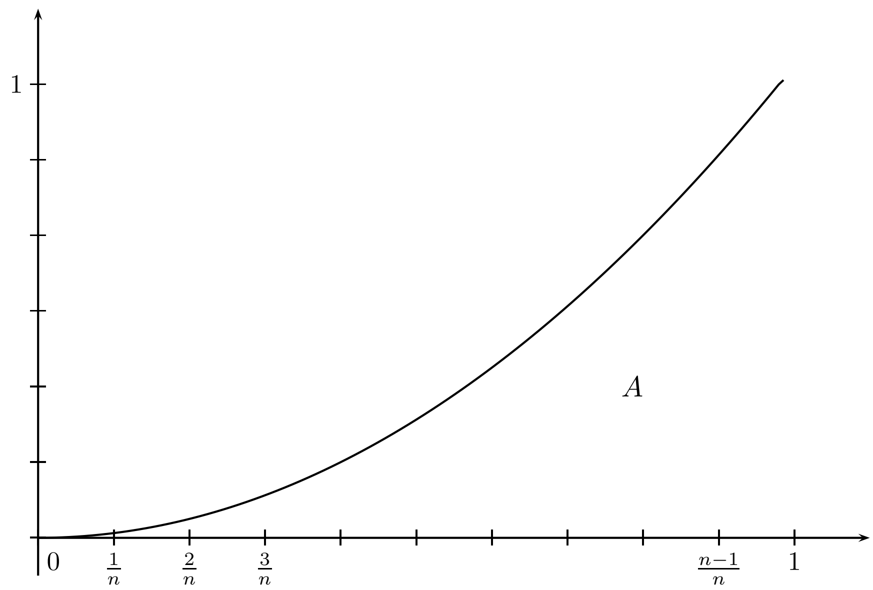
Lección n°1: Integral y sumas de Riemann, problemas y limitaciones

EPN, verano 2009

1. Arquímedes de Siracusa (-287 A.C.; -212 A.C.)

Problema: medir el área A bajo la curva $f(x) = x^2$ con $x = [0, 1]$.



¿Qué sabemos medir fácilmente? Rectángulos : $Area(\text{Rectángulo}) = base \times altura$.

Idea de Arquímedes: aproximar el área A por pequeños rectángulos:
dividimos el intervalo $[0, 1]$ en n pequeños subintervalos de longitud $1/n$ (es la base de los rectángulos):

$$b_1 = [0, 1/n[,\ b_2 = [1/n, 2/n],...,\ b_i = [(i-1)/n, i/n],\ b_n = [(n-1)/n, 1],$$

y de altura $h_i = f\left(\frac{i}{n}\right) = \frac{i^2}{n^2}$, con $i = 1, ..., n$.

De esta forma se tiene una primera aproximación

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} b_i \times h_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \times \frac{i^2}{n^2} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Si hacemos $n \to +\infty$, la aproximación es cada vez mejor y en el límite se tiene

$$A = \lim_{n \to +\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{3}$$

Verificación inmediata $\int_0^1 x^2 dx = 1/3$!

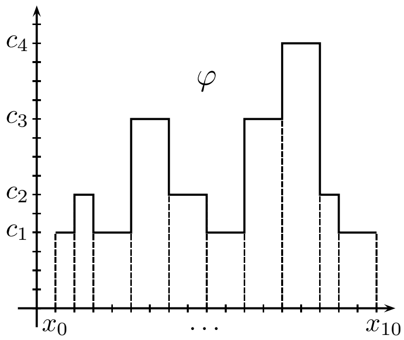
Limitación: ¿Cómo medir funciones más complicadas?

2. Bernhard Riemann (1826-1866)

Idea de Riemann: básicamente la misma, pero empezamos por *funciones escalonadas.*

A) Integral de funciones escalonadas

Diremos que una función $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es *escalonada* si existe una subdivisión $P = \{x_0, ..., x_n\}$ con $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ tal que, para todo $i \in \{1, ..., n\}$, φ es constante (digamos igual a c_i) sobre $]x_{i-1}, x_i[$. Hablaremos de δ-*subdivisión* si la distancia entre cada unos de los puntos $\{x_0, ..., x_n\}$ es constante e igual a δ.



La integral de este tipo de función está entonces dada por la expresión:

$$\boxed{\int_a^b \varphi(x)dx = \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1}).} \tag{1}$$

Lo que corresponde geométricamente a recubrir el área bajo la curva de φ por medio de rectángulos, de base $(x_i - x_{i-1})$ y de altura las cantidades c_i, para finalmente sumar el área de cada uno de estos rectángulos.

B) Integral de funciones generales

Sea $[a, b]$ un intervalo si $P = \{x_0, ..., x_n\}$ y $P' = \{y_0, ..., y_m\}$ son dos subdivisiones de este intervalo diremos que P' es un *refinamiento* de la subdivisión P si cada punto de P pertenece a P'.

