Lección n°3: Construcción de medidas, Medida de Lebesgue

EPN, verano 2009

1. Unicidad de Medidas

$\Longrightarrow$ Es imposible obtener un proceso constructivo para describir una σ-álgebra engendrada

$\Longrightarrow$ Es posible considerar *otras* colecciones de conjuntos que nos permiten estudiar la estructura (la unicidad en particular) de las σ-álgebras engendradas...y que facilitan la vida.

1.1. Clases monótonas y π-sistemas

Definición 1 (Clase monótona - π-sistema) *Sea X un conjunto.*

1) *Una colección $\mathcal{M}$ de subconjuntos de X es una clase monótona o clase de Dynkin sobre X si:*
   a) $X \in \mathcal{M}$,
   b) *$\mathcal{M}$ es estable por diferencia propia: si $A, B \in \mathcal{M}$ y si $A \subset B$, entonces $B \setminus A \in \mathcal{M}$,*
   c) *si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente de conjuntos de $\mathcal{M}$ entonces $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$.*
2) *Una colección de subconjuntos de X es un π*-sistema *sobre X si es estable por construcción de intersecciones finitas.*

Si X es un conjunto y $\mathscr{A}$ es una σ-álgebra sobre X entonces $\mathscr{A}$ es una clase monótona.

Si $X = \{a, b, c\}$, entonces $\mathcal{P}(X)$ es un π-sistema; por el contrario el conjunto $\Theta = \{\{b\}; \{a, b\}; \{a, c\}; X\}$ no es un π-sistema pues $\{a\} \notin \Theta$.

¿Cómo obtener clases monótonas?

Proposición 1 *Sea $(X, \mathscr{A})$ un espacio medido y sean μ y ν son dos medidas finitas definidas sobre $\mathscr{A}$ tales que $\mu(X) = \nu(X)$; entonces $\mathcal{M} = \{A \in \mathscr{A} : \mu(A) = \nu(A)\}$ es una clase monótona.*

Prueba.

a) $X \in \mathcal{M}$, inmediato.

b) Sean $A, B \in \mathcal{M}$ tales que $A \subset B \Longrightarrow B = A \cup (B \setminus A)$ tenemos

$$\begin{aligned} \mu(B) &= \mu(A) + \mu(B \setminus A) \\ \nu(B) &= \nu(A) + \nu(B \setminus A) \Longrightarrow \text{medidas finitas } \Longrightarrow \mu(B \setminus A) = \nu(B \setminus A) \end{aligned}$$

c) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente de conjuntos de $\mathcal{M}$ entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = \lim_{n\to+\infty} \nu(A_n) = \nu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$$

■

Definición 2 (Clase monótona engendrada) *Si $\mathcal{K}$ es una colección arbitraria de conjuntos de X, la intersección de todas las clases monótonas sobre X que contienen $\mathcal{K}$ es la más pequeña clase monótona que contiene $\mathcal{K}$ y es llamada la* clase monótona engendrada *por $\mathcal{K}$ y la notaremos $\mathcal{M}(\mathcal{K})$.*

$\Longrightarrow$ Utilidad de las cláses monótonas!

Teorema 1 (de la clase Monótona) *Sea X un conjunto y sea $\mathcal{K}$ un π-sistema sobre X $\Longrightarrow \sigma(\mathcal{K}) = \mathcal{M}(\mathcal{K})$.*

Demostración.

1. $\mathcal{M}(\mathcal{K}) \subset \sigma(\mathcal{K})$:

   Toda σ-álgebra es un clase monótona, $\sigma(\mathcal{K})$ es una clase monótona que contiene $\mathcal{K} \Longrightarrow \mathcal{M}(\mathcal{K}) \subset \sigma(\mathcal{K})$.

2. $\sigma(\mathcal{K}) \subset \mathcal{M}(\mathcal{K})$: Vamos a mostrar que $\mathcal{M}(\mathcal{K})$ es una σ-álgebra.

   a) $\mathcal{M}(\mathcal{K})$ es una álgebra de partes.

   i) $\mathcal{M}(\mathcal{K})$ es estable por complementación: puntos $a) + b)$ de la definición de clase monótona.

   ii) $\mathcal{M}(\mathcal{K})$ es estable por construcción de intersecciones finitas.
   $\longrightarrow$ Sea $\mathcal{M}_1(\mathcal{K}) = \{A \in \mathcal{M}(\mathcal{K}) : A \cap C \in \mathcal{M}(\mathcal{K}),\ \text{para todo } C \in \mathcal{K}\}$.

$$\left.\begin{array}{rcl} \mathcal{K} \subset \mathcal{M}(\mathcal{K}) & \Longrightarrow & X \in \mathcal{M}_1(\mathcal{K}) \\ (A \setminus B) \cap C & = & (A \cap C) \setminus (B \cap C) \\ (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \cap C & = & \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cap C) \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathcal{M}_1(\mathcal{K}) \text{ es una clase monótona}$$

   $\mathcal{K}$ es estable por construcción de intersecciones finitas $\Longrightarrow \mathcal{K} \subset \mathcal{M}_1(\mathcal{K}) \subset \mathcal{M}(\mathcal{K})$
   $\Longrightarrow \mathcal{M}(\mathcal{K}) = \mathcal{M}_1(\mathcal{K})$.

   $\longrightarrow$ Sea $\mathcal{M}_2(\mathcal{K}) = \{B \in \mathcal{M}(\mathcal{K}) : A \cap B \in \mathcal{M}(\mathcal{K}),\ \text{para todo } A \in \mathcal{M}(\mathcal{K})\}$.

$$\left.\begin{array}{rcl} \mathcal{K} \subset \mathcal{M}_2(\mathcal{K}) & \Longrightarrow & X \in \mathcal{M}_2(\mathcal{K}) \\ (A \setminus B) \cap C & = & (A \cap C) \setminus (B \cap C) \\ (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \cap C & = & \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cap C) \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathcal{K}) \text{ es una clase monótona}$$

   $\mathcal{M}(\mathcal{K}) = \mathcal{M}_2(\mathcal{K}) \Longrightarrow \mathcal{M}(\mathcal{K})$ es estable por construcción de intersecciones finitas.

   b) $\mathcal{M}(\mathcal{K})$ es una σ-álgebra.

   $\mathcal{M}(\mathcal{K})$ es álgebra de partes estable por construcción de sucesiones crecientes $\Longrightarrow \mathcal{M}(\mathcal{K})$ es una σ-álgebra.

   c) $\mathcal{M}(\mathcal{K})$ es una σ-álgebra que contiene $\mathcal{K}$, debe contener $\sigma(\mathcal{K}) \Longrightarrow \sigma(\mathcal{K}) \subset \mathcal{M}(\mathcal{K})$.

