Lección n°4: Construcción de la integral de Lebesgue

EPN, verano 2009

1. Funciones medibles

Un **concepto de medibilidad diferente**:

$\Longrightarrow$ la noción de *medibilidad* de las funciones solo depende de las σ-álgebras.

Definición 1 (Función medible) *Sean $(X,\mathscr{A})$ y $(Y,\mathscr{B})$ dos espacios medibles.*
Una función f de X en Y es $(\mathscr{A},\mathscr{B})$-medible *si para todo $B\in\mathscr{B}$, tenemos $f^{-1}(B)\in\mathscr{A}$.*
El conjunto de funciones $(\mathscr{A},\mathscr{B})$-medibles será notado por $\mathcal{M}(X,\mathscr{A},Y,\mathscr{B})$.

Si $X=\{a,b,c\}$ y $Y=\{\alpha,\beta,\gamma\}$ con $\mathscr{A}=\{\emptyset,\{a\},\{b,c\},X\}$ y $\mathscr{B}=\mathcal{P}(Y)$

$\Longrightarrow f:X\longrightarrow Y,\ f(a)=f(b)=f(c)=\alpha$ es una función $(\mathscr{A},\mathscr{B})$-medible.

¿Cómo hacer que las funciones *interesantes* sean medibles?

Definición 2 (Funciones Borelianas) *Si X,Y son dos espacios topológicos dotados de sus σ-álgebras borelianas, las funciones $(\mathcal{B}or(X),\mathcal{B}or(Y))$-medibles serán llamadas funciones Borelianas.*

- Ejemplo: las funciones indicatrices $\mathbb{1}_A$ con $A\subset X$ un abierto son funciones borelianas.
- El espacio de llegada Y será uno de los espacios topológicos $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\overline{\mathbb{R}}_+$ o $\overline{\mathbb{R}}$.

¿Qué ventajas tiene este concepto de medibilidad de funciones?...Vamos a verlo con las propiedades que siguen!

$\Longrightarrow$ Las funciones medibles en este sentido son los candidatos naturales para ser las funciones Lebesgue-integrables

Proposición 1 *Sean $(X,\mathscr{A})$ y $(Y,\mathscr{B})$ dos espacios medibles y $\mathcal{K}\subset\mathcal{P}(Y)$ t.q. $\sigma(\mathcal{K})=\mathscr{B}$.*
Una aplicación $f:X\longrightarrow Y$ es $(\mathscr{A},\mathscr{B})$-medible si y solo si la imagen recíproca de todo elemento de $\mathcal{K}$ es un elemento de $\mathscr{A}$.

Moraleja: para comprobar la medibilidad de una función $f:X\longrightarrow Y$, es suficiente hacerlo sobre una familia de partes que engendra la σ-álgebra con la cual está dotada el conjunto Y.

Prueba. Es suficiente notar que $f^{-1}(\mathscr{B})=f^{-1}(\sigma(\mathcal{K}))=\sigma(f^{-1}(\mathcal{K}))$.

■

Proposición 2 *Sean $(X,\mathscr{A})$, $(Y,\mathscr{B})$ y $(Z,\mathscr{C})$ tres espacios medibles y sean $f:X\longrightarrow Y$ y $g:Y\longrightarrow Z$ dos aplicaciones $(\mathscr{A},\mathscr{B})$- y $(\mathscr{B},\mathscr{C})$-medibles respectivamente. Entonces la aplicación $g\circ f:X\longrightarrow Z$ es $(\mathscr{A},\mathscr{C})$-medible.*

Prueba. Sea $C\in\mathscr{C}\Longrightarrow g^{-1}(C)\in\mathscr{B}$ por hipótesis $\Longrightarrow (g\circ f)^{-1}(C)=f^{-1}(g^{-1}(C))\in\mathscr{A}$, de donde se deduce la $(\mathscr{A},\mathscr{C})$-medibilidad de $g\circ f$.

■

Proposición 3 (Criterio de medibilidad) *Sea $(X,\mathscr{A})$ un espacio medible.*

1) La aplicación $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ o $\overline{\mathbb{R}}_+$ es $(\mathscr{A},\mathcal{B}or(\mathbb{R}))$-medible o $(\mathscr{A},\mathcal{B}or(\overline{\mathbb{R}}_+))$-medible si y solo si, para todo real (o hasta para todo racional) α, el conjunto $\{x\in X : f(x)>\alpha\}$ es $\mathscr{A}$-medible.
La condición $>$ puede ser reemplazada por cualquiera de los símbolos $\leq$, $\geq$ o $<$.

2) Una función $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es $(\mathscr{A},\mathcal{B}or(\mathbb{R}^n))$-medible si y solo si cada una de sus componentes es $(\mathscr{A},\mathcal{B}or(\mathbb{R}))$-medible.

3) En particular, una función $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ será medible si y solo si sus partes reales e imaginarias son medibles.

Prueba.

1. La proposición 1 + los intervalos $(\alpha,+\infty[$ o $]-\infty,\alpha)$ generan los borelianos de $\mathbb{R} \Longrightarrow \{x\in X : f(x)>\alpha\}$ es $\mathscr{A}$-medible.

2. $\Longrightarrow$ si f es $(\mathscr{A},\mathcal{B}or(\mathbb{R}^n))$-medible entonces las funciones $f_i=\pi_i\circ f$ con $i=1,...,n$ en donde π_i son las proyecciones canónicas, son $(\mathscr{A},\mathcal{B}or(\mathbb{R}))$-medibles por composición.

