Ejercicios Lección n°6: Espacios de Lebesgue

EPN, verano 2009

Ejercicio 1 — Condiciones

Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido, sea $A \in \mathscr{A}$ y sea $f(x) = \mathbb{1}_A(x)$.

1. ¿Bajo qué condiciones sobre el conjunto A se tiene $\|f\|_{L^\infty} = 0$ o $\|f\|_{L^\infty} = 1$?
2. ¿Bajo qué condiciones sobre el conjunto A se tiene $\|f\|_{L^p} < +\infty$ para $0 < p < +\infty$?

Ejercicio 2 — Algebra de Banach

1. Mostrar que el espacio de Lebesgue $L^\infty(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ dotado de la norma $\|\cdot\|_{L^\infty}$ y del producto usual de funciones es una álgebra de Banach.
2. ¿Se mantiene este resultado si consideramos los espacios $L^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ con $1 \leq p < +\infty$?

Ejercicio 3 — Producto

Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido σ-finito y sea $1 \leq p < +\infty$ un real. Si f, g son dos funciones del espacio $L^{2p}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ mostrar que el producto fg pertenece al espacio $L^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ y que se tiene la estimación

$$\|fg\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^{2p}}\|g\|_{L^{2p}}.$$

Ejercicio 4 — Desigualdades de interpolación

1. Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido y sea $\theta \in [0, 1]$ un parámetro real. Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ una función medible tal que $f \in L^{p_0}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ y $f \in L^{p_1}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$. Mostrar entonces que f pertenece al espacio $L^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ en donde θ, p, p_0 y p_1 están ordenados como sigue $1 \leq p_0 \leq p \leq p_1 < +\infty$ y están relacionados por la condición $p = \theta p_0 + (1-\theta)p_1$. Indicación: mostrar que se tiene la estimación:
$$\|f\|_{L^p}^p \leq \|f\|_{L^{p_0}}^{\theta p_0}\|f\|_{L^{p_1}}^{(1-\theta)p_1}.$$
2. Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido y sea $\theta \in [0, 1]$ un parámetro real. Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ una función medible tal que $f \in L^{p_0}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ y $f \in L^{p_1}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$. Mostrar entonces que f pertenece al espacio $L^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ en donde θ, p, p_0 y p_1 están ordenados como sigue $1 \leq p_0 \leq p \leq p_1 \leq +\infty$ y están relacionados por la condición $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_0} + \frac{1-\theta}{p_1}$. Indicación: mostrar que se tiene la estimación:
$$\|f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^{p_0}}^{\theta}\|f\|_{L^{p_1}}^{1-\theta}.$$
3. ¿Qué diferencias encuentra entre estos dos resultados? De un ejemplo.
4. Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido y sea $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ una función que pertenece a los espacios $L^1(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ y $L^\infty(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$. Muestre que $f \in L^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ para todo $p \in]1, +\infty[$ y que se tiene la estimación
$$\|f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1} + \|f\|_{L^\infty}$$
Moraleja: si una función f pertenece simultáneamente a los espacios L^{p_0} y L^{p_1} entonces f pertenece a *todos* los espacios de Lebesgue L^p intermedios.

Ejercicio 5 — Límite

Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido y sea una función $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ que pertenece a algún espacio $L^r(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ con $r < +\infty$. Mostrar que se tiene el límite

$$\lim_{p \to +\infty} \|f\|_{L^p} = \|f\|_{L^\infty}.$$

Ejercicio 6 — Continuidad

Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido y sea $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ una función $\mathscr{A}$-medible. Mostrar que el conjunto determinado por $I(f) = \{p \in [1, +\infty] : \|f\|_{L^p} < +\infty\}$ es o vacío, o un punto, o un intervalo. En el caso en que sea un intervalo verificar que $\varphi_f(t) = \|f\|_{L^p}$ es una función continua de p en el interior de este intervalo.

Ejercicio 7 — Desigualdad de Minkowski continua

Sean $(X, \mathscr{A}, \mu)$ y $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ dos espacios medidos. Sea $f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{K}$ una función medible y sea $1 \leq p < +\infty$ un índice real. Mostrar que se tiene la estimación

$$\left(\int_X \left(\int_Y |f(x,y)| d\nu(y)\right)^p d\mu(x)\right)^{1/p} \leq \int_Y \left(\int_X |f(x,y)|^p d\mu(x)\right)^{1/p} d\nu(y).$$

Ejercicio 8 — Inversiones en las desigualdades

1. Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido, sea $0 < p < 1$ un índice real y sea $q < 0$ el conjugado armónico de p. Mostrar que, para todas dos funciones $f, g : X \longrightarrow \mathbb{K}$ tales que el producto fg pertenezca al espacio $L^1(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ y tal que $g \neq 0$ en μ-casi todas partes, se tiene la relación entre funcionales:

$$\|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q} \leq \|fg\|_{L^1}$$

2. Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido, sea $0 < p < 1$ un número real y sean $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones tales que $f, g > 0$ $\mu-$c.t.p. Mostrar que se tiene la desigualdad

$$\|f + g\|_{L^p} \geq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

3. ¿Qué consecuencias tienen estas desigualdades sobre la estructura topológica de los espacios $L^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ con $0 < p < 1$? Su intuición será verificada en la siguiente pregunta.
4. Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido y sea $0 < p < 1$ un parámetro real. Mostrar que los espacios de Lebesgue $L^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ son espacios métricos completos dotados de la distancia

$$d_p(f, g) = \int_X |f(x) - g(x)|^p d\mu(x).$$

5. Mostrar que estos espacios no son por lo general normables.

Ejercicio 9 — Espacios discretos

Definimos el espacio $c_{00}(X)$ como el conjunto de sucesiones nulas a partir de un cierto rango y notamos $c(X)$ el conjunto de sucesiones convergentes $c(X) = \{(a_n)_{n \in X} : \lim\limits_{|n| \to +\infty} a_n \text{ existe}\}$.

1. Mostrar que se tienen las inclusiones estrictas

$$c_{00}(X) \subsetneq \ell^1(X) \subsetneq \ell^p(X) \subsetneq c_0(X) \subsetneq c(X) \subsetneq \ell^\infty(X).$$

2. Diremos que una sucesión $a = (a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ a valores en $\mathbb{R}$ es de *decrecimiento rápido* si para todo $k \in \mathbb{N}$ la sucesión $(n^k a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ es un elemento de $c_0(\mathbb{Z})$.
   Si la sucesión $a = (a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ es a decrecimiento rápido, ¿a cuál de los espacios de la pregunta anterior pertenece esta sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$?