■

Observación 1

- Este teorema no nos indica cómo construir una σ-álgebra engendrada a partir de una colección de conjuntos $\mathcal{K}$ que es estable por construcción de intersecciones finitas o π-sistemas.

- Este teorema nos dice que en lugar de estudiar la σ-álgebra engendrada por $\mathcal{K}$, es suficiente de estudiar la clase monótona engendrada por $\mathcal{K}$.

$\Longrightarrow$ *lo cual en muchas aplicaciones es relativamente fácil de hacer!!*

1.2. Teorema de Unicidad de la medidas

Principal utilidad de las clases monótonas

Teorema 2 (unicidad de medidas) *Sea X un conjunto y sea $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(X)$ un π-sistema. Sean μ y ν dos medidas definidas sobre una σ-álgebra $\mathscr{A}$ definida sobre X tal que $\mathscr{A} = \sigma(\mathcal{K})$. Si*

1) $\mu(A) = \nu(A)$ para todo $A \in \mathcal{K}$,

2) existe una sucesión creciente $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\mathcal{K}$ tal que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = X$ y tal que, para todo n se tiene $\mu(A_n) = \nu(A_n) < +\infty$,

$\Longrightarrow$ *las medidas μ y ν coinciden: para todo $A \in \sigma(\mathcal{K})$ se tiene $\mu(A) = \nu(A)$.*

Lema 1 *Sea $(X, \mathscr{A})$ un espacio medible y sea $\mathcal{K}$ un π-sistema sobre X tal que $\mathscr{A} = \sigma(\mathcal{K})$. Si μ y ν son dos medidas finitas definidas sobre $\mathscr{A}$ tales que $\mu(X) = \nu(X)$ y que verifican $\mu(C) = \nu(C)$ para todo $C \in \mathcal{K}$, entonces $\mu = \nu$.*

Prueba. Consideremos la colección $\mathcal{D} = \{A \in \mathscr{A} : \mu(A) = \nu(A)\}$, vemos sin problema que esta colección es una clase monótona. Puesto que $\mathcal{K}$ es un π-sistema y está incluido en $\mathcal{D}$, se tiene que $\mathscr{A} = \sigma(\mathcal{K}) \subset \mathcal{D}$. Entonces, por definición del conjunto $\mathcal{D}$, se tiene $\mu(A) = \nu(A)$ para todo $A \in \mathscr{A}$ lo que termina la demostración.

■

Lema 2 *Sea $(X, \mathscr{A})$ un espacio medible y sea $\mathcal{K}$ un π-sistema sobre X tal que $\mathscr{A} = \sigma(\mathcal{K})$. Si μ y ν son dos medidas definidas sobre $\mathscr{A}$ que coïnciden sobre $\mathcal{K}$ y si existe una sucesión creciente $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos pertenecientes a $\mathcal{K}$ de medida finita con respecto a μ y ν que satisfacen $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n = X$; entonces tenemos la identidad $\mu = \nu$.*

Prueba. Sea $(C_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{K}$ con $\mu(C_n) = \nu(C_n) < +\infty$ y tq. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n = X$. Para cada entero $n \in \mathbb{N}$ definimos dos medidas finitas μ_n y ν_n sobre $\mathscr{A}$ escribiendo $\mu_n(A) = \mu(A \cap C_n)$ y $\nu_n(A) = \nu(A \cap C_n)$.

- Dado que $\mu_n(X) = \nu_n(X) < +\infty$ y $\mu_n(A) = \nu_n(A)$ para todo $A \in \mathcal{K} \Longrightarrow \mu_n = \nu_n$ sobre $\mathscr{A}$.
- Además, puesto que se tiene
$$\lim_{n\to+\infty} \mu_n(A) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A \cap C_n) = \mu(A)$$
para todo $A \in \mathscr{A}$, obtenemos las identidades
$$\mu(A) = \lim_{n\to+\infty} \mu_n(A) = \lim_{n\to+\infty} \nu_n(A) = \nu(A),$$

$\Longrightarrow$ de donde deducimos que las medidas μ y ν deben ser iguales.

■

Unicidad de medidas $\Longrightarrow$ Interesante!

Pero...¿Cómo construir medidas de verdad?

2. Medidas exteriores

$\Longrightarrow$ Construcción de medidas

Definición 3 (Medida exterior) *Sea X un conjunto. Una aplicación $\mu^* : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ es una* medida exterior *si*

1) $\mu^*(\emptyset) = 0,$

2) Para todo $A, B \subset \mathcal{P}(X)$ se tiene la implicación

$$A \subset B \Longrightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B), \qquad \textit{(crecimiento)}$$

3) Para toda sucesión $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}(X)$ tenemos la estimación

$$\mu^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n). \qquad \textit{(σ-subaditividad)}$$

Si X es un conjunto arbitrario definimos $\mu^* : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ por $\mu^*(A) = 0$ si $A = \emptyset$ y $\mu^*(A) = 1$ sino. Entonces μ^* es una medida exterior, pero no es una medida.

Definición 4 (Conjuntos μ-despreciables) *En un espacio medido $(X, \mathscr{A}, \mu)$, una parte D de X es* μ-despreciable *si está contenida en un conjunto $A \in \mathscr{A}$ de μ-medida nula. Es decir si*

$$D \subset A \in \mathscr{A} \quad \textit{y} \quad \mu(A) = 0.$$

Notaremos $\mathscr{D}_\mu$ el conjunto de las partes μ-despreciables.

$\Longrightarrow$ Todo conjunto contenido en un conjunto μ-despreciable es μ-despreciable

$\Longrightarrow$ La reunión numerable de conjuntos μ-despreciables es μ-despreciable

$\Longrightarrow$ un conjunto μ-despreciable no pertenece necesariamente a la σ-álgebra $\mathscr{A}$

Definición 5 (Espacio medido completo, medida completa) *Diremos que un espacio medido $(X, \mathscr{A}, \mu)$ es* completo *si todo conjunto μ-despreciable es $\mathscr{A}$-medible. Por un abuso de lenguaje hablaremos de σ-álgebras completas o de medidas completas.*

Definición 6 (Conjunto μ^*-medible) *Sea $\mu^* : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ una medida exterior; una parte A de $\mathcal{P}(X)$ es* μ^*-medible *si para todo $E \in \mathcal{P}(X)$ se tiene*

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A). \tag{1}$$

$\Longrightarrow$ Los conjuntos $\emptyset$ y X son μ^*-medibles

$\Longrightarrow$ Los conjuntos E como conjuntos de "test" a partir de los cuales determinaremos si un conjunto es o no μ^*-medible.

