**Lección n°2: $\sigma$-álgebras y medidas**

EPN, verano 2009

# 1. Propiedades básicas de las medidas

- **Marco de trabajo**: la recta real $\mathbb{R}$ (para empezar).
- **Conjuntos que deseamos medir**: los intervalos de la forma $(a, b)$ con $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ y $a, b \in \mathbb{R}$.
- **Base de todo cálculo**: si $I = (a, b)$ es un intervalo, entonces su longitud $\ell$ está dada por la fórmula

$$\boxed{\ell(I) = b - a}$$

$\Longrightarrow$ Si $I = [a, a]$, es decir si el intervalo $I$ es un punto, entonces su longitud es *nula*: $\ell(I) = 0$.

Interesante ¿verdad? hay (muchos) subconjuntos de $\mathbb{R}$ que tienen una longitud nula.

Evidentemente si el intervalo $I$ es vacío, su longitud es nula.

$\Longrightarrow$ Si $I_1 = [a, b[$ y si $I_2 = [b, c[$ con $a < b < c$, entonces $I = I_1 \cup I_2$ y se tiene $\ell(I) = \ell(I_1) + \ell(I_2)$.

En esto consiste el proceso cotidiano de *medir*: se considera un conjunto patrón de medida fijada (por ejemplo el intervalo $[0, 1]$ que fijamos de medida igual a 1) y se cuenta cuántas veces se tiene este conjunto en el intervalo que se desea medir.

Si $I$ y $J$ son intervalos disjuntos entonces $\ell(I \cup J) = \ell(I) + \ell(J)$.

**Si queremos generalizar a una aplicación general $\mathfrak{m}$ retendremos estos dos últimos puntos:**

$$\mathfrak{m}(\emptyset) = 0 \quad \text{y} \quad \text{si } A \cap B = \emptyset \text{ entonces } \mathfrak{m}(A \cup B) = \mathfrak{m}(A) + \mathfrak{m}(B)$$

# 2. ¿Qué conjuntos medir?

Pero ¿en dónde "viven" $A$ y $B$? necesitamos precisar qué conjuntos medimos, es decir el **dominio de definición** de la aplicación $\mathfrak{m}$.

Esta etapa es muy importante:

asignaremos un "peso" o "medida" solamente a una clase muy particular de conjuntos!

Procederemos en dos etapas:

A) Considerando operaciones *finitas* $\Longrightarrow$ concepto de *álgebra de partes* $\mathcal{A}$ y de *función aditiva de conjuntos* $\mathfrak{m}$

B) Considerando operaciones *numerables* $\Longrightarrow$ concepto de *$\sigma$-álgebra* $\mathscr{A}$ y de *medida* $\mu$

## 2.1. Álgebra de partes

**Definición 1 (Álgebra de partes)** *Un subconjunto $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ es una álgebra de partes si:*

*1) El conjunto vacío $\emptyset$ y el conjunto $X$ pertenencen a $\mathcal{A}$.*

*2) $\mathcal{A}$ es estable al pasar al complementario: si $A \in \mathcal{A}$ entonces $A^c \in \mathcal{A}$.*

*3) $\mathcal{A}$ es estable por reunión finita y por lo tanto por intersección finita: si $A$ y $B$ pertenencen a $\mathcal{A}$, entonces $A \cup B$ y $A \cap B$ pertenencen a $\mathcal{A}$.*

**Observación 1** Un mismo conjunto puede estar dotado de *varias* álgebras de partes. Se dispone de una *relación de orden* dada por la inclusión entre las diferentes álgebras definidas sobre un mismo conjunto.

Ejemplo: Consideremos el conjunto $X = \{0, 1, 2, 3\}$ sobre el cual definimos $\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, \{0, 1\}, \{2, 3\}, X\}$, $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, \{0\}, \{1, 2, 3\}, X\}$, $\mathcal{A}_3 = \mathcal{P}(X)$. Tenemos así que $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}_3$ pero que $\mathcal{A}_1 \not\subset \mathcal{A}_2$ y $\mathcal{A}_2 \not\subset \mathcal{A}_1$.

### Ejemplos importantes

(i) El álgebra más grande definida sobre un conjunto $X$ es $\mathcal{P}(X)$ y la más pequeña $\{\emptyset, X\}$.