   $\Longleftarrow$ si las funciones f_i son $(\mathscr{A},\mathcal{B}or(\mathbb{R}))$-medibles, entonces el conjunto

   $$\{x\in X : f(x)\in I_1\times\cdots\times I_n\} = \{x\in X : f_1(x)\in I_1\}\cap\cdots\cap\{x\in X : f_n(x)\in I_n\}$$

   es $\mathscr{A}$-medible para todos los intervalos abiertos I_i. Dado que el conjunto de adoquines abiertos del tipo $I_1\times\cdots\times I_n$ generan la σ-álgebra de los borelianos de $\mathbb{R}^n$ tenemos por la proposición 1 que la función f es $(\mathscr{A},\mathcal{B}or(\mathbb{R}^n))$-medible.

3. Observamos que $\mathbb{C}$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^2 \Longrightarrow \Re e(f)=\pi_1\circ f$ y $\Im m(f)=\pi_2\circ f$ y aplicar el punto 2.

■

Proposición 4 *Sea $(X,\mathscr{A})$ un espacio medible y sean $f,g : X \longrightarrow \mathbb{K}$ dos aplicaciones medibles. Entonces*

1) las funciones suma $f+g$ y producto fg son medibles,

2) si f no se anula, la función $1/f$ es medible,

3) si f y g son a valores reales, las funciones $\max(f,g)$ y $\min(f,g)$ son medibles,

4) para todo $p>0$ la función $|f|^p$ es medible.

Prueba.

1. Caso $\mathbb{K}=\mathbb{R} \Longrightarrow f+g$ es la composición de $x\longmapsto(f(x),g(x))$ de X en $\mathbb{R}^2$ y de $(y_1,y_2)\longmapsto y_1+y_2$ que es continua y por lo tanto medible. Para la aplicación producto fg se procede similarmente.

2. La función $1/f$ resulta de la composición de f y de $1/z$ que es continua de $\mathbb{K}\setminus\{0\}$ en $\mathbb{K}$.

3. El tercer punto es evidente y es dejado al lector en ejercicio.

4. $|f|^p$ es la aplicación compuesta de f y de $z\longmapsto|z|^p$ que es continua de $\mathbb{K}$ en $\mathbb{K}$ y por lo tanto medible.

■

1.1. Propiedades de las funciones medibles

Utilidad de las funciones medibles $\Longrightarrow$ Estabilidad con respecto a las operaciones numerables

Lema 1 *Sea $(X, \mathscr{A})$ un espacio medible. Si $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ es una función medible entonces las funciones determinadas por*

$$f^+(x) = \text{máx}(f(x), 0) \qquad y \qquad f^-(x) = \text{máx}(-f(x), 0) \qquad \textit{son medibles.} \tag{1}$$

Prueba. f^+ es la composición de f y de $x \longmapsto x^+$, dos funciones medibles.

■

Teorema 1 (Estabilidad numerable de las funciones medibles) *Sea $(X, \mathscr{A})$ un espacio medible y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles definidas sobre X a valores en $\mathbb{K}$. Entonces*

1) Las funciones $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ y $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ son funciones medibles.

2) Las funciones $\liminf\limits_{n\to+\infty} f_n$ y $\limsup\limits_{n\to+\infty} f_n$ son medibles.

3) La función $f = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n$ (cuyo dominio de definición es $\{x \in X : \limsup\limits_{n\to+\infty} f_n = \liminf\limits_{n\to+\infty} f_n\}$) es una función medible.

4) La suma numerable de una serie de funciones medibles que converge en cada punto define una función medible.

Demostración. Por la proposición 3, basta considerar el caso real.

1) Para la medibilidad de $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$ y $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ basta estudiar $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ pues $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) = -\inf_{n\in\mathbb{N}}(-f_n(x))$. Entonces la medibilidad de $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ se deduce de la identidad

$$\{x \in X : \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) > t\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x \in X : f_n(x) > t\} \qquad \text{válida para todo } t \in \mathbb{R}$$

En efecto, se tiene que $\{x \in X : f_n(x) > t\} \in \mathscr{A}$ y la unión $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{x \in X : f_n(x) > t\}$ pertenece a la σ-álgebra $\mathscr{A}$.

2) Dado que por definición tenemos

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to+\infty} f_n(x) &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} f_k(x) \\ \limsup_{n\to+\infty} f_n(x) &= \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} f_k(x), \end{aligned}$$

la medibilidad de estas funciones se deduce del punto anterior.

3) Notemos X_0 el dominio de definición de $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n$; de manera que por la proposición 3.2.4 del folleto tenemos $X_0 \in \mathscr{A}$. Dado que se tiene

$$\{x \in X_0 : \lim_{n\to+\infty} f_n(x) \leq t\} = X_0 \cap \{x \in X : \limsup_{n\to+\infty} f_n(x) \leq t\},$$

se obtiene la medibilidad de $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$.

4) Basta escribir $f_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x)$ y observar que $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$.

■

$\Longrightarrow$ Aquí se puede ver la utilidad de las propiedades de las σ-álgebras!

1.2. Propiedades válidas en μ-casi todas partes

$\Longrightarrow$ Hay que tomar en cuenta los conjuntos μ-despreciables. Aquí intervienen las medidas...

Definición 3 (Propiedades válidas μ-c.t.p.) *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido. Decimos que una propiedad $P(x)$ que depende de un punto $x \in X$ es válida* μ-casi en todas partes *si el conjunto de los $x \in X$ en donde ésta propiedad no está verificada es un conjunto de μ-medida nula o si es un conjunto μ-despreciable.*

Por ejemplo, para una función f definida sobre un espacio medido $(X, \mathscr{A}, \mu)$ a valores reales, escribiremos $f(x) = 0$ μ-c.t.p. si el conjunto $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$ es μ-despreciable.