$\Longrightarrow$ Podemos restringir nuestra definición de conjunto μ^*-medible a la desigualdad

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A) \qquad \mu^*(E) < +\infty. \tag{2}$$

Definición 7 *Sea X un conjunto y μ^* una medida exterior definida sobre $\mathcal{P}(X)$. El conjunto formado por las partes μ^*-medibles será notado $\mathscr{M}_{\mu^*}$.*

Este conjunto contiene todos los conjuntos de medida exterior nula:

Lema 3 *Sea X un conjunto y sea μ^* una medida exterior sobre $\mathcal{P}(X)$. Entonces todo subconjunto A de X tal que $\mu^*(A) = 0$ o tal que $\mu^*(A^c) = 0$ pertenece a $\mathscr{M}_{\mu^*}$.*

Prueba.

1. Si $\mu^*(A) = 0 \Longrightarrow \mu^*(E \cap A) = 0 \Longrightarrow \mu^*(E) \geq \mu^*(E \setminus A) \Longrightarrow A$ es μ^*-medible.

2. Si $\mu^*(A^c) = 0 \Longrightarrow \mu^*(E \cap A^c) = 0 \Longrightarrow \mu^*(E) \geq \mu^*(E \setminus A^c) \Longrightarrow A^c$ es μ^*-medible.

$\blacksquare$

Teorema 3 *Sea X un conjunto y μ^* una medida exterior sobre X. Entonces*

1) el conjunto $\mathscr{M}_{\mu^*}$ de partes μ^*-medibles es una σ-álgebra,

2) la restricción de μ^* a $\mathscr{M}_{\mu^*}$ es una medida completa: $(X, \mathscr{M}_{\mu^*}, \mu^*)$ es un espacio medido completo.

Demostración.

1. $\mathscr{M}_{\mu^*}$ es una σ-álgebra.

   a) $\emptyset, X \in \mathscr{M}_{\mu^*}$ de manera que el conjunto $\mathscr{M}_{\mu^*}$ no es vacío.

   b) $\mathscr{M}_{\mu^*}$ es estable al pasar al complementario.
   Si $A \in \mathscr{M}_{\mu^*}$ para todo $E \in \mathcal{P}(X)$ tenemos

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &= \mu^*(E \setminus A) + \mu^*(E \cap A) = \mu^*(E \cap (X \setminus A)) + \mu^*(E \setminus (X \setminus A)). \\ &= \mu^*(E \cap A^c) + \mu^*(E \setminus A^c) \Longrightarrow A^c \in \mathscr{M}_{\mu^*}. \end{aligned}$$

   c) $\mathscr{M}_{\mu^*}$ es estable por unión numerable.
   Fijemos E y una sucesión de conjuntos $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathscr{M}_{\mu^*}$.

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &= \mu^*(E \cap A_0) + \mu^*(E \setminus A_0) \\ &= \mu^*(E \cap A_0) + \mu^*\left((E \setminus A_0) \cap A_1\right) \\ &\quad + \mu^*(((E \setminus A_0) \setminus A_1) \cap A_2) + \mu^*(((E \setminus A_0) \setminus A_1) \setminus A_2); \end{aligned}$$

   es decir:

$$\mu^*(E) = \sum_{n=0}^{k} \mu^* \left(\left(E \setminus \bigcup_{j=0}^{n-1} A_j \right) \cap A_n \right) + \mu^* \left(E \setminus \bigcup_{j=0}^{k} A_j \right).$$

   Por la propiedad de crecimiento de μ^* tenemos la desigualdad

$$\mu^*(E) \geq \sum_{n=0}^{k} \mu^* \left(\left(E \setminus \bigcup_{j=0}^{n-1} A_j \right) \cap A_n \right) + \mu^* \left(E \setminus \bigcup_{j=0}^{+\infty} A_j \right)$$

   que es válida para todo k. Por lo tanto podemos deducir la estimación siguiente:

$$\mu^*(E) \geq \sum_{n=0}^{+\infty} \mu^* \left(\left(E \setminus \bigcup_{j=0}^{n-1} A_j \right) \cap A_n \right) + \mu^* \left(E \setminus \bigcup_{j=0}^{+\infty} A_j \right). \tag{3}$$

   Utilizando la σ-subaditividad de la medida exterior tenemos

$$\mu^*(E) \geq \mu^* \left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \left(E \setminus \bigcup_{j=0}^{n-1} A_j \right) \cap A_n \right) + \mu^* \left(E \setminus \bigcup_{j=0}^{+\infty} A_j \right);$$

pero, dado que se tiene la identidad

$$\bigcup_{n=0}^{+\infty}\left(\left(E\setminus\bigcup_{j=0}^{n-1}A_j\right)\cap A_n\right)=E\cap\bigcup_{n=0}^{+\infty}A_n$$

obtenemos

$$\mu^*(E) \quad \geq \quad \mu^*\left(E\cap\bigcup_{n=0}^{+\infty}A_n\right)+\mu^*\left(E\setminus\bigcup_{n=0}^{+\infty}A_n\right) \qquad \text{de manera que } \bigcup_{n=0}^{+\infty}A_n\in\mathscr{M}_{\mu^*}.$$

2. La restricción de μ^* a $\mathscr{M}_{\mu^*}$ es una medida.

   a) $\mu^*(\emptyset)=0$

   b) veamos la σ-aditividad de la aplicación $\mu^*:\mathscr{M}_{\mu^*}\longrightarrow\overline{\mathbb{R}}_+$.
   Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos disjuntos de $\mathscr{M}_{\mu^*}$. Si fijamos $E=\bigcup_{n=0}^{+\infty}A_n$ en la fórmula (3) obtenemos la estimación

   $$\mu^*\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty}A_n\right)\geq\sum_{n=0}^{+\infty}\mu^*(A_n)+\mu^*(\emptyset),$$

   lo que, combinando con la σ-subaditividad de la medida exterior nos da la identidad

   $$\mu^*\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty}A_n\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\mu^*(A_n)$$

   para toda sucesión de conjuntos disjuntos de $\mathscr{M}_{\mu^*}$.

   $\Longrightarrow$ La restricción μ^* a $\mathscr{M}_{\mu^*}$ es una medida.

3. El espacio medido $(X,\mathscr{M}_{\mu^*},\mu^*)$ es completo.

   Sea D un conjunto μ^*-despreciable, existe un conjunto A que contiene D de μ^*-medida nula. Por la propiedad de crecimiento de las medidas exteriores tenemos $\mu^*(D)=0$ y basta aplicar el lema 3 para observar que D pertenece a $\mathscr{M}_{\mu^*}$.

■

Observación 2

$\Longrightarrow$ **Este teorema es esencial**. No solo se obtiene a partir de una medida exterior μ^* una medida sobre la σ-álgebra $\mathscr{M}_{\mu^*}$, sino que además se tiene que esta medida es completa.

$\Longrightarrow$ Este resultado no nos dice cómo construir medidas exteriores interesantes.
Ni qué conjuntos pertenecen a $\mathscr{M}_{\mu^*}$...

