Integrabilidad

Sea $c > 0$ un real.

1. Mostrar que $x \longmapsto \exp(-c\sqrt{x})$ es Lebesgue-integrable sobre $[0, +\infty[$.
2. Determinar el conjunto de reales α tales que la función $x \longmapsto x^\alpha \exp(-c\sqrt{x})$ sea Lebesgue-integrable sobre $[0, +\infty[$ y sobre $[1, +\infty[$.
3. Determinar el conjunto de parejas reales (α, β) tales que la función $x \longmapsto x^\alpha \ln(x)^\beta$ sea Lebesgue-integrable sobre $]0, 1]$ y sobre $[1, +\infty[$.

Ejercicio 9 — Integral Estocástica

Sea P una subdivisión de un intervalo acotado $[a, b]$, notamos $\|P\| = \text{máx} |x_{i-1} - x_i|$ para todo $x_{i-1}, x_i \in P$ con $1 \leq i \leq n$. Asumiremos que para todo n, P_{n+1} es una subdivisión más fina que P_n de manera que $\|P_n\| \geq \|P_{n+1}\|$.

Sea g una función estrictamente creciente definida sobre $[a, b]$. Una función acotada f definida sobre $[a, b]$ a valores reales es *Riemann-Stieltjes integrable con respecto a g* si el límite siguiente existe:

$$\int_a^b f(x) d(g(x)) = \lim_{\|P_n\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\tau_i)[g(x_i) - g(x_{i-1})]. \tag{1}$$

en donde $\tau_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

1. Calcule $\int_0^1 f(x) d(g(x))$ si $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$.
2. Nos interesamos en el caso en donde $f = g$. Definimos

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})[f(x_i) - f(x_{i-1})] \qquad \text{y} \qquad R_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)[f(x_i) - f(x_{i-1})].$$

   Mostrar que se tienen las fórmulas

$$\begin{aligned} L_n &= \frac{1}{2}\left[f^2(b) - f^2(a) + \sum_{i=1}^{n} ((f(x_i) - f(x_{i-1}))^2\right] \\ R_n &= \frac{1}{2}\left[f^2(b) - f^2(a) - \sum_{i=1}^{n} ((f(x_i) - f(x_{i-1}))^2\right]. \end{aligned}$$

   Calcular para ello las cantidades $R_n - L_n$ y $R_n + L_n$.

   A la cantidad $R_n - L_n$ se la denomina la *variación cuadrática* de la función f sobre $[a, b]$.

3. ¿Bajo qué condición se tiene $\lim_{\|P_n\| \to 0} R_n = \lim_{\|P_n\| \to 0} L_n$?
4. Sea f una función de clase $\mathcal{C}^1[a, b]$. Mostrar utilizando el teorema del valor intermedio que se tiene la estimación

$$|R_n - L_n| \leq \|f'\|_\infty^2 \|P_n\| |b - a|.$$

   ¿Qué se puede decir de $\lim_{\|P_n\| \to 0} R_n$ y de $\lim_{\|P_n\| \to 0} L_n$?

5. Deducir una fórmula para calcular $\int_a^b f(x) d(f(x))$ utilizando:
   a) las fórmulas y los límites anteriores,
   b) una integración por partes.

6. Sea f una función continua definida sobre $[a, b]$ tal que $|f(x) - f(y)| = c|x - y|^{1/2}$ para todo $x, y \in [a, b]$. Mostrar que la variación cuadrática de f es igual a $c(b - a)$.
7. ¿Es posible definir la integral $\int_a^b f(x)d(f(x))$ por medio de la fórmula (1)?

Ejercicio 10 — Conjunto Lebesgue-Medible no Boreliano

Definimos la *función singular de Lebesgue* $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ iterativamente: empezamos fijando $f(0) = 0$, $f(x) = 1/2$ para todo $x \in]1/3, 2/3[$ y $f(1) = 1$ y juntamos por rectas estos puntos. Luego, a partir de la función anterior, fijamos $f(x) = 1/4$ sobre $]1/9, 2/9[$ y $f(x) = 3/4$ sobre $]7/9, 8/9[$ y seguimos juntando los extremos por rectas. Continuando de esta forma, $f(x)$ toma los valores $1/2^n, 3/2^n, ...$ en los varios intervalos $[0, 1] \setminus K_{n-1}$ en donde K_{n-1} son los conjuntos que se obtienen en la construcción del conjunto triádico de Cantor K. Se obtiene entonces que la función f definida sobre $[0, 1] \setminus K$ es creciente y tiene sus valores en $[0, 1]$. Extendemos entonces a todo el intervalo $[0, 1]$ fijando $f(0) = 0$ y escribiendo $f(x) = \sup\{f(t) : t \in [0, 1] \setminus K,\ t < x\}$ si $x \in K$ y $x \neq 0$.

1. Mostrar que la función así obtenida es creciente, continua y que se tiene $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$.
2. Utilizando el teorema del valor intermedio mostrar que para todo $y \in [0, 1]$ existe al menos un $x \in [0, 1]$ tal que $f(x) = y$.

   Podemos entonces definir la función $g : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ de la siguiente forma:

   $$g(y) = \text{ínf}\{x \in [0, 1] : f(x) = y\}.$$

3. Verificar que la continuidad de f implica que se tiene $f(g(y)) = y$ para todo $y \in [0, 1]$.
4. Mostrar que g es una función inyectiva.
5. Mostrar que g es una función creciente y una función borel-medible.
6. Sea$\mathscr{E} \subset [0, 1]$ el conjunto no Lebesgue-medible construido en la sección 2.4.4 del folleto.
   a) Sea $B = g(\mathscr{E})$, verificar que B es un subconjunto del conjunto triádico de Cantor.
   b) ¿Cuál es la medida de Lebesgue de B? ¿Porqué?
7. Procediendo por el absurdo, mostrar que B no es un conjunto Boreliano.
8. ¿Es el espacio medido $(\mathbb{R}, \mathcal{B}or(\mathbb{R}), \lambda)$ un espacio medido completo?