Definición 4 (Funciones iguales μ-c.t.p.) *Si $(X, \mathscr{A}, \mu)$ es un espacio medido y si $f, g : X \longrightarrow \mathbb{K}$ son dos funciones, diremos que f y g son iguales μ-casi todas partes y lo notaremos "$f = g$ μ-c.t.p." si*

$$\mu(\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}) = 0.$$

$\Longrightarrow$ $\mathbb{1}_{\mathbb{I}\cap[0,1]}$ es igual λ-casi en todas partes a la función $\mathbb{1}_{[0,1]}$

$\Longrightarrow$ $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ es nula λ-casi en todas partes.

Proposición 5 *Sean $f, g : X \longrightarrow \mathbb{K}$. La relación determinada por $f = g$ μ-c.t.p. y notada $f\mathcal{R}_\mu g$ es una relación de equivalencia sobre las funciones de $\mathscr{F}(X, \mathbb{K})$. Además esta relación de equivalencia $\mathcal{R}_\mu$ es compatible con la estructura vectorial de $\mathbb{K}$ en el sentido siguiente:*

1) si $f = g$ μ-c.t.p. entonces $\alpha f = \alpha g$ μ-c.t.p. para todo $\alpha \in \mathbb{K}$;

2) si $f = g$ μ-c.t.p. y $\psi = \varphi$ μ-c.t.p. entonces $f + \psi = g + \varphi$ μ-c.t.p.

Prueba. Verifiquemos que la relación $\mathcal{R}_\mu$ es efectivamente una relación de equivalencia:

- Para toda función $f \in \mathscr{F}(X, \mathbb{K})$ se tiene $f\mathcal{R}_\mu f$. En efecto $\{x \in X : f(x) \neq f(x)\} = \emptyset \Longrightarrow \mathcal{R}_\mu$ es reflexiva.
- La simetría de $\mathcal{R}_\mu$ es inmediata, si $f\mathcal{R}_\mu g$ se tiene $g\mathcal{R}_\mu f$ por definición.
- La transitividad de $\mathcal{R}_\mu$ (es decir $f\mathcal{R}_\mu g$ y $g\mathcal{R}_\mu h \Longrightarrow f\mathcal{R}_\mu h$) se deduce de la inclusión

$$\{x \in X : f(x) \neq h(x)\} \subset \{x \in X : f(x) \neq g(x)\} \cup \{x \in X : g(x) \neq h(x)\};$$

  y del hecho que la unión de conjuntos despreciables es despreciable.

La compatibilidad con la estructura vectorial es evidente y dejada al lector.

■

Definición 5 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido y sea $f \in \mathscr{F}(X, \mathbb{K})$. La clase de equivalencia de f con respecto a $\mathcal{R}_\mu$ es el conjunto determinado por $\{g \in \mathscr{F}(X, \mathbb{K}) : f\mathcal{R}_\mu g\}$. Un representante de esta clase de equivalencia será notado $[f]$.*

Proposición 6 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido y sea $\mathscr{F}(X, \mathbb{K})$ el conjunto de todas las funciones definidas sobre X a valores en $\mathbb{K}$. El espacio cociente $\mathscr{F}(X, \mathbb{K})/\mathcal{R}_\mu$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial.*

Prueba. Por la proposición anterior, no es difícil ver que la función nula μ-c.t.p. $[0]$ pertenece al espacio $\mathscr{F}(X, \mathbb{K})/\mathcal{R}_\mu$. Además si $[f]$, $[g]$ pertenecen a $\mathscr{F}(X, \mathbb{K})/\mathcal{R}_\mu$, se tiene $\alpha[f] + \beta[g] = [\alpha f + \beta g]$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, lo que termina la demostración.

■

Definición 6 (Convergencia μ-c.t.p.) *Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones definidas sobre un espacio medido $(X, \mathscr{A}, \mu)$ a valores en $\mathbb{K}$ y si f es una función definida sobre $(X, \mathscr{A}, \mu)$, entonces diremos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en μ-c.t.p. si el conjunto de puntos en donde la relación $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$ falla es μ-despreciable. Notaremos este tipo de convergencia de esta manera: "$f_n \longrightarrow f$ μ-c.t.p.".*

2. Construcción de la integral de Lebesgue

Aquí empieza lo bueno: utilizaremos todas las propiedades de las funciones medibles y de las medidas.

Procederemos en **3** partes:

(Parte 1) Empezamos contruyendo una integral para funciones *simples positivas*

(Parte 2) Por un argumento de paso al límite definimos una integral para funciones *medibles positivas*

(Parte 3) Terminamos considerando funciones *generales*

* * *

¿Pero qué es una función *simple*?

Definición 7 (Función simple - Espacio de funciones simples) *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido de medida σ-finita. Las funciones simples son combinaciones lineales finitas de funciones indicatrices de conjuntos medibles:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \mathbb{1}_{A_k}(x);$$

con $\alpha_k \in \mathbb{K}$ y A_k una colección de conjuntos disjuntos de $\mathscr{A}$.

Notaremos $\mathcal{S}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ el conjunto de funciones simples definidas sobre X a valores en $\mathbb{K}$.

$\Longrightarrow$ Las funciones simples son los "ladrillos" de base para la construcción de la integral de Lebesgue.

Observación 1 Notar la gran diferencia entre los "ladrillos" de base de Riemann y de Lebesgue: sobre el espacio medido $(\mathbb{R}, \mathcal{B}or(\mathbb{R}), \lambda)$ se tiene que $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ es una función simple, pero no una función escalonada.