*

2.1. Teoremas de Construcción de medidas

Para obtener medidas que miden conjuntos interesantes procedemos en dos etapas:

1. Medida exterior asociada a una aplicación

2. Teorema de Caratheodory

Teorema 4 (Medida exterior asociada a una aplicación) *Sea $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(X)$ un conjunto de partes de X tal que $\emptyset, X \in \mathcal{K}$ y sea $\mu : \mathcal{K} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ una aplicación tal que $\mu(\emptyset) = 0$. Definimos para todo $A \in \mathcal{P}(X)$*

$$\mu^*(A) = \inf_{\mathcal{R}_A} \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(A_n) \tag{4}$$

en donde $\mathcal{R}_A$ es el conjunto de todos los recubrimientos numerables $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A por medio de conjuntos A_n pertenecientes a $\mathcal{K}$.

Entonces $\mu^* : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ es una medida exterior llamada la medida exterior asociada a la aplicación μ.

Observación 3

- el conjunto $\mathcal{K}$ no posee ninguna propiedad particular, solo debe contener $\emptyset$ y X.
- $\mathcal{R}_A$ no es vacío: se puede construir un recubrimiento de A fijando $A_n = X$ para todo n.
- la función μ es muy sencilla y no verifica ninguna propiedad especial, simplemente exigimos que $\mu(\emptyset) = 0$.

Demostración. Debemos verificar que $\mu^*(A) = \inf\limits_{\mathcal{R}_A} \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(A_n)$ satisface las tres propiedades de medida exterior.

1. Si tomamos $A_n = \emptyset$ para todo n se obtiene $\mu^*(\emptyset) = 0$.
2. Si tenemos $A \subset B$, entonces todo recubrimiento $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de B es un recubrimiento de A es decir que $\mathcal{R}_B \subseteq \mathcal{R}_A$, lo que implica
$$\mu^*(A) = \inf_{\mathcal{R}_A} \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(B_n) \leq \inf_{\mathcal{R}_B} \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(B_n) = \mu^*(B),$$
de donde se deduce el crecimiento de la función μ^*.
3. σ-subaditividad de μ^*.
Para ello consideremos $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de partes de X de reunión A, $\varepsilon > 0$ un real y $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de reales positivos tales que
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \varepsilon_n < \varepsilon.$$
Por la definición de cota inferior, existen conjuntos $A_{n,p} \in \mathcal{K}$ con $n, p \in \mathbb{N}$ tales que
$$A_n \subset \bigcup_{p=0}^{+\infty} A_{n,p} \qquad \text{y} \qquad \sum_{p=0}^{+\infty} \mu(A_{n,p}) \leq \mu^*(A_n) + \varepsilon_n.$$
Como esta última estimación es válida para todo n obtenemos
$$\sum_{n,p\in\mathbb{N}} \mu(A_{n,p}) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mu^*(A_n) + \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mu^*(A_n) + \varepsilon.$$
Dado que $(A_{n,p})_{n,p\in\mathbb{N}}$ es un recubrimiento numerable de A por medio de conjuntos pertenecientes a $\mathcal{K}$, entonces se tiene por la fórmula (4) la estimación
$$\mu^*(A) \leq \sum_{n,p\in\mathbb{N}} \mu(A_{n,p}) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mu^*(A_n) + \varepsilon,$$
de donde se deduce la σ-subaditividad de μ^* haciendo tender ε hacia cero.

■

Observación 4

- Es relativamente sencillo construir medidas exteriores y obtener espacios medidos completos.
- Estos resultados no nos proporcionan ninguna información sobre el tamaño de la σ-álgebra $\mathscr{M}_{\mu^*}$.

¿Qué conjuntos *interesantes* están incluidos en la σ-álgebra $\mathscr{M}_{\mu^*}$?

¿Cómo hacer para asegurarse que *todo* conjunto interesante está en $\mathscr{M}_{\mu^*}$?

Teorema 5 (de prolongación de Carathéodory) *Sea $\mathcal{A}$ una álgebra de partes sobre X y sea $\mathfrak{m} : \mathcal{A} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ una función aditiva de conjuntos. Bajo las condiciones*

(a) para toda sucesión decreciente $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\mathcal{A}$ se tiene la implicación:

$$\left(\mathfrak{m}(A_0) < +\infty \quad y \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset\right) \Longrightarrow \mathfrak{m}(A_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

A la cual se añade la condición siguiente en el caso en que $\mathfrak{m}(X) = +\infty$

(b) X se puede expresar como la unión de una sucesión creciente de conjuntos $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}$ con $\mathfrak{m}(X_n) < +\infty$ y tal que

$$(A \in \mathcal{A} \quad y \quad \mathfrak{m}(A) = +\infty) \Longrightarrow \mathfrak{m}(A \cap X_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Entonces

1) la medida exterior μ^* asociada a la función aditiva $\mu^*(A) = \inf\limits_{\mathcal{R}_A} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathfrak{m}(A_n)$ prolonga *la aplicación $\mathfrak{m}$ en el sentido que para todo conjunto $A \in \mathcal{A}$ se tiene $\mu^*(A) = \mathfrak{m}(A)$.*

2) la σ-álgebra $\mathscr{M}_{\mu^*}$ de los conjuntos μ^*-medibles contiene el álgebra $\mathcal{A}$ y por lo tanto contiene la σ-álgebra $\sigma(\mathcal{A})$ engendrada por $\mathcal{A}$.

3) si ν es una medida definida sobre $\sigma(\mathcal{A})$ tal que para todo $A \in \mathcal{A}$ se tiene $\nu(A) = \mathfrak{m}(A)$; entonces se tiene la identidad $\mu^* = \nu$ sobre $\sigma(\mathcal{A})$.

$$\left.\begin{array}{c}\text{Conjuntos interesantes}\\ \text{(álgebra de partes } \mathcal{A})\\ +\\ \text{función aditiva de conjuntos } \mathfrak{m}\end{array}\right\} \Longrightarrow \text{espacio medido completo } (X, \mathscr{M}_{\mu^*}, \mu^*)$$

Lema 4 *Las dos condiciones (a) y (b) precedentes implican la siguiente condición:*

Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos disjuntos de $\mathcal{A}$ tal que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$, entonces

$$\mathfrak{m}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{m}(A_n). \tag{5}$$

Prueba. Si $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ es tal que $\mathfrak{m}(A) < +\infty$, definimos $B_n = A \setminus \bigcup_{j=0}^{n} A_j$ de manera que estos conjuntos son decrecientes y pertenecen a $\mathcal{A}$. La condición (a) implica que $\mathfrak{m}(B_n)$ tiende hacia cero, pero como se tiene

$$\mathfrak{m}(A) = \sum_{j=0}^{n} \mathfrak{m}(A_j) + \mathfrak{m}(B_n) \qquad \text{se deduce el resultado deseado.}$$

Cuando $\mathfrak{m}(A) = +\infty$, utilizamos la sucesión $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la condición (b) y se tiene $\mathfrak{m}(A \cap X_n) \longrightarrow +\infty$. Dado que $\mathfrak{m}(A \cap X_n) < +\infty$ y que se tiene la unión disjunta $A \cap X_n = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \cap X_n$, podemos aplicar la primera parte de este lema para obtener

$$\mathfrak{m}(A \cap X_n) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathfrak{m}(A_i \cap X_n) \leq \sum_{i=0}^{+\infty} \mathfrak{m}(A_i)$$

lo que implica que la parte derecha de esta expresión es infinita lo que termina la demostración.