(ii) Consideremos ahora la recta real $\mathbb{R}$. Diremos que un conjunto $I$ pertenece al álgebra $\mathcal{A}$ si $I$ se puede escribir como una reunión finita de intervalos de la forma $(a, b)$.

(iii) Sea $(X_k)_{1\leq k\leq n}$ una familia finita de conjuntos y dotamos a cada $X_k$ de una álgebra de partes $\mathcal{A}_k$. Consideramos el espacio producto $X = \prod_k X_k$ y estudiamos la familia $\mathcal{F}$ formada por los *adoquines* definidos por $P = \prod_k A_k$ en donde cada $A_k$ es un elemento de $\mathcal{A}_k$. La familia $\mathcal{F}$ es entonces estable por intersección y reunión finita y el complementario de un adoquín puede escribirse como la unión finita de adoquines: $\mathcal{F}$ es por lo tanto una álgebra.

(iv) El ejemplo más importante de adoquines es sin duda el definido sobre $\mathbb{R}^n$ como el producto cartesiano de intervalos $(a_k, b_k)$:

$$A = \prod_{k=1}^{n} (a_k, b_k).$$

Un subconjunto $\Gamma$ de $\mathbb{R}^n$ será *adoquinable* si es una reunión finita de adoquines.

*

**Importancia** de las álgebras de conjuntos:

$\Longrightarrow$ servir de dominio de definición a las funciones aditivas de conjuntos.

## 2.2. Función aditiva de conjuntos

**Definición 2 (Función aditiva de conjuntos)** *Sean $X$ un conjunto y $\mathcal{A}$ una álgebra sobre $X$. Una función positiva aditiva de conjuntos sobre $(X, \mathcal{A})$ es una aplicación*

$$\mathfrak{m} : \mathcal{A} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$$

*que verifica las dos propiedades siguientes*

*1) $\mathfrak{m}(\emptyset) = 0$;*

*2) para todo $A$ y $B$ en $\mathcal{A}$ se tiene la implicación*

$$A \cap B = \emptyset \quad \Longrightarrow \mathfrak{m}(A \cup B) = \mathfrak{m}(A) + \mathfrak{m}(B).$$

*Diremos además que $\mathfrak{m}$ es* finita *si $\mathfrak{m}(X) < +\infty$, este número se llama entonces la* masa total *de $\mathfrak{m}$.*

### Ejemplos importantes

(i) Sea un conjunto $X$ que posee un número finito de elementos y sea $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$, entonces

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{m}_{(i)} : \mathcal{P}(X) & \longrightarrow & [0, +\infty] \\ A & \longmapsto & Card(A) \end{array} \quad \text{es una función aditiva de conjuntos}$$

(ii) Sea $X = \mathbb{R}$ y sea $\mathcal{A}$ el álgebra definida por la reunión finita de intervalos. Sea $I \in \mathcal{A}$ expresado como la unión disjunta de intervalos $I = \bigcup_{i=1}^{n}(a_i, b_i)$.

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{m}_{(ii)} : \mathcal{A} & \longrightarrow & [0, +\infty] \\ I & \longmapsto & \ell(I) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} b_i - a_i \end{array} \quad \text{y } \ell \text{ es una función aditiva de conjuntos}$$

(iii) Sea $X = \mathbb{R}^n$ y sea $\mathcal{A}$ el álgebra formada por los adoquines de $\mathbb{R}^n$. Si $A = \prod_{k=1}^{n}(a_k, b_k)$ es un adoquín de $\mathbb{R}^n$ su *volúmen* está dado por el producto

$$vol(A) = \prod_{k=1}^{n}(b_k - a_k).$$

Si $\Gamma$ es un conjunto adoquinable, expresado como la unión finita de adoquines disjuntos $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{N} A_i$ definimos entonces

$$\begin{array}{rcl} vol : \mathcal{A} & \longrightarrow & [0, +\infty] \\ \Gamma & \longmapsto & vol(\Gamma) = \displaystyle\sum_{j=1}^{N} vol(A_j) \end{array} \quad \text{y } vol \text{ es una función aditiva de conjuntos}$$

### Propiedades de las funciones aditivas de conjuntos

Sea $X$ un conjunto, sea $\mathcal{A}$ una álgebra sobre $X$ y sea $\mathfrak{m} : \mathcal{A} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ una función aditiva de conjuntos.