Definición 8 (Espacio de funciones simples positivas) *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido. Notaremos $\mathcal{S}^+(X, \mathscr{A}, \mu)$ el conjunto de funciones simples positivas definidas sobre X a valores en $\mathbb{R}_+$.*

Construcción de la integral (Parte 1)

Definición 9 (Integral de funciones simples positivas) *Sea $f \in \mathcal{S}^+(X, \mathscr{A}, \mu)$ una función simple positiva. La* integral *de f con respecto a la medida μ es el número definido por*

$$\int_X f(x)d\mu(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \; \mu(f^{-1}(\alpha_k)) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \mu(\{f = \alpha_k\}). \tag{2}$$

- Si el conjunto $\{x \in X : f(x) = 0\}$ es de medida infinita, utilizaremos la convención $0 \times +\infty = 0$.
- Esta suma es igual a un número positivo ó $+\infty$.
- Diremos que una función simple positiva f es *integrable* si su integral es finita; es decir si y solo si el conjunto $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$ es de medida finita.

Observación 2 Nótese en particular que la fórmula (2) aplicada a la función $f(x) = \mathbb{1}_A(x)$ definida sobre X con $A \in \mathscr{A}$ nos permite escribir, utilizando un abuso de lenguaje, las relaciones siguientes:

$$\int_X \mathbb{1}_A(x)d\mu(x) = \int_{X \cap A} d\mu = \int_A d\mu = \mu(A).$$

Proposición 7 *Sean f, g dos funciones de $\mathcal{S}^+(X, \mathscr{A}, \mu)$. Tenemos las propiedades siguientes*

1) si $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces $\int_X (\lambda f)(x) d\mu(x) = \lambda \int_X f(x) d\mu(x)$ (homogeneidad);

2) $\int_X (f+g)(x) d\mu(x) = \int_X f(x) d\mu(x) + \int_X g(x) d\mu(x)$ (aditividad);

3) si $f \leq g$ μ-c.t.p se tiene entonces $\int_X f(x) d\mu(x) \leq \int_X g(x) d\mu(x)$ (crecimiento o monotonía).

Prueba. Sean pues $f(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}(x)$ y $g(x) = \sum_{j=0}^{m} \beta_j \mathbb{1}_{B_j}(x)$ dos funciones simples. Podemos suponer que los conjuntos A_i son dos a dos disjuntos y que se tiene $\bigcup_i A_i = \bigcup_j B_j$.

1. El primer punto se deduce de los cálculos siguientes:

$$\int_X (\lambda f)(x) d\mu(x) = \sum_{i=0}^{n} \lambda \alpha_i \mu(A_i) = \lambda \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \mu(A_i) = \lambda \int_X f(x) d\mu(x).$$

2. Para el segundo punto escribimos

$$\begin{aligned} \int_X (f+g)(x) d\mu(x) &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} (\alpha_i + \beta_j)\mu(A_i \cap B_j) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} \alpha_i \mu(A_i \cap B_j) + \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} \beta_j \mu(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \mu(A_i) + \sum_{j=0}^{m} \beta_j \mu(B_j) = \int_X f(x) d\mu(x) + \int_X g(x) d\mu(x). \end{aligned}$$

3. Si $f \leq g$ entonces $g - f$ es una función de $\mathcal{S}^+(X, \mathscr{A}, \mu)$ y por lo tanto se tiene que

$$\begin{aligned} \int_X g(x) d\mu &= \int_X (f + (g-f))(x) d\mu(x) \\ &= \int_X f(x) d\mu(x) + \int_X (g-f)(x) d\mu(x) \geq \int_X f(x) d\mu(x). \end{aligned}$$

■

Este teorema es el primero que nos presenta la posibilidad de intercambiar los signos “lím” y “$\int$”.

Teorema 2 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido y sean $f \in \mathcal{S}^+(X, \mathscr{A}, \mu)$ y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de funciones de $\mathcal{S}^+(X, \mathscr{A}, \mu)$ tales que para todo $x \in X$ se tenga $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$. Entonces se tiene*

$$\int_X f(x) d\mu(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n(x) d\mu(x).$$

Demostración. Dado que la sucesión es creciente, se tiene por la proposición 7 la siguiente sucesión de estimaciones

$$\int_X f_0(x) d\mu(x) \leq \int_X f_1(x) d\mu(x) \leq ... \leq \int_X f(x) d\mu(x),$$

lo que implica que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu$ existe y verifica

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n(x) d\mu(x) \leq \int_X f(x) d\mu(x). \tag{3}$$

Debemos pues ahora verificar la desigualdad opuesta. Para ello fijamos un real $\varepsilon \in]0, 1[$, dado que f se escribe de la forma $f(x) = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}(x)$ podemos definir, para cada n y cada i el conjunto

$$A_{n,i} = \{x \in A_i : f_n(x) \geq (1-\varepsilon)\alpha_i\};$$

de manera que cada $A_{n,i}$ es un conjunto $\mathscr{A}$-medible. Se tiene además que la sucesión $(A_{n,i})_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente y satisface $A_i = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{n,i}$.

Si definimos ahora la función $g_n(x) = \sum_{i=0}^{m}(1-\varepsilon)\alpha_i \mathbb{1}_{A_{n,i}}(x)$ entonces g_n pertenece a $\mathcal{S}^+(X,\mathscr{A},\mu)$ y verifica $g_n \leq f_n$. Obtenemos por lo tanto que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X g_n(x)d\mu(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{m}(1-\varepsilon)\alpha_i\mu(A_{n,i}),$$

y por el teorema de continuidad de las medidas podemos escribir

$$\sum_{i=0}^{m}(1-\varepsilon)\alpha_i \lim_{n\to+\infty} \mu(A_{n,i}) = \sum_{i=0}^{m}(1-\varepsilon)\alpha_i\mu(A_i) = (1-\varepsilon)\int_X f(x)d\mu(x).$$

Se obtiene entonces, por la propiedad de crecimiento de la integral, la desigualdad siguiente

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X g_n(x)d\mu(x) = (1-\varepsilon)\int_X f(x)d\mu(x) \leq \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n(x)d\mu(x).$$

Como el real ε era arbitrario, se deduce de estas fórmulas la estimación

$$\int_X f(x)d\mu(x) \leq \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n(x)d\mu(x). \tag{4}$$

Finalmente, juntando las estimaciones (3) y (4) terminamos la demostración del teorema.