■

Demostración del teorema de Carathéodory.

1. Mostremos primero que la medida exterior μ^* asociada prolonga $\mathfrak{m}$.

   i) Sea $A \in \mathcal{A}$, si fijamos una sucesión $A_0 = A$ y $A_n = \emptyset$ para todo $n \geq 1$, obtenemos un recubrimiento de $A \Longrightarrow \mu^*(A) \leq \mathfrak{m}(A)$.

   ii) Utilizamos el lema 4. Sea $A \in \mathcal{A}$, dado que todo recubrimiento (que podemos suponer disjunto) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A con $A_n \in \mathcal{A}$, puede ser reemplazado por $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $B_n = A \cap A_n$ tenemos

   $$\mathfrak{m}(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{m}(B_n) \leq \mu^*(A)$$

   Obtenemos así la identidad $\mu^*(A) = \mathfrak{m}(A)$ para todo elemento A del álgebra de partes $\mathcal{A}$.

2. $\mathcal{A} \subset \mathscr{M}_{\mu^*} \Longrightarrow \sigma(\mathcal{A}) \subset \mathscr{M}_{\mu^*}$. Vamos a demostrar que todo conjunto $A \in \mathcal{A}$ es μ^*-medible.

   Sea $E \in \mathcal{P}(X)$ y $A \in \mathcal{A}$. Sea $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de $\mathcal{A}$ que recubre E

   $\Longrightarrow$ los conjuntos $B_n \cap A$ recubren $E \cap A$ y los conjuntos $B_n \cap A^c$ recubren $E \cap A^c$.

   $$\Longrightarrow \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{m}(B_n \cap A) + \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{m}(B_n \cap A^c) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{m}(B_n).$$

   Tomando el ínfimo sobre todos los recubrimientos $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ obtenemos la estimación

   $$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \leq \mu^*(E).$$

3. Unicidad de la prolongación.

   Con las hipótesis realizadas sobre la función aditiva de conjuntos $\mathfrak{m}$, y con el hecho que para todo $A \in \mathcal{A}$ se tiene $\nu(A) = \mathfrak{m}(A) = \mu^*(A)$, $\Longrightarrow$ tenemos todos los ingredientes necesarios para la aplicación del teorema de unicidad de las medidas 2, lo que nos permite concluir que $\mu^* = \nu$ sobre $\sigma(\mathcal{A})$.

   Es decir que existe una única medida definida sobre $\sigma(\mathcal{A})$ que coincide con la función aditiva de conjuntos $\mathfrak{m}$ sobre $\mathcal{A}$.

■

Observación 5 Gracias a este teorema obtenemos dos resultados que conviene distinguir fijando un poco de terminología.

1. A partir de una álgebra de partes $\mathcal{A}$ y de una función aditiva de conjuntos $\mathfrak{m}$ definida sobre ella obtenemos una *prolongación* de estas estructuras al espacio medido $(X, \mathscr{M}_{\mu^*}, \mu^*)$.
2. Dado que la σ-álgebra $\mathscr{M}_{\mu^*}$ contiene la σ-álgebra engendrada $\sigma(\mathcal{A})$, obtenemos adicionalmente una *extensión* del álgebra $\mathcal{A}$ y de la función aditiva $\mathfrak{m}$ al espacio medido $(X, \sigma(\mathcal{A}), \mu^*_{|\sigma(\mathcal{A})})$.
3. Al pasar de la prolongación a la extensión podemos perder algunas propiedades importantes: el espacio medido prolongado $(X, \mathscr{M}_{\mu^*}, \mu^*)$ es siempre completo por el teorema 3, mientras que no disponemos en general de ningún resultado similar para el espacio medido extendido $(X, \sigma(\mathcal{A}), \mu^*_{|\sigma(\mathcal{A})})$.

2.2. Completación de medidas

Punto de partida: un espacio medido $\Longrightarrow$ punto de llegada: un espacio medido completo.

Teorema 6 (completación) *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido y sea $\mathscr{D}_\mu$ el conjunto de partes μ-despreciables de X. Entonces*

1) el conjunto $\overline{\mathscr{A}}$ determinado por

$$\overline{\mathscr{A}} = \{A \cup D \text{ en donde } A \in \mathscr{A},\ D \in \mathscr{D}_\mu\} \tag{6}$$

es una σ-álgebra sobre X.

2) existe una única medida $\overline{\mu} : \overline{\mathscr{A}} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ que coincide con μ sobre $\mathscr{A}$ y que hace del espacio $(X, \overline{\mathscr{A}}, \overline{\mu})$ un espacio medido completo. Esta medida está definida de la siguiente manera: dado que para todo $A' \in \overline{\mathscr{A}}$ tenemos $A' = A \cup D$ con $A \in \mathscr{A}$ y $D \in \mathscr{D}_\mu$, determinamos entonces

$$\overline{\mu}(A') = \mu(A). \tag{7}$$

*La σ-álgebra $\overline{\mathscr{A}}$ es llamada la σ-*álgebra completada *de $\mathscr{A}$ para la medida μ y la medida $\overline{\mu}$ es la* medida completada *de la medida μ.*

3) el espacio medido $(X, \overline{\mathscr{A}}, \overline{\mu})$ la más pequeña extensión completa de μ.

Demostración.

1. $\overline{\mathscr{A}}$ es una σ-álgebra sobre X.

   a) Dado que el conjunto vacío es despreciable, entonces $\overline{\mathscr{A}}$ contiene $\mathscr{A}$.

   b) $\overline{\mathscr{A}}$ es estable por unión numerable puesto que los conjuntos $\mathscr{A}$ y $\mathscr{D}_\mu$ lo son.

   c) $\overline{\mathscr{A}}$ es estable por complementación.
   Sea $A' = A \cup D$ con $A \in \mathscr{A}$ y $D \in \mathscr{D}_\mu$, entonces existe un conjunto $B \in \mathscr{A}$ tal que $D \subset B$ y $\mu(B) = 0$. Tenemos por lo tanto que
   $$A'^c = X \setminus (A \cup D) = (X \setminus A \cup B) \cup C$$
   en donde $X \setminus A \cup B \in \mathscr{A}$ y $C = (B \setminus D) \setminus A \in \mathscr{D}_\mu$ lo que muestra que si $A \in \overline{\mathscr{A}}$ entonces $A^c \in \overline{\mathscr{A}}$.