1) si $A$ y $B$ pertenecen a $\mathcal{A}$ con $A \subset B$, tenemos la mayoración

$$\mathfrak{m}(A) \leq \mathfrak{m}(B) \qquad \text{(crecimiento)},$$

2) si $A_1, ..., A_n$ son elementos de $\mathcal{A}$ dos a dos disjuntos entonces se tiene la igualdad

$$\mathfrak{m}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{m}(A_i) \qquad \text{(aditividad fina)},$$

3) para todo $A$ y $B$ pertenecientes a $\mathcal{A}$ se tiene

$$\mathfrak{m}(A \cup B) + \mathfrak{m}(A \cap B) = \mathfrak{m}(A) + \mathfrak{m}(B) \quad \text{(aditividad fuerte)}.$$

**Utilidad de las funciones aditivas de conjuntos $\mathfrak{m}$ y de las álgebras de partes $\mathcal{A}$:**

- Los conjuntos que deseamos “medir” son claramente reconocibles. Pertenecen al álgebra de partes $\mathcal{A}$ y están determinados por operaciones de conjuntos *finitas*.
- Simplicidad en la definición de la aplicación $\mathfrak{m}$, las propiedades *naturales* de las “medidas” son explícitas.
- Permitirán construir verdaderas medidas con la teoría que vamos a desarrollar.

**Limitaciones:** vivimos en un mundo *finito*!

# 3. Medidas y $\sigma$-álgebras

**Dos tipos de infinito**

- Decimos que un conjunto $X$ es de cardinal *numerable* si existe una biyección de $X$ sobre una parte de $\mathbb{N}$.
- Si el cardinal de $X$ es comparable a $\mathbb{R}$ diremos que es de cardinal *no numerable.*

Ejemplos: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N}^n$, $\mathbb{Z}^n$ y $\mathbb{Q}^n$ son numerables, pero $[0,1]$, $\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ y $\mathbb{R}$ no son numerables.

Moraleja: operaciones numerables *OK*, operaciones no numerables *cuidado.*

## 3.1. $\sigma$-álgebras

**Importancia:** Es la noción de $\sigma$-álgebra la que determina qué conjuntos son *medibles.*

**Definición 3 ($\sigma$-álgebra, conjunto medible)** *Un subconjunto $\mathscr{A}$ de $\mathcal{P}(X)$ es una $\sigma$-álgebra (o tribu) si*

*1) los conjuntos $\emptyset$ y $X$ pertenecen a $\mathscr{A}$,*

*2) si $A \in \mathscr{A}$, entonces $A^c \in \mathscr{A}$,*

*3) para toda familia numerable $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\mathscr{A}$ tenemos*

$$\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathscr{A} \quad y \quad \bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathscr{A}.$$

*Un conjunto $X$ dotado de una $\sigma$-álgebra $\mathscr{A}$ será llamado* espacio medible *y será notado $(X, \mathscr{A})$. Los elementos de la $\sigma$-álgebra $\mathscr{A}$ serán denominados* conjuntos $\mathscr{A}$-medibles.

$\Longrightarrow$ Toda $\sigma$-álgebra es una álgebra pero que no se tiene la recíproca.

$\Longrightarrow$ Toda álgebra que posee un número finito de elementos es una $\sigma$-álgebra.

**Observación 2** Existe una relación de orden entre las $\sigma$-álgebras definida por la inclusión: $\mathscr{A}$ está *contenida* en $\mathscr{B}$ y lo notaremos $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}$ si todo elemento $A \in \mathscr{A}$ pertenece a $\mathscr{B}$. La $\sigma$-álgebra más grande está dada por $\mathcal{P}(X)$ y la más pequeña por $\{\emptyset, X\}$.

**Proposición 1** *Sea $(\mathscr{A}_i)_{i\in I}$ una familia de $\sigma$-álgebras definidas sobre un conjunto $X$. Entonces su intersección*

$$\bigcap_{i\in I} \mathscr{A}_i = \{A \in \mathcal{P}(X) : A \in \mathscr{A}_i, \text{ para todo } i \in I\} \qquad \text{es una } \sigma\text{-álgebra.}$$

**Prueba.**

- $X$ y $\emptyset$ pertenecen a $\bigcap_{i\in I} \mathscr{A}_i$,
- si $A \in \mathscr{A}_i$ para todo $i \in I$ se tiene que $A^c \in \bigcap_{i\in I} \mathscr{A}_i$,
- De manera similar se obtiene la propiedad de estabilidad por intersección y reunión numerables.