Sea f una función acotada definida sobre $[a, b]$. Si P es una subdivisión de $[a, b]$ definimos para cada intervalo de la subdivisión las cantidades

$$m_i = \text{ínf}\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \quad \text{y} \quad M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \quad \text{con } i = 1, ..., n.$$

Podemos entonces formar las sumas *superiores* e *inferiores* correspondientes a f y P escribiendo

$$\boxed{s(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})} \quad \text{y} \quad \boxed{i(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}).}$$

Se tiene entonces la estimación $i(f, P) \leq s(f, P)$.

Si P_2 es un refinamiento de P_1 entonces

$$i(f, P_1) \leq i(f, P_2) \leq \cdots \leq s(f, P_2) \leq s(f, P_1).$$

Observación 1

1. el supremo de las sumas inferiores notado $\int_a^{\overline{b}} f(x)dx$ es acotado por cada una de las sumas superiores
2. el ínfimo de las sumas superiores notado $\int_{\underline{a}}^b f(x)dx$ es acotado por cada una de las sumas inferiores

- Diremos que una función f es **Riemann-integrable** si se tiene la identidad

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

- El valor común se denomina la **integral de Riemann** de la función f sobre $[a,b]$ y es notado $\int_a^b f(x)dx$.

- Una función $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es **Riemann-integrable** si, para todo $\varepsilon > 0$, existen dos funciones escalonadas φ y ψ tales que:

$$\boxed{\varphi(x) < f(x) < \psi(x) \text{ para todo } x \in [a,b] \quad \text{y} \quad \int_a^b (\psi - \varphi)(x)dx < \varepsilon.}$$

Esta fórmula, conocida como el *criterio de Darboux*, significa que una función es Riemann-integrable si puede ser aproximada inferiormente y superiormente por funciones escalonadas.

Observación 2 Las funciones Riemann-integrables deben ser *acotadas*.

Sumas de Riemann

Sea f una función acotada definida sobre $[a,b]$ y sea $P_\delta = (x_i)_{1\leq i\leq n}$ una δ-subdivisión de $[a,b]$. Definimos la **Suma de Riemann** de f asociada a la subdivisión P_δ por

$$\boxed{R(f,P_\delta) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}), \quad c_i \in [x_{i-1}, x_i[}$$

por construcción se tiene $i(f,P_\delta) \leq R(f,P_\delta) \leq s(f,P_\delta)$ y si f es Riemann-integrable entonces se tiene

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta\to 0} R(f,P_\delta)}$$

Utilidad de las sumas de Riemann: "Resolver" sumas feas por medio de integrales!

Ejemplo: demostrar que se tiene la identidad

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n^2+i^2} = \frac{\pi}{4}$$

Observamos que

$$\frac{n}{n^2+i^2} = \frac{1}{n}\,\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2} = \frac{1}{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \qquad \text{con } f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Entonces

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n^2+i^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \qquad \text{es una suma de Riemann para la función } f$$

De manera que se tiene

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n^2+i^2} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}$$

Propiedades de la integral de Riemann

A) Linealidad, Crecimiento, Chasles

- Si f, g son dos funciones Riemann-integrables sobre $[a, b]$ y si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ entonces

$$\boxed{\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx}$$

- Si f, g son dos funciones Riemann-integrables tales que, para todo $x \in [a, b]$ se tiene $f(x) \leq g(x)$, entonces

$$\boxed{\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx}$$

- Si $a < c < b$ entonces se tiene la relación de Chasles

$$\boxed{\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx}$$

B) Limite uniforme

Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones Riemann-integrables definidas sobre $[a, b]$ a valores en $\mathbb{R}$ que convergen **uniformemente** sobre $[a, b]$ hacia una función f. Entonces

1. f es Riemann-integrable
2. Se tiene la identidad $$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \to +\infty} f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx}$$

Idea demostración:

1. - $f_n \longrightarrow f$ uniformemente: para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$, tq. para todo $n \geq N$:

$$\sup_{x \in [a,b]} |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$$

   - sea $n \geq N$: f_n Riemann-integrable $\Longrightarrow$ existen $\varphi_n < f_n < \psi_n$ funciones escalonadas tq.

$$\int_a^b \psi_n(x) - \varphi_n(x) dx \leq \varepsilon$$

   - se tiene entonces $|f(x) - \varphi_n(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - \varphi_n(x)| \leq \varepsilon + |\psi_n(x) - \varphi_n(x)|$ e integrando

$$\int_a^b |f(x) - \varphi_n(x)| dx \leq \varepsilon(b - a) + \varepsilon$$

$$\Longrightarrow f \text{ es Riemann-integrable.}$$

2. para todo $\varepsilon > 0$ y para todo $n \geq N$:

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b f_n(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)| dx \leq \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - f_n(x)| \int_a^b dx \leq \varepsilon(b - a)$$

$$\Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

■

Limitaciones de la integral de Riemann

A) Algunas funciones naturales no son Riemann-integrables

Si $A = [a, b] \subset [0, 1]$ entonces

$$\int_0^1 \mathbb{1}_A(x)dx = b - a.$$

Si el conjunto A es apenas más complicado, digamos por ejemplo $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$, la función $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ no es una función Riemann-integrable!