■

Construcción de la integral (Parte 2)

Objetivo: Pasar de las funciones simples a las funciones medibles.

Teorema 3 (Aproximación por funciones simples crecientes) *Sea $(X,\mathscr{A},\mu)$ un espacio medido y sea A un subconjunto de X que pertenece a $\mathscr{A}$. Si $f : A \longrightarrow [0,+\infty]$ es una función medible, entonces existe una sucesión creciente $(f_n)_{n\geq 1}$ de funciones simples positivas tales que $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$ para todo $x \in A$.*

Demostración. Para cada n y para cada $k = 1, 2, ..., n2^n$ definimos los conjuntos

$$A_{n,k} = \{x \in A : (k-1)/2^n \leq f(x) < k/2^n\}.$$

Observemos que la medibilidad de la función f implica que cada uno de estos conjuntos $A_{n,k}$ pertenece a la σ-álgebra $\mathscr{A}$.

Definimos una sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ de funciones definidas sobre A exigiendo que f_n tome el valor $(k-1)/2^n$ en cada punto de $A_{n,k}$ para todo $k = 1, ..., n2^n$ y que tome el valor n en cada punto de $A \setminus \cup_k A_{n,k}$.

Estas funciones son funciones simples positivas, medibles, crecientes y verifican $f = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n$.

■

Definición 10 (Integral de funciones medibles positivas) *Sea $(X,\mathscr{A},\mu)$ un espacio medido. Sea f una aplicación $\mathscr{A}$-medible definida sobre X a valores en $\overline{\mathbb{R}}_+$, es decir $f \in \mathcal{M}(X,\mathscr{A},\overline{\mathbb{R}}_+,\mathcal{B}or(\overline{\mathbb{R}}_+))$. Su integral es el elemento de $\overline{\mathbb{R}}_+$ notado $\int_X f(x)d\mu(x)$ y definido por*

$$\int_X f(x)d\mu(x) = \sup\left\{\int_X \varphi(x)d\mu(x) : \quad \varphi \in \mathcal{S}^+(X,\mathscr{A},\mu), \;\; \varphi \leq f\right\}. \tag{5}$$

Proposición 8 *Sean $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido, $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ una función $\mathscr{A}$-medible y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de funciones de $\mathcal{S}^+(X, \mathscr{A}, \mu)$ tales que $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$ para todo $x \in X$. Entonces*

$$\int_X f(x)d\mu(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n(x)d\mu(x).$$

Prueba. La existencia del límite y la estimación

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n(x)d\mu(x) \leq \int_X f(x)d\mu(x)$$

siguen los mismo pasos explicados en el teorema 2 de manera que dejamos los detalles al lector.

Nos concentramos en la estimación siguiente:

$$\int_X f(x)d\mu(x) \leq \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n(x)d\mu(x). \tag{6}$$

Puesto que, por definición de la integral de las funciones medibles positivas, tenemos que $\int_X f d\mu$ es el supremo de los elementos de $[0, +\infty]$ de la forma $\int_X \varphi(x)d\mu(x)$ en donde las funciones φ pertenecen a $\mathcal{S}^+(X, \mathscr{A}, \mu)$ y verifican $\varphi \leq f$; entonces, para verificar (6), es necesario verificar que para una función φ cualquiera de $\mathcal{S}^+(X, \mathscr{A}, \mu)$ que satisface $\varphi \leq f$ también verifica

$$\int_X \varphi(x)d\mu(x) \leq \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n(x)d\mu(x).$$

Sea pues $\psi \in \mathcal{S}^+(X, \mathscr{A}, \mu)$ una función cualquiera que verifica $\psi \leq f$. Dado que la sucesión $\min(\psi, f_n)$ es creciente, pertenece a $\mathcal{S}^+(X, \mathscr{A}, \mu)$ y verifica $\lim\limits_{n\to+\infty} \min(\psi, f_n) = \psi$, entonces por el teorema 2 se tiene

$$\int_X \psi(x)d\mu(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_X \min(\psi, f_n)(x)d\mu(x).$$

Sin embargo, puesto que $\int_X \min(\psi, f_n)(x)d\mu(x) \leq \int_X f_n(x)d\mu(x)$ por la propiedad de crecimiento de la integral de funciones simples, se obtiene la desigualdad

$$\int_X \psi(x)d\mu(x) \leq \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n(x)d\mu(x).$$

Como esta estimación es válida para todas las funciones ψ se deduce la desigualdad (6), de donde se obtiene el resultado deseado.

■

Proposición 9 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido. Sean f y g dos funciones medibles definidas sobre un conjunto X a valores sobre $[0, +\infty]$.*

1) si $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces $\int_X (\lambda f)(x)d\mu(x) = \lambda \int_X f(x)d\mu(x)$ (homogeneidad);

2) $\int_X (f + g)(x)d\mu(x) = \int_X f(x)d\mu(x) + \int_X g(x)d\mu(x)$ (aditividad);

3) si $f \leq g$ μ-c.t.p se tiene entonces $\int_X f(x)d\mu(x) \leq \int_X g(x)d\mu(x)$ (crecimiento).

2.1. Construcción de la integral (Parte 3): Espacio de funciones integrables

- Utilizaremos en el caso real las funciones $f^+ = \text{máx}(f, 0)$ y $f^- = \text{máx}(-f, 0)$.
- En el caso complejo utilizaremos $f(x) = \Re e(f)(x) + i\Im m(f)(x)$.