■

**Observación 3** La reunión de una familia de $\sigma$-álgebras no es en general una $\sigma$-álgebra.

*

**Problema:** Sea $\mathcal{K}$ una colección de conjuntos simpáticos que queremos que sean medibles.

¿Cómo encontrar una $\sigma$-álgebra que contenga todos estos conjuntos?

**Teorema 1 ($\sigma$-álgebra engendrada)** *Sea $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(X)$ un conjunto cualquiera de partes de $X$. La intersección de todas las $\sigma$-álgebras que contienen $\mathcal{K}$ es una $\sigma$-álgebra que se denomina la $\sigma$-*álgebra engendrada *por $\mathcal{K}$, que notaremos $\sigma(\mathcal{K})$. Es la más pequeña $\sigma$-álgebra que contiene $\mathcal{K}$.*

**Prueba.** Sea $\mathcal{C}$ la colección de todas las $\sigma$-álgebras sobre $X$ que contienen $\mathcal{K}$.

- $\mathcal{C} \neq \emptyset$: $\mathcal{P}(X) \in \mathcal{C}$.
- La intersección $\sigma(\mathcal{K})$ de todas las $\sigma$-álgebras de $\mathcal{C}$ es una $\sigma$-álgebra que contiene $\mathcal{K}$.
- $\sigma(\mathcal{K})$ está contenida en todas las $\sigma$-álgebras que contienen $\mathcal{K}$, es por lo tanto la más pequeña $\sigma$-álgebra que contiene $\mathcal{K}$.

■

La estructura de espacio medible $(X, \mathscr{A})$ es muy general y es importante disponer de otro tipo de estructuras.

¿Cómo hacer para juntar una estructura de espacio medible con una estructura de espacio topológico?

**Definición 4 ($\sigma$-álgebra Boreliana)** *Sea $X$ un espacio topológico. La $\sigma$-álgebra engendrada por los abiertos de $X$ se llama la $\sigma$-álgebra Boreliana de $X$ y será notada $\mathcal{B}or(X)$. Llamaremos un* conjunto boreliano *de un espacio topológico $X$ todo elemento de la $\sigma$-álgebra Boreliana $\mathcal{B}or(X)$.*

Ejemplos de Borelianos para el caso especial $X = \mathbb{R}$ o $X = \mathbb{R}^n$

(i) El conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ y el conjunto de los enteros relativos $\mathbb{Z}$ son conjuntos borelianos de $\mathcal{B}or(\mathbb{R})$ puesto que se escriben como una reunión numerable de cerrados.

(ii) El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ así como el conjunto $\mathbb{Q}^n$ son conjuntos borelianos.

(iii) Los complementarios de estos conjuntos anteriores son igualmente borelianos. En particular el conjunto de los números irracionales $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es un conjunto boreliano.

(iv) Podemos decir que *casi casi* todo subconjunto de $\mathbb{R}^n$ interesante es un conjunto boreliano.

(v) Veremos que existen subconjuntos de $\mathbb{R}$ que *no* son Borelianos.

Veremos que la noción de $\sigma$-álgebra posee propiedades muy interesante, pero presenta un inconveniente:

$$\boxed{\text{Toda } \sigma\text{-álgebra infinita } \mathscr{A} \text{ definida sobre un conjunto infinito } X \text{ es no numerable.}}$$

Esto implica que es imposible en la mayoría de casos útiles tratar de describir completamente una $\sigma$-álgebra.

## Propiedades de las $\sigma$-álgebras

**Proposición 2** *Sean $X, Y$ dos conjuntos y sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación.*
*La imagen recíproca de una $\sigma$-álgebra $\mathscr{B}$ definida sobre $Y$ determina una $\sigma$-álgebra $\mathscr{A}$ definida sobre $X$.*

**Prueba.** Tenemos que $\mathscr{A} = \{A = f^{-1}(B) : \ B \in \mathscr{B}\}$ y debemos comprobar que $(X, \mathscr{A})$ es un espacio medible.