2. *a*) $\overline{\mu}$ está bien definida:
   si $A' = A_1 \cup D_1 = A_2 \cup D_2$ con $A_i \in \mathscr{A}$ y $D_i \in \mathscr{D}_\mu$ debemos tener $\mu(A_1) = \mu(A_2) = \overline{\mu}(A')$. En efecto, dado que existen dos conjuntos $B_i \in \mathscr{A}$ tales que $\mu(B_i) = 0$ y $D_i \subset B_i$ se tiene que
   $$A_1 \subset A_2 \cup D_2 \subset A_2 \cup B_2$$
   y por lo tanto se obtiene $\mu(A_1) \leq \mu(A_2 \cup B_2) = \mu(A_2)$. Razonando de manera similar se deduce que $\mu(A_2) \leq \mu(A_1)$ lo que implica la igualdad de estas dos cantidades.

   b) $\overline{\mu}$ es una medida:
   se tiene $\overline{\mu}(\emptyset) = 0$ y, por las líneas precedentes, que si $A' \subset B'$ con $A', B' \in \overline{\mathscr{A}}$ entonces $\overline{\mu}(A') \leq \overline{\mu}(B')$. Si $(A'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión disjunta de conjuntos de $\overline{\mathscr{A}}$ tenemos
   $$\overline{\mu}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A'_n\right) = \overline{\mu}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \overline{\mu}(A'_n).$$
   Obtenemos pues que $\overline{\mu}$ es una medida definida sobre la σ-álgebra $\overline{\mathscr{A}}$.

   c) $\overline{\mu}$ es única:
   Sea ν otra medida definida sobre $\overline{\mathscr{A}}$ que coincide con μ sobre $\mathscr{A}$.
   Puesto que $A' \in \overline{\mathscr{A}}$ se expresa de la forma $A' = A \cup D \subset A \cup B$ con $D \in \mathscr{D}_\mu$ y $\mu(B) = 0$, tenemos las estimaciones $\nu(A') \leq \nu(A \cup B) = \mu(A \cup B) = \mu(A)$. Dado que se tiene la inclusión $A \subset A \cup D = A'$ obtenemos $\mu(A) = \nu(A) \leq \nu(A \cup D) = \nu(A')$ de donde se deduce que $\nu(A') = \mu(A)$ para todo $A' \in \overline{\mathscr{A}}$.

d) $\overline{\mu}$ es completa:

Para ello consideramos $E = A \cup D \in \overline{\mathscr{A}}$ un conjunto de $\overline{\mu}$-medida nula y F una parte de E. Puesto que $\mu(A) = 0$, por lo tanto E es μ-despreciable lo que implica que F también lo es, tenemos entonces que $F \in \mathscr{D}_\mu \subset \overline{\mathscr{A}}$ y que el espacio medido $(X, \overline{\mathscr{A}}, \overline{\mu})$ es completo.

3. Este prolongamiento es el más pequeño. Consideremos $(X, \hat{\mathscr{A}}, \hat{\mu})$ otro espacio medido completo que contiene el espacio $(X, \mathscr{A}, \mu)$ tal que $\hat{\mu}$ coincide con μ sobre $\mathscr{A}$. Tenemos necesariamente que $\mathscr{D}_\mu \subset \hat{\mathscr{A}}$, además como $\mathscr{A} \subset \hat{\mathscr{A}}$ se obtiene $\overline{\mathscr{A}} \subset \hat{\mathscr{A}}$. Finalmente, por la unicidad que acabamos de establecer se tiene que $\hat{\mu}_{|_{\overline{\mathscr{A}}}} = \overline{\mu}$ lo que termina la demostración.

■

¿Qué relación entre $(X, \mathscr{M}_{\mu^*}, \mu^*)$ y $(X, \overline{\mathscr{A}}, \overline{\mu})$?

Teorema 7 *Sea $(X, \mathscr{A})$ un espacio medible y sea $\mu : \mathscr{A} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ una medida σ-finita. Entonces el espacio medido $(X, \mathscr{M}_{\mu^*}, \mu^*)$ es la completación del espacio medido $(X, \mathscr{A}, \mu)$.*

Si μ es σ-finita $\Longrightarrow (X, \mathscr{M}_{\mu^*}, \mu^*) = (X, \overline{\mathscr{A}}, \overline{\mu})$.

Demostración.

Tenemos por el teorema anterior que $\overline{\mathscr{A}} \subset \mathscr{M}_{\mu^*}$. Solo debemos verificar que todo conjunto μ^*-medible A pertenece a la σ-álgebra $\overline{\mathscr{A}}$.

1. la cantidad $\mu^*(A)$ es finita.

   Sabemos por corolario 2.3.2 del folleto que existe un conjunto $B \in \mathscr{A}$ tal que $A \subset B$ y $\mu^*(A) = \mu(B)$. Como la restricción de μ^* a $\mathscr{A}$ es una medida que coincide con μ y como $\mu^*(A)$ es finito se deduce que $\mu^*(B \setminus A) = 0$.

   Utilicemos otra vez el mismo resultado: existe un conjunto $C \in \mathscr{A}$ tal que $B \setminus A \subset C$ y $\mu^*(C) = \mu(B \setminus A) = 0$. Tenemos entonces $A = (B \setminus C) \cup (A \cap C)$ en donde $B \setminus C \in \mathscr{A}$ y $A \cap C \subset C$ con $C \in \mathscr{A}$ un conjunto de medida nula, lo que muestra que A se escribe como la unión de un elemento $\mathscr{A}$ y de un elemento de $\mathscr{D}_\mu$ y por lo tanto pertenece a $\overline{\mathscr{A}}$.

2. En el caso general. $X = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ con $\mu^*(A_n) < +\infty$.

   Tenemos que todo elemento de $\mathscr{M}_{\mu^*}$ se escribe como $A = \bigcup_{n=0}^{+\infty}(A \cap A_n)$ en donde $(A \cap A_n) \in \mathscr{M}_{\mu^*}$ y $\mu^*(A \cap A_n) \leq \mu^*(A_n) = \mu(A_n) < +\infty$. Dado que los conjuntos $A \cap A_n$ pertenecen a $\overline{\mathscr{A}}$ por la primera parte $\Longrightarrow A \in \overline{\mathscr{A}}$.