Definición 11 (Funciones integrables - Espacio de funciones integrables) *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido. Sea $f : X \longrightarrow [-\infty, +\infty]$ una función medible.*

*1) Diremos que f es μ-*integrable *si*

$$\int_X f^+(x)d\mu(x) < +\infty \qquad y \qquad \int_X f^-(x)d\mu(x) < +\infty \tag{7}$$

$$\Longrightarrow \quad \int_X f(x)\, d\mu(x) = \int_X f^+(x)d\mu(x) - \int_X f^-(x)d\mu(x). \tag{8}$$

2) En el caso de que f sea a valores complejos, diremos que f es μ-integrable si

$$\int_X \Re e\,(f)(x)d\mu(x) < +\infty \qquad y \qquad \int_X \Im m\,(f)(x)d\mu(x) < +\infty$$

$$\Longrightarrow \quad \int_X f(x)\, d\mu(x) = \int_X \Re e\,(f)(x)d\mu(x) + i \int_X \Im m\,(f)(x)d\mu(x). \tag{9}$$

Finalmente, el conjunto de funciones integrables será notado $\mathcal{I}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$.

Observación 3 Para las funciones medibles positivas que no son μ-integrables hemos atribuido el símbolo $+\infty$ a su integral. Para una función f a valores reales o complejos no existe una extensión de esta notación: no se puede dar un sentido a la expresión $\infty - \infty$. Es necesario verificar primero la sumabilidad de f antes de hablar de su integral. En el caso especial en que una sola de las dos cantidades de la fórmula (7) sea finita, diremos que la integral definida por (8) *existe* y es infinita.

Lema 2 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido y sean f_1, f_2, g_1, g_2 funciones reales positivas integrables definidas sobre X tales que $f_1 - f_2 = g_1 - g_2$. Entonces se tiene*

$$\int_X f_1(x)d\mu(x) - \int_X f_2(x)d\mu(x) = \int_X g_1(x)d\mu(x) - \int_X g_2(x)d\mu(x).$$

Proposición 10 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido, $\lambda \in \mathbb{K}$ y f, g dos funciones de $\mathcal{I}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$. Se tienen los puntos siguientes:*

1) λf es integrable y la integral es homogénea

$$\int_X \lambda f(x)d\mu(x) = \lambda \int_X f(x)d\mu(x) \tag{10}$$

2) $f + g$ es integrable y la integral es lineal

$$\int_X (f + g)(x)d\mu(x) = \int_X f(x)d\mu(x) + \int_X g(x)d\mu(x), \tag{11}$$

3) si $f \leq g$ entonces la integral es creciente

$$\int_X f(x)d\mu(x) \leq \int_X g(x)d\mu(x).$$

Prueba. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que las aplicaciones y el escalar α son a valores reales.

1. La integrabilidad de λf y la relación (10) son evidentes si $\lambda = 0$. Suponemos pues que $\lambda > 0$ y vemos que $(\lambda f)^+ = \lambda f^+$ y $(\lambda f)^- = \lambda f^-$. Entonces las funciones $(\lambda f)^+$ y $(\lambda f)^-$ son integrables y por lo tanto λf es integrable. Tenemos ahora, aplicando la proposición 9 a estas funciones, las identidades

$$\begin{aligned}\int_X \lambda f(x)d\mu(x) &= \int_X (\lambda f)^+(x)d\mu(x) - \int_X (\lambda f)^-(x)d\mu(x)\\ &= \lambda \int_X f^+(x)d\mu(x) - \lambda \int_X f^-(x)d\mu(x) = \lambda \int_X f(x)d\mu(x),\end{aligned}$$

lo que demuestra la identidad (10) en este caso. Si $\lambda < 0$, entonces $(\lambda f)^+ = -\lambda f^-$ y $(\lambda f)^- = -\lambda f^+$, de manera que se puede adaptar el razonamiento anterior para mostrar que λf es integrable y que $\int_X \lambda f(x)d\mu(x) = \lambda \int_X f(x)d\mu(x)$.

2. Observando que se tienen las desigualdades

$$(f+g)^+ \leq f^+ + g^+ \qquad \text{y} \qquad (f+g)^- \leq f^- + g^-,$$

podemos aplicar la proposición 9 para obtener

$$\begin{aligned}\int_X (f+g)^+(x)d\mu(x) &\leq \int_X f^+(x)d\mu(x) + \int_X g^+(x)d\mu(x) < +\infty\\ \int_X (f+g)^-(x)d\mu(x) &\leq \int_X f^-(x)d\mu(x) + \int_X g^-(x)d\mu(x) < +\infty.\end{aligned}$$

Deducimos entonces que $f+g$ es integrable. Dado que $f+g$ es igual a $(f+g)^+-(f+g)^-$ y a $f^++g^+-(f^-+g^-)$ obtenemos por el lema 2 las identidades siguientes

$$\int_X (f+g)(x)d\mu(x) = \int_X (f^+ + g^+)(x)d\mu(x) - \int_X (f^- + g^-)(x)d\mu(x)$$

es decir

$$\int_X (f+g)(x)d\mu(x) = \int_X f(x)d\mu(x) + \int_X g(x)d\mu(x)$$

3. Notamos que si $f \leq g$, entonces la función $g - f$ es positiva y por lo tanto se tiene

$$0 \leq \int_X (g-f)(x)d\mu(x) = \int_X g(x)d\mu(x) - \int_X f(x)d\mu(x)$$

es decir

$$\int_X f(x)d\mu(x) \leq \int_X g(x)d\mu(x).$$

■

Proposición 11 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido y sean $f, g : X \longrightarrow [-\infty, +\infty]$ dos funciones $(\mathscr{A}, \mathcal{B}or(\mathbb{R}))$-medibles iguales en μ-casi todas partes. Si una de estas funciones es sumable entonces la otra también lo es y se tiene la identidad*

$$\int_X f(x)d\mu(x) = \int_X g(x)d\mu(x).$$

Este resultado se extiende al caso cuando f, g son a valores en $\mathbb{K}$.