- $\emptyset, Y \in \mathscr{B} \quad \Longrightarrow \quad f^{-1}(\emptyset) = \emptyset, \ f^{-1}(Y) = X \quad \Longrightarrow \quad \emptyset, X \in \mathscr{A}$
- $B, B^c \in \mathscr{B} \quad \Longrightarrow \quad f^{-1}(B) = A, \ f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c = A^c \quad \Longrightarrow \quad A, A^c \in \mathscr{A}$
- $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathscr{B} \quad \Longrightarrow \quad f^{-1}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(B_n) \quad \Longrightarrow \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}$

■

**Proposición 3** *Sea $f : X \longrightarrow Y$ y sea $\mathscr{A}$ una $\sigma$-álgebra definida sobre $X$. El conjunto de las partes $B$ de $Y$ tales que $f^{-1}(B) \in \mathscr{A}$ es una $\sigma$-álgebra sobre $Y$ llamada la* $\sigma$-álgebra inducida *de $\mathscr{A}$ por la aplicación $f$.*

**Prueba.** Sea $\mathscr{B} = \{B \in \mathcal{P}(Y) : f^{-1}(B) \in \mathscr{A}\}$, mostremos que $(Y, \mathscr{B})$ es un espacio medible.

- $\emptyset, Y \in \mathscr{B}$
- Sea $B \in \mathscr{B}$ tq $f^{-1}(B) = A \in \mathscr{A} \Longrightarrow (f^{-1}(B))^c = A^c \in \mathscr{A}$. Como $(f^{-1}(B))^c = f^{-1}(B^c) \Longrightarrow B^c \in \mathscr{B}$
- Si $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{B} \Longrightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(B_n) = f^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) \Longrightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathscr{B}$.

$\blacksquare$

**Proposición 4** *Sea $f : X \longrightarrow Y$ y sea $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(Y)$. Entonces $f^{-1}(\sigma(\mathcal{K})) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{K}))$.*

**Prueba.**

i) $f^{-1}(\sigma(\mathcal{K})) \supset \sigma(f^{-1}(\mathcal{K}))$.
  - $f^{-1}(\sigma(\mathcal{K}))$ es una $\sigma$-álgebra sobre $X$ que contiene $f^{-1}(\mathcal{K})$.
  - $\sigma(f^{-1}(\mathcal{K}))$ es la más pequeña $\sigma$-álgebra que contiene $f^{-1}(\mathcal{K}) \Longrightarrow f^{-1}(\sigma(\mathcal{K})) \supset \sigma(f^{-1}(\mathcal{K}))$.

ii) $f^{-1}(\sigma(\mathcal{K})) \subset \sigma(f^{-1}(\mathcal{K}))$.
  - Sea $\mathscr{C}$ la $\sigma$-álgebra sobre $Y$ inducida por $f$ de $\sigma(f^{-1}(\mathcal{K}))$: $\quad \{C \in \mathcal{P}(Y) : f^{-1}(C) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{K}))\}$.
  - $\mathscr{C}$ contiene $\mathcal{K}$ y en particular $\sigma(\mathcal{K}) \Longrightarrow f^{-1}(\sigma(\mathcal{K})) \subset f^{-1}(\mathscr{C}) \subset \sigma(f^{-1}(\mathcal{K}))$.

$\blacksquare$

## 3.2. Medidas

Aquí es donde las cosas se ponen interesantes y empezamos a asignar un "peso" a los conjuntos medibles.

**Definición 5 (Medida, espacio medido)** *Sea $(X, \mathscr{A})$ un espacio medible. Una* ***medida*** *sobre $(X, \mathscr{A})$ es una función $\mu : \mathscr{A} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ que verifica*

*1) $\mu(\emptyset) = 0$,*

*2) para toda sucesión de elementos disjuntos $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{A}$:*

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

*Esta propiedad se llama la $\sigma$-aditividad de $\mu$.*

- *La tripla $(X, \mathscr{A}, \mu)$ se denomina* ***espacio medido.***
- *Para todo elemento $A$ de $\mathscr{A}$, la cantidad $\mu(A)$ es la* $\mu$-medida *de $A$.*
- *Si $A \in \mathscr{A}$ tal que $\mu(A) = 0$ diremos que $A$ es un conjunto de* $\mu$-medida nula
- *La* masa total *de una medida $\mu$ es la cantidad $\mu(X)$, si $\mu(X) < +\infty$ diremos que $\mu$ es* de masa total finita *o que la medida es* finita.
- *Si $\mu(X) = 1$, diremos que $(X, \mathscr{A}, \mu)$ es un* espacio probabilizado *y que la medida $\mu$ es una* medida de probabilidad. *Los conjuntos $A \in \mathscr{A}$ se llaman entonces* eventos.