■

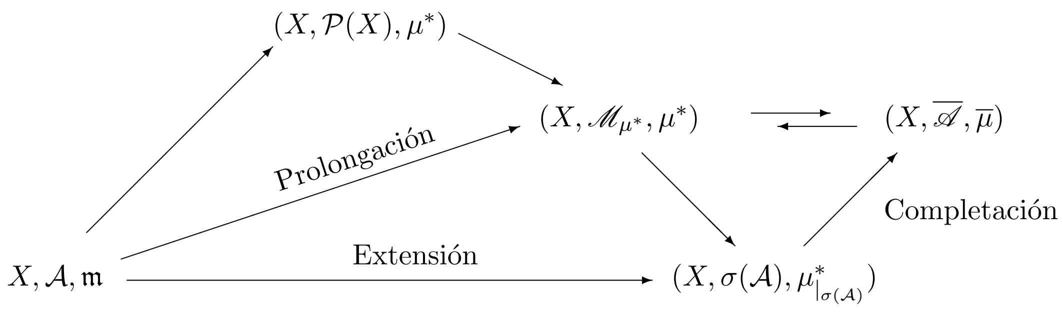

Figura 1: Prolongación, extensión y completación de medidas

3. Medida de Lebesgue

La medida de Lebesgue posee propiedades importantes...no es por nada que es la más usada!

- mide correctamente todos los intervalos (o adoquines en dimensiones superiores)
- satisface todas las buenas y "naturales" propiedades de las medidas

3.1. Regularidad de las medidas Borelianas

Definición 8 (Medida Boreliana, medida regular) *Sea X un espacio topológico separado.*

1) *Una* medida Boreliana *sobre X es una medida cuyo dominio de definición es la σ-álgebra de los borelianos $\mathcal{B}or(X)$.*

2) *Sea $\mathscr{A}$ una σ-álgebra sobre X tal que $\mathcal{B}or(X) \subset \mathscr{A}$. Una medida μ definida sobre $\mathscr{A}$ es* regular *si verifica las condiciones siguientes:*

   (i) Cada subconjunto compacto K de X es de medida finita: $\mu(K) < +\infty$.

   (ii) Cada conjunto $A \in \mathscr{A}$ verifica:

$$\mu(A) = \text{ínf}\{\mu(U);\ A \subset U \quad \textit{con} \quad U \textit{ abierto}\} \qquad \textit{(regular exteriormente)}$$

   (iii) Cada subconjunto abierto U verifica:

$$\mu(U) = \sup\{\mu(K);\ K \subset U \quad \textit{con} \quad K \textit{ compacto}\} \qquad \textit{(regular interiormente)}$$

Una medida boreliana regular *sobre X es entonces una medida regular cuyo dominio es el conjunto de los borelianos de X.*

$\Longrightarrow$ Importancia de las medidas regulares:

posibilidad de aproximar la medida de un conjunto utilizando los conjuntos usuales en topología (es decir los conjuntos abiertos, cerrados y compactos) realizando un error mínimo

Teorema 8 (Aproximación de medidas regulares) *Sea X un espacio topológico localmente compacto separado de base numerable (σ-compacto). Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido con $\mathcal{B}or(X) \subset \mathscr{A}$. Si la medida μ es finita sobre los compactos (es entonces σ-finita), entonces la noción de regularidad es equivalente a los dos puntos a continuación*

1) *para todo $A \in \mathscr{A}$ y para todo $\varepsilon > 0$, existe un abierto U tal que $A \subset U$ y*

$$\mu(U \setminus A) \leq \varepsilon. \tag{8}$$

2) *para todo $A \in \mathscr{A}$ y para todo $\varepsilon > 0$, existe un cerrado C tal que $C \subset A$ y*

$$\mu(A \setminus C) \leq \varepsilon. \tag{9}$$

Demostración. Vamos a demostrar las implicaciones siguientes:

$$\text{regularidad de la medida} \Longrightarrow (8) \Longleftrightarrow (9) \Longrightarrow \text{regularidad de la medida.}$$

1. regularidad de la medida $\Longrightarrow$ (8).

   Suponemos que la medida μ es regular. Dado que la medida es σ-finita, existe una sucesión de conjuntos $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathscr{A}$-medibles que recubren X de μ-medida finita. Sean $A \in \mathscr{A}$ un conjunto, ε y $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reales positivos tales que $\sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n < \varepsilon$. Puesto que la medida es regular, existen abiertos $U_n \supset A \cap A_n$ tales que

$\mu(U_n) \leq \mu(A \cap A_n) + \varepsilon_n$. Como $\mu(A \cap A_n)$ es finito, se tiene que $\mu(U_n \setminus (A \cap A_n)) \leq \varepsilon_n$. Tenemos además que el abierto $U = \bigcup_{n=0}^{+\infty} U_n$ contiene A y que

$$\mu(U \setminus A) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(U_n \setminus (A \cap A_n)) \leq \varepsilon,$$

lo que muestra la fórmula (8).

2. (8) $\Longleftrightarrow$ (9).

   Como $A \in \mathscr{A}$, se tiene que $A^c \in \mathscr{A}$ y, aplicando el razonamiento anterior, obtenemos que para todo $\varepsilon > 0$, existe un conjunto abierto V que contiene A^c tal que $\mu(V \setminus A^c) \leq \varepsilon$. Dado que $V \setminus A^c = A \setminus C$, en donde C es un cerrado contenido en A, se tiene que la expresión (8) es equivalente a $\mu(A \setminus C) \leq \varepsilon$.

3. (9) $\Longrightarrow$ la regularidad de la medida.

   La medida es finita sobre los compactos, solo hay que verificar los puntos (ii) y (iii) de la definición 8. Como (9) es equivalente a (8), no es difícil ver que se tiene la regularidad exterior: en efecto si $\mu(U \setminus A) \leq \varepsilon$ se obtiene que $\mu(U) = \mu(U \cap A) + \mu(U \setminus A) \leq \mu(A) + \varepsilon$ lo que implica (ii).

   Para la regularidad interior, vamos a mostrar que se tiene (iii) para todo elemento de $\mathscr{A}$ (que contiene todos los abiertos pues contiene la σ-álgebra boreliana). Sea $A \in \mathscr{A}$ y $\varepsilon > 0$. Tenemos entonces por (9) que existe un cerrado $C \subset A$ tal que

   $$\mu(A) \leq \mu(C) + \varepsilon/2. \tag{10}$$

   Este cerrado puede escribirse $C = \bigcup_{n=0}^{+\infty} K_n$ en donde $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente de compactos, de manera que podemos aplicar el teorema de continuidad de las medidas para obtener

   $$\mu(C) = \lim_{n\to+\infty} \mu(K_n).$$

   Si $\mu(A) = +\infty$ entonces $\mu(C) = +\infty$ y $\lim\limits_{n\to+\infty} \mu(K_n) = +\infty$ lo que muestra (iii) en este caso. Si $\mu(A) < +\infty$ entonces $\mu(C) < +\infty$ y existe un entero n tal que

   $$\mu(C) \leq \mu(K_n) + \varepsilon/2.$$

   Juntando esta estimación y la desigualdad (10), se tiene $\mu(A) \leq \mu(K_n) + \varepsilon$, de donde se deduce el resultado deseado.