Prueba. Consideremos primero el caso en donde f y g son funciones positivas y definamos el conjunto $\mathcal{N} = \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$ y la función h por

$$h(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } x \in \mathcal{N}\\ 0 & \text{si } x \notin \mathcal{N}.\end{cases}$$

Tenemos entonces, aplicando la proposición 8 a la sucesión $h_n(x) = n\mathbb{1}_{\mathcal{N}}(x)$ (que tiende de forma creciente hacia h), que

$$\int_X h(x)d\mu(x) = 0.$$

Gracias a este hecho, por la estimación $f \leq g + h$ y por la proposición 10 obtenemos la desigualdad

$$\int_X f(x)d\mu(x) \leq \int_X g(x)d\mu(x) + \int_X h(x)d\mu(x) = \int_X g(x)d\mu(x).$$

Utilizando un argumento totalmente similar tenemos la estimación

$$\int_X g(x)d\mu(x) \leq \int_X f(x)d\mu(x).$$

El caso cuando f y g no son necesariamente positivas puede obtenerse de las líneas precedentes utilizando para ello las descomposiciones $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ y $g(x) = g^+(x) - g^-(x)$. Cuando las funciones f, g son a valores en $\mathbb{K}$ se procede de forma similar utilizando la definición (11).

$\blacksquare$

Observación 4 En particular, si se modifica una función sobre un conjunto de medida nula, el valor de su integral permanece el mismo.

Proposición 12 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido y sea f una función $(\mathscr{A}, \mathcal{B}or(\mathbb{K}))$-medible definida sobre X a valores en $\mathbb{K}$. Entonces f es integrable si y solo si $|f|$ es integrable y entonces se tiene la estimación*

$$\left|\int_X f(x)\, d\mu(x)\right| \leq \int_X |f(x)|d\mu(x). \tag{12}$$

Prueba. Recuérdese que en el caso real por definición una función f es integrable si y solo si las aplicaciones f^+ y f^- lo son. Dado que $|f| = f^+ + f^-$ se obtiene por la proposición 9 la integrabilidad de $|f|$. La estimación buscada se deduce entonces de los cálculos siguientes

$$\left|\int_X f\, d\mu\right| = \left|\int_X f^+\, d\mu - \int_X f^-\, d\mu\right| \leq \int_X f^+ d\mu + \int_X f^- d\mu = \int_X |f| d\mu.$$

$\blacksquare$

2.2. Integración en un subconjunto

En toda esta sección consideraremos $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido, Y un conjunto $\mathscr{A}$-medible y f una aplicación definida sobre Y a valores en $\mathbb{K}$.

- Tomar en cuenta la medida inducida por μ sobre el conjunto Y y estudiar la integral con respecto al espacio medido $(Y, \mathscr{A}_{|Y}, \mu_{|Y})$: si la función f es $\mathscr{A}_{|Y}$-medible podemos definir la integral sobre Y de la siguiente forma

$$\int_Y f(x)d\mu(x) = \int_Y f(x)d\mu_{|Y}(x);$$

de manera que disponemos de todas las propiedades de la integral explicitadas anteriormente.

- Este tipo de integral siempre puede expresarse como una integral sobre todo el conjunto X.

$\Longrightarrow$ Introducimos la función f_Y definida sobre X, igual a f sobre Y y a 0 en $X \setminus Y$.

Proposición 13 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido, sea Y un conjunto $\mathscr{A}$-medible. Entonces la función f pertenece al espacio $\mathcal{I}(Y, \mathcal{A}_{|_Y}, \mu_{|_Y}, \mathbb{K})$ si y solo si la función f_Y pertenece a $\mathcal{I}(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{K})$ y se tiene*

$$\int_Y f(x) d\mu_{|_Y}(x) = \int_X f_Y(x) d\mu(x).$$

Prueba. Sea $f(x) = \mathbb{1}_A(x)$ en donde $A \subset Y$ es un conjunto $\mathscr{A}_{|_Y}$-medible. Tenemos entonces $f_Y(x) = \mathbb{1}_A(x)$ de donde se deduce la identidad

$$\int_Y f(x) d\mu_{|_Y}(x) = \mu_{|_Y}(A) = \mu(A) = \int_X \mathbb{1}_A(x) d\mu(x) = \int_X f_Y(x) d\mu(x).$$

Por linealidad de la integral se obtiene este resultado para toda función simple positiva. Repetimos aquí las mismas etapas utilizadas en la construcción de la integral para mostrar este resultado para las funciones positivas, para las funciones reales utilizando f^+ y f^- y para las funciones complejas considerando $\Re e(f)$ y $\Im m(f)$ sucesivamente.

■

Definición 12 (Restricción) *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido, sea $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$. Si $A \in \mathscr{A}$, definimos la* restricción de f sobre A *como $f_{|_A}(x) = f(x)\mathbb{1}_A(x)$.*

Corolario 1 (Pegatina) *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido y sean $A, B \in \mathscr{A}$ dos conjuntos disjuntos y sea $f : A \cup B \longrightarrow \mathbb{K}$ una función. Entonces*

1) f es $\mathscr{A}_{|_{A\cup B}}$-medible si y solo si $f_{|_A}$ y $f_{|_B}$ son $\mathscr{A}_{|_A}$ y $\mathscr{A}_{|_B}$-medibles respectivamente.

