Ejercicios Lección n°5: Teoremas clásicos

EPN, verano 2009

Ejercicio 1 — Convergencia Monótona

Mostrar con un ejemplo que el teorema de convergencia monótona de Beppo Levi es falso en el marco de la integral de Riemann.

Ejercicio 2 — Construcción de nuevas medidas

En este ejercicio consideramos como conjunto de base la recta real dotada de su estructura de espacio medido natural. Para $\alpha > 0$ un real definimos las funciones

$$f(x) = \alpha e^{-\alpha x}\mathbb{1}_{[0,1]}(x) + e^{-\alpha}\delta_1(x) \qquad y \qquad g(x) = e^{-\alpha x}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x) + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\alpha^k}{k!}e^{-\alpha}\delta_k(x).$$

1. Construir las dos medidas μ y ν asociadas a estas funciones f y g.
2. Determinar si estas medidas son finitas.
3. Para cada una de estas medidas, estudiar la integrabilidad de la función $\varphi(x) = \mathbb{1}_{[1,3]}(x)$ y calcular su integral con respecto a estas medidas.

Ejercicio 3 — Lema de Fatou

Sobre la recta real $\mathbb{R}$, dotada de la medida de Lebesgue, definimos la sucesión de funciones $f_n(x) = n^2\mathbb{1}_{[0,1/n]}(x)$.

1. ¿Hacia qué función converge simplemente esta sucesión?
2. Mostrar con este ejemplo que se tiene una desigualdad estricta en el Lema de Fatou.

Ejercicio 4 — Condición de Lebesgue

Sea a un real. Definimos una sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sobre $[0,1]$ (dotado de la medida de Lebesgue) a valores reales por

$$f_n(x) = \frac{2an^2x}{(1+n^2x^2)^2} \quad \text{y escribimos} \quad g_n(x) = nf_n(x).$$

1. Calcular $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$ y $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(x)$.
2. Verificar que se tiene
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = a, \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 g_n(x)dx = +\infty.$$
3. ¿Porqué no se obtiene la igualdad al intercambiar los signos " lím" y "$\int$"? Comparar las razones de este hecho con el ejercicio 5 de la lección 1.
4. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión determinada por
$$f_n(x) = \begin{cases} 2n^2x & \text{si } 0 \leq x \leq 1/2n, \\ 2n(1-nx) & \text{si } 1/2n < x \leq 1/n, \\ 0 & \text{si } 1/n < x \leq 1. \end{cases}$$

   ¿Se obtiene la igualdad al intercambiar los signos " lím" y "$\int$"?

   Justificarlo y compararlo con el ejemplo página 5 de la lección 1.

Ejercicio 5 — T.C.D.L.

Mostrar que los límites siguientes existen y calcular el valor de cada uno de ellos

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{\cos(x/n)}{1+x^2} dx$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 x^n e^{-nx} dx$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx$

Ejercicio 6 — Funciones definidas por integrales

Sea $f \in \mathcal{I}(\mathbb{R}, \mathcal{B}or(\mathbb{R}), \lambda, \mathbb{R})$ una función integrable y sea $g(x) = \int_0^x f(t)d\lambda(t)$.

1. Mostrar que g es una función continua.
2. Si $f \in \mathcal{I}(\mathbb{R}, \delta_2, \mathbb{R})$ y si $g(x) = \int_0^x f(t)d\delta_2(t)$, ¿Se tiene que la función g es continua?

Ejercicio 7 — Teoremas de Continuidad y Derivación

1. Sea $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ una función integrable y sea $f(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} g(x)dx$ una nueva función.
   a) Mostrar que f está bien definida.
   b) Mostrar que f es infinitamente derivable y calcular su derivada n-ésima.
2. Para todo $x, t > 0$ definimos $f(t,x) = \frac{e^{-x} - e^{-tx}}{x}$.
   a) Mostrar que para todo $t > 0$ la función $x \longmapsto f(t,x)$ es λ-integrable sobre $\mathbb{R}_+$.
   Para $t > 0$ definimos $F(t) = \int_0^{+\infty} f(t,x)dx$.
   b) Mostrar que $F(t)$ es continua sobre $]0, +\infty[$.
   c) Mostrar que $F(t)$ es derivable sobre $]0, +\infty[$.
   d) Calcular $F(t)'$ y deducir el valor de $F(t)$ para todo $t > 0$.
3. Sea $f(t) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 e^{-tx} dx$.
   a) Mostrar que f es continua sobre $[0, +\infty[$.
   b) Verificar que f es derivable sobre $]0, +\infty[$.
   c) Mostrar que f es dos veces derivable sobre $]0, +\infty[$ y calcular $f''(t)$ para todo $t > 0$.

Ejercicio 8 — Secciones

Sean los puntos del plano real $a_1 = (3/2, 1/2)$, $a_2 = (2, 1)$, $a_3 = (3/2, 3/2)$, $a_4 = (1, 1)$ y sea E el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ que se obtiene al juntar estos puntos con rectas.

1. Calcular E^y y E^x
2. Definimos $f(x,y) = \mathbb{1}_E(x,y)$, calcular $f^y(x)$ y $f_x(y)$.
3. Calcular $\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy$.

Ejercicio 9 — Volúmen de la Bola Unidad de $\mathbb{R}^n$

Designaremos por $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\}$ la bola unidad cerrada de $\mathbb{R}^n$ y notaremos Υ_n su volúmen.

1. Mostrar que la función $\mathbb{1}_{B^n}(x)$ es integrable con respecto a la medida producto.
2. Verificar que se tiene la identidad $\lambda_{n-1}(\overline{B}(0, \sqrt{1-x_k^2})) = (1-x_k^2)^{(n-1)/2}\Upsilon_{n-1}$.
3. Mostrar la fórmula
$$\Upsilon_n = \Upsilon_{n-1} I_{n-1}$$
   en donde hemos notado $I_n = \int_{-1}^1 (1-x^2)^{n/2} dx$ para todo $n \geq 0$.
4. Calcular I_0 y I_1.
5. Verificar que se tiene $I_n = \frac{n}{n+1} I_{n-2}$ para $n \geq 2$.
6. Demostrar la fórmula
$$\Upsilon_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}.$$