Toda medida es una función aditiva de conjuntos.

## Ejemplos importantes

(i) **Medida gruesa**.
Sea $(X, \mathscr{A})$ un espacio medible, la medida gruesa asigna a cada conjunto no vacío de $\mathscr{A}$ el valor $+\infty$.

(ii) **Medida de Dirac en un punto $a$ de $X$**.
Es la medida definida sobre una $\sigma$-álgebra $\mathscr{A}$ por

$$\begin{array}{rcl} \delta_a : \mathscr{A} & \longrightarrow & \overline{\mathbb{R}}_+ \\ A & \longmapsto & \delta_a(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in A, \\ \\ 0 & \text{si } a \notin A. \end{cases} \end{array}$$

(iii) **Medida de conteo**.
Es la medida determinada por

$$\begin{array}{rcl} \mu : \mathcal{P}(X) & \longrightarrow & \overline{\mathbb{R}}_+ \\ A & \longmapsto & \mu(A) = \begin{cases} \mu(A) = Card(A) & \text{si} \quad Card(A) < +\infty, \\ \\ \mu(A) = +\infty & \text{sino.} \end{cases} \end{array}$$

(iv) **Medida de Lebesgue**.
Es la medida de referencia en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ y será notada por la letra $\lambda$ si $n = 1$ y $\lambda_n$ si $n > 1$. Corresponde a la generalización a las operaciones numerables de la longitud o del volúmen.

*

## Algunas definiciones

**Definición 6 (Medida $\sigma$-finita, Conjunto $\sigma$-finito con respecto a una medida)** *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido.*

*1) Una medida de conjuntos $\mu : \mathscr{A} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ es* $\sigma$**-finita** *si existe una sucesión numerable $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de la $\sigma$-álgebra $\mathscr{A}$ tales que*

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

*y tales que, para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene $\mu(A_n) < +\infty$.*

*2) Un conjunto $A \in \mathscr{A}$ es* $\sigma$**-finito** con respecto a la medida $\mu$ *si es la unión numerable de conjuntos de $\mathscr{A}$ de $\mu$-medida finita.*

- la medida gruesa no es $\sigma$-finita
- la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}$ es $\sigma$-finita.

**Observación 4** Cuando $\mu$ es $\sigma$-finita, podemos suponer que la sucesión $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente o que todos los conjuntos $A_n$ son disjuntos.

**Definición 7 (Medida atómica)** *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido. Decimos que $A \in \mathscr{A}$ es un* átomo *para $\mu$ si $\mu(A) > 0$ y si todo $B \subset A$ o tiene la misma medida que $A$ o es de medida nula.*

- *Una medida que admite átomos será llamada una* ***medida atómica****.*
- *Una medida es* ***no-atómica*** *si para todo $A \in \mathscr{A}$ de medida positiva y para todo $\beta$ tal que $0 < \beta < \mu(A)$, existe un subconjunto $B$ de $A$ tal que $\mu(B) = \beta$.*

- La medida de conteo sobre $\mathbb{N}$ es una medida atómica y todo conjunto de la forma $\{n\}$ es un átomo.
- La medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}^n$ es una medida no-atómica.

**Definición 8 (Medida inducida, restricción de medidas)** *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido.*

- *Si $Y \subset X$ es un subconjunto $\mathscr{A}$-medible de $X$. Definimos $\mathscr{A}_{|_Y} = \mathscr{A} \cap Y$ y una aplicación*

$$\begin{array}{rcl} \mu_{|_Y} : \mathscr{A}_{|_Y} & \longrightarrow & \overline{\mathbb{R}}_+ \\ A & \longmapsto & \mu_{|_Y}(A) = \mu(A \cap Y). \end{array}$$

  *La tripla $(Y, \mathscr{A}_{|_Y}, \mu_{|_Y})$ es un espacio medido y la medida $\mu_{|_Y}$ se denomina la **medida inducida** de $\mu$ sobre el conjunto $Y$.*

- *Además, si $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ son dos $\sigma$-álgebras tales que $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}$ y si $\mu : \mathscr{B} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ es una medida, entonces la **restricción** $\mu_{|_\mathscr{A}}$ a la $\sigma$-álgebra $\mathscr{A}$ determina una medida y la tripla $(X, \mathscr{A}, \mu_{|_\mathscr{A}})$ es un espacio medido.*

*

$\Longrightarrow$ Queremos estudiar el comportamiento de las medidas con respecto al límite de sucesiones de conjuntos.