2) f es integrable sobre $A \cup B$ si y solo si f es integrable sobre A y sobre B y se tiene la identidad

$$\int_{A\cup B} f(x) d\mu(x) = \int_A f(x) d\mu(x) + \int_B f(x) d\mu(x)$$

Prueba. Dado que se tienen las expresiones $f_{|_A} = f_{|_{A\cup B}} \mathbb{1}_A$ y $f_{|_B} = f_{|_{A\cup B}} \mathbb{1}_B$ obtenemos $f_{|_{A\cup B}} = f_{|_A} + f_{|_B}$ de donde se deduce sin mayor dificultad el resultado deseado.

■

Proposición 14 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido y sea f una función $\mathscr{A}$-medible definida sobre X a valores en $[0, +\infty]$. Si t es un número real positivo y si definimos $A_t = \{x \in X : f(x) \geq t\}$ entonces se tienen las dos desigualdades siguientes:*

$$\mu(A_t) \leq \frac{1}{t} \int_{A_t} f(x) d\mu(x) \leq \frac{1}{t} \int_X f(x) d\mu(x). \tag{13}$$

Prueba. Sea $t > 0$ un real. Puesto que $X = A_t \cup A_t^c$ tenemos

$$\frac{1}{t} \int_X f(x) d\mu(x) = \frac{1}{t} \int_{A_t} f(x) d\mu(x) + \frac{1}{t} \int_{A_t^c} f(x) d\mu(x) \geq \frac{1}{t} \int_{A_t} f(x) d\mu(x),$$

lo que demuestra la segunda estimación. Para la primera, tenemos directamente que

$$\frac{1}{t} \int_{A_t} f(x) d\mu(x) \geq \frac{1}{t} \int_{A_t} t \, d\mu(x) = \mu(A_t).$$

■

Corolario 2 *Sea* $(X, \mathscr{A}, \mu)$ *un espacio medido y sea* $f \in \mathcal{I}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$. *Entonces:*

1) *tenemos que* $|f(x)| < +\infty$ μ*-casi en todas partes.*

2) *si además se tiene*

$$\int_X |f(x)| d\mu(x) = 0;$$

entonces la función f *es* μ*-c.t.p. idénticamente nula.*

Proposición 15 (Continuidad absoluta de la integral) *Sea* $(X, \mathscr{A}, \mu)$ *un espacio medido y sea* $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ *una función integrable. Entonces la cantidad* $\int_Y f d\mu$ *tiende hacia cero si la medida de* Y *tiende hacia cero:*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall Y \in \mathscr{A}) : \ \mu(Y) \leq \delta \Longrightarrow \int_Y f(x) d\mu(x) \leq \varepsilon.$$

Prueba. Por la definición de integral existe una función simple positiva φ tal que $0 \leq \varphi \leq f$ y $\int_X (f - \varphi)(x) d\mu(x) \leq \varepsilon$. Podemos entonces escribir:

$$\int_Y f(x) d\mu(x) = \int_Y (f - \varphi)(x) d\mu(x) + \int_Y \varphi(x) d\mu(x) \leq \varepsilon + \int_Y \varphi(x) d\mu(x).$$

Esto nos permite concentrar nuestra atención a las funciones simples; entonces como $\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \mathbb{1}_{A_k}(x)$ tenemos

$$\int_Y \varphi(x) d\mu(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \mu(A_k \cap Y) \leq \left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k\right) \mu(Y)$$

y esta estimación nos permite obtener el resultado deseado.

$\blacksquare$

Notación específica de la integral de Lebesgue y dos propiedades importantes

En el caso en que $X = \mathbb{R}$, $\mathscr{A} = \mathcal{B}or(\mathbb{R})$ y $\mu = \lambda$, escribiremos de ahora en adelante dx en vez de $d\lambda(x)$ para designar la integración con respecto a esta medida y si $X = \mathbb{R}^n$, notaremos también dx en vez de $d\lambda_n(x)$. Cuando $a < b$ escribiremos $\int_a^b f(x)dx$ en vez de $\int_{(a,b)} f(x)dx$, nótese que es inútil precisar la naturaleza del intervalo dado que los puntos son de medida nula. En el caso cuando $b < a$ escribiremos

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx = -\int_{(b,a)} f(x)dx.$$

La primera propiedad está relacionada con la *aplicación traslación* que definimos de la siguiente forma para toda función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ y para todo vector $a \in \mathbb{R}^n$:

$$\tau_a(f)(x) = f(a + x). \tag{14}$$

Proposición 16 *Para toda función integrable perteneciente al espacio $\mathcal{I}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), \lambda_n, \mathbb{K})$ y para todo vector $a \in \mathbb{R}^n$ tenemos la identidad:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \tau_a(f)(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx. \tag{15}$$

Prueba. Empecemos considerando una función simple expresada en su descomposición canónica $f(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k \mathbb{1}_{A_k}(x)$. Tenemos entonces que $\tau_a(f)(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k \mathbb{1}_{A_k}(a + x)$ y por lo tanto

$$\int_{\mathbb{R}^n} \tau_a(f)(x)dx = \sum_{k=0}^n \alpha_k \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{A_k}(a + x)dx = \sum_{k=0}^n \alpha_k \mu(A_k - a) = \sum_{k=0}^n \alpha_k \mu(A_k) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx,$$

pues para todo boreliano A y todo vector $a \in \mathbb{R}^n$ se tiene la identidad $\mu(a + A) = \mu(A)$. Siguiendo el proceso de construcción de la integral, podemos generalizar sin problema este resultado a todas las funciones integrables.

■

La segunda propiedad explicita las relaciones entre la dilatación y la integral con respecto a la medida de Lebesgue. Definimos la *dilatación* por un factor $\alpha > 0$ de una función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ por la fórmula

$$\delta_\alpha[f](x) = f(\alpha x) = f(\alpha