$\blacksquare$

Teorema 9 (condición de regularidad, espacio medido regular) *Sea X un espacio topológico localmente compacto separado de base numerable, sea $\mathscr{A} \supset \mathcal{B}or(X)$ una σ-álgebra y sea $\mu : \mathscr{A} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ una medida finita sobre los compactos de X. Entonces μ es una medida regular y en este caso diremos que el espacio medido $(X, \mathscr{A}, \mu)$ es un* espacio medido regular.

3.2. Construcción y propiedades de la medida de Lebesgue

...por fin!!

Lema 5 *Sea Γ un subconjunto adoquinable de $\mathbb{R}^n$ de volúmen finito ($vol(\Gamma) < +\infty$) y sea $\varepsilon > 0$ un real. Existe entonces un conjunto compacto K contenido en Γ tal que $vol(\Gamma \setminus K) \leq \varepsilon$.*

Prueba. Todo conjunto adoquinable se expresa como la unión disjunta de adoquines $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{N} A_i$. Dado que todo adoquín es de la forma $A = \prod_{j=1}^{n}(a_j, b_j)$ y que los intervalos (a_j, b_j) son acotados, no es difícil escojer $A' = \prod_{j=1}^{n}[c_j, d_j]$ con $a_j < c_j < d_j < b_j$ de forma que $vol(A \setminus A') \leq \varepsilon/N$ y tal que $A' \subset A$. Al definir $K = \bigcup_{i=1}^{N} A'_i$ obtenemos el conjunto compacto buscado pues

$$vol(\Gamma \setminus K) = vol\left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i \setminus A'_i\right) = \sum_{i=1}^{N} vol(A_i \setminus A'_i) \leq \varepsilon.$$

■

Teorema 10 (Construcción de la medida de Lebesgue) *Sea $\mathcal{A}$ el álgebra de partes de $\mathbb{R}^n$ formada por los conjuntos adoquinables y sea la aplicación $vol : \mathcal{A} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ la función aditiva de conjuntos que asocia a cada adoquín su volúmen. Entonces*

1) existe una única medida exterior λ_n^* asociada a la función $vol : \mathcal{A} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ por medio de la fórmula

$$\lambda_n^*(A) = \inf_{\mathcal{R}_A} \sum_{n=0}^{+\infty} vol(\Gamma_n) \tag{11}$$

en donde $\mathcal{R}_A$ es el conjunto de todos los recubrimientos numerables $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A por medio de conjuntos adoquinables, que prolonga la aplicación vol y que coincide con ella sobre $\mathcal{A}$.

2) la σ-álgebra $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ de conjuntos λ_n^*-medibles se denomina la σ-álgebra de Lebesgue *y contiene la σ-álgebra de los Borelianos: $\mathcal{B}or(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$.*

La aplicación $\lambda_n^* : \mathscr{L}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ se denomina la medida exterior n-dimensional de Lebesgue.

Demostración. Basta verificar los dos puntos:

(a) Para toda sucesión decreciente $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\mathcal{A}$ se tiene la implicación:

$$\left(vol(\Gamma_0) < +\infty \quad \text{y} \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n = \emptyset\right) \Longrightarrow vol(\Gamma_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(b) El conjunto $\mathbb{R}^n$ puede expresarse como la unión de una sucesión creciente $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}$ con $vol(X_n) < +\infty$ y tal que

$$(\Gamma \in \mathcal{A} \quad \text{y} \quad vol(\Gamma) = +\infty) \Longrightarrow vol(\Gamma \cap X_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

$\Longrightarrow$ (a) Vamos a razonar por el absurdo y suponemos que existe una sucesión decreciente de conjuntos adoquinables $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de volúmen finito tal que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n = \emptyset$ y tal que

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} vol(\Gamma_n) = \alpha > 0. \tag{12}$$

Sea $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de reales estríctamente positivos tales que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n < \alpha/2$.

Por el lema anterior, podemos encontrar conjuntos adoquinables compactos $K_n \subset \Gamma_n$ tales que $vol(\Gamma_n \setminus K_n) \leq \alpha_n$. Si definimos ahora los conjuntos $N_n = \bigcap_{j=0}^{n} K_j$ tenemos $\Gamma_n \setminus N_n \subset \bigcup_{j=0}^{n}(\Gamma_j \setminus K_j)$ pues un elemento de $\Gamma_n \setminus N_n$ está afuera de uno de los K_n y pertenece a Γ_n; luego, por subaditividad finita obtenemos

$$vol(\Gamma_n \setminus N_n) \leq vol\left(\bigcup_{j=0}^{n} \Gamma_j \setminus K_j\right) \leq \sum_{j=0}^{n} vol(\Gamma_j \setminus K_j) \leq \sum_{j=0}^{n} \alpha_j < \alpha/2.$$

La sucesión de compactos N_n es decreciente y de intersección vacía, es decir que a partir de un cierto rango, los conjuntos N_n son vacíos (ver proposición 1.2.1 del folleto). Entonces a partir de este rango tenemos $vol(\Gamma_n) = vol(\Gamma_n \setminus N_n) < \alpha/2$ lo que contradice (12).

$\Longrightarrow$ (b) Podemos escribir $\mathbb{R}^n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ en donde X_n es el cubo centrado en el origen y de lado $2n$. Si un conjunto adoquinable Γ es de medida infinita, contiene un adoquín A de volúmen infinito y por lo tanto se tiene la estimación $vol(\Gamma \cap X_n) \geq vol(A \cap X_n) \longrightarrow +\infty$.

Con $(a) + (b)$ aplicamos el teorema de Carathéodory y obtenemos la existencia y la unicidad de la medida de Lebesgue λ_n^* definida sobre la σ-álgebra $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ que coincide con la función aditiva de conjuntos *vol* que asocia a todo adoquín su volúmen.

■

Proposición 2 (Propiedades importantes de la Medida exterior de Lebesgue)

1. *La medida exterior de Lebesgue* $\lambda_n^* : \mathscr{L}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ *es* σ*-finita.*

2. *La medida de Lebesgue* $\lambda_n^* : \mathscr{L}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ *es regular.*

3. *Todo subconjunto numerable de* $\mathbb{R}$ *es un conjunto boreliano de medida nula.*

4. *Tenemos la identidad*
$$\big(\mathbb{R}^n, \overline{\mathcal{B}or}(\mathbb{R}^n), \overline{\lambda}_n\big) = (\mathbb{R}^n, \mathscr{L}(\mathbb{R}^n), \lambda_n^*) \tag{13}$$
es decir que la completación de la σ*-álgebra Boreliana de* $\mathbb{R}^n$ *con respecto a la medida de Lebesgue* λ_n *es la* σ*-álgebra de Lebesgue.*

5. *La medida de Lebesgue* $\lambda_n^* : \mathscr{L}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ *no es atómica.*