B) El espacio de funciones Riemann-integrables no es completo

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones Riemann-integrables, el límite $f = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n$ no es necesariamente Riemann-integrable.

Ejemplo: sea (r_n) una enumeración de los racionales de $[0, 1]$, entonces $\mathbb{1}_{R_n}$ con $R_n = \{r_1, r_2, ..., r_n\}$ es Riemann-integrable y se tiene $\int_a^b \mathbb{1}_{R_n}(x)dx = 0$ para todo n.

Pero $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{1}_{R_n}(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x)$ ...que no es Riemann-integrable por el punto anterior.

C) Mal comportamiento respecto al límite

Si suponemos que el límite f de una sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es Riemann-integrable, tampoco se tiene siempre la identidad

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx.$$

Para poder intercambiar los signos "lím" y "$\int$" es necesario que la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converja uniformemente hacia f.

$$\boxed{\text{Es una condición muy fuerte de carácter métrico!}}$$

Ejemplo: sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales, definimos sobre $[0, 1]$ una sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a valores reales escribiendo:

$$f_n(x) = \begin{cases} 2na_n x & \text{si } 0 \leq x \leq 1/2n, \\ 2a_n(1 - nx) & \text{si } 1/2n < x \leq 1/n, \\ 0 & \text{si } 1/n < x \leq 1. \end{cases}$$

Esta sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplemente hacia 0 para toda sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y converge uniformemente si y solo si la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge hacia 0. Además, tenemos que

$$\int_0^1 f_n(x)dx = a_n/2n$$

y la sucesión de las integrales de las funciones f_n converge hacia 0 si y solo si la sucesión (a_n/n) tiende hacia 0, que es una condicion más débil que la anterior.

$\Longrightarrow$ Si $a_n = 2n$ para todo $n \geq 1$ entonces $\int_0^1 f_n(x)dx = 1$ y $\int_0^1 \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)dx = 0$.

¿Cómo remediar de forma inteligente estos problemas de la integral de Riemann?

Queremos una integral tal que:

- permita "medir" funciones más generales (conjuntos raros del tipo $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$)
- el conjunto de funciones integrables sea completo
- proporcione condiciones sencillas para intercambiar los símbolos "lím" y "$\int$"

3. Henri Lebesgue (1875-1941)

Idea de Lebesgue: la misma, pero al revés!! El punto de partida son las funciones *simples*:

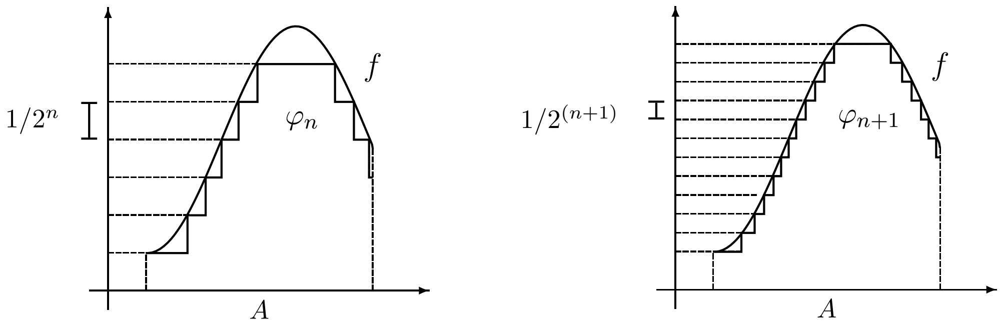


Figura 1: Aproximación por funciones simples

La aproximación se basa en las imágenes recíprocas.

Para $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definimos los conjuntos $A_{n,k} = \{x \in A : (k-1)/2^n \leq f(x) < k/2^n\}$ y una sucesión $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ de funciones definidas sobre $\mathbb{R}$ exigiendo que φ_n tome el valor $(k-1)/2^n$ en cada punto de $A_{n,k}$ para todo $k = 1, ..., n2^n$ y que tome el valor n en cada punto de $\mathbb{R} \setminus \cup_k A_{n,k}$.

Vemos que estas funciones verifican $f = \lim\limits_{n\to+\infty} \varphi_n$.

Observación 3 La altura de estos rectángulos es fácilmente determinable: $k = 1, ..., n2^n$, pero es por lo general muy difícil calcular la "medida" de los conjuntos $A_{n,k}$.

Veremos que esta integral

- contiene más funciones: hay muchas más funciones Lebesgue-integrables que funciones Riemann-integrables
- es más general: toda función Riemann-integrable es Lebesgue-integrable
- es completa: el espacio de funciones de modulo Lebesgue-integrables es completo
- se aplica a muchas situaciones: no solo a $\mathbb{R}$, sino también a espacios topológicos generales
- tiene teoremas de paso al límite fáciles de verificar

$*$ Precio a pagar $*$

Es necesario describir correctamente la manera en que vamos a asignar una "medida" a los conjuntos de base y esto puede ser delicado.