**Definición 9** *Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos. Definimos el límite inferior y superior por*

$$\liminf_{n\to+\infty} A_n = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k \quad y \quad \limsup_{n\to+\infty} A_n = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k.$$

*Si $\limsup\limits_{n\to+\infty} A_n = \liminf\limits_{n\to+\infty} A_n$ escribiremos $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n$.*

**Teorema 2 (Continuidad de las medidas)** *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido.*

*1) Si $A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ es una sucesión creciente de elementos de $\mathscr{A}$ entonces*

$$\mu\left(\lim_{n\to+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n).$$

*2) Si $B_0 \supset B_1 \supset B_2 \supset \cdots$ es una sucesión decreciente de elementos de $\mathscr{A}$ y $\mu(B_0) < +\infty$ entonces*

$$\mu\left(\lim_{n\to+\infty} B_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(B_n).$$

*3) Para toda sucesión $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\mathscr{A}$ se tiene*

$$\mu\left(\liminf_{n\to+\infty} C_n\right) \leq \liminf_{n\to+\infty} \mu(C_n)$$

**Demostración.** Veamos el primer punto. Como $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente tenemos

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

Podemos entonces expresar esta unión $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ como una unión disjunta de conjuntos escribiendo

$$A_0 \cup \bigcup_{n=1}^{+\infty} (A_n \setminus A_{n-1});$$

luego, por la $\sigma$-aditividad de la medida obtenemos

$$\begin{aligned}
\mu(\lim_{n\to+\infty} A_n) &= \mu\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \mu(A_0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n \setminus A_{n-1}) \\
&= \lim_{k\to+\infty}\left(\mu(A_0) + \sum_{n=1}^{k} \mu(A_n \setminus A_{n-1})\right) \\
&= \lim_{k\to+\infty}\left(\mu\left(A_0 \cup \bigcup_{n=1}^{k} (A_n \setminus A_{n-1}\right)\right) = \lim_{k\to+\infty} \mu(A_k).
\end{aligned}$$

Lo que demuestra el primer punto.

El segundo punto es similar: sea ahora $A_0 = \emptyset$ y si definimos $A_n = B_0 \setminus B_n$ obtenemos una sucesión de conjuntos $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ creciente como en la primera parte. Dado que

$$\lim_{n\to+\infty} B_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n = B_0 \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

tenemos

$$\mu\left(\lim_{n\to+\infty} B_n\right) = \mu\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \mu\left(B_0 \setminus \bigcup_{n} A_n\right);$$

y puesto que $\mu(B_0) < +\infty$ podemos escribir

$$\begin{aligned}
\mu\left(B_0 \setminus \bigcup_{n} A_n\right) &= \mu(B_0) - \mu\left(\bigcup_{n} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty}(\mu(B_0) - \mu(A_n)) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \mu(B_0 \setminus A_n) = \lim_{n\to+\infty} \mu(B_n);
\end{aligned}$$

lo que nos da el segundo punto.

Obsérvese que la conclusión de esta propiedad puede ser falsa si la medida de los conjuntos $B_n$ es infinita. En efecto, sean $X = \mathbb{N}$, $\mu$ la medida de conteo sobre $\mathbb{N}$ y $B_n = \{k \in \mathbb{N} : k \geq n\}$ el conjunto de enteros mayores o iguales a $n$; entonces se tiene por un lado que $\mu(B_n) = +\infty$ para todo $n$ de manera que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mu(B_n) = +\infty$. Sin embargo, por otro lado, no es difícil ver que $\lim\limits_{n\to+\infty} B_n = \bigcap_n B_n = \emptyset$, de forma que $\mu(\lim\limits_{n\to+\infty} B_n) = 0$.

Para la última parte definimos $E_n = \bigcap_{k=n}^{+\infty} C_k$; entonces la sucesión $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente de conjuntos en $\mathscr{A}$ tal que

$$\bigcup_{n=0}^{+\infty} E_n = \liminf_{n\to+\infty} C_n.$$

Podemos usar el primer punto para obtener

$$\mu\left(\liminf_{n\to+\infty} C_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} E_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(E_n) \leq \liminf_{n\to+\infty} \mu(C_n).$$

Lo que termina la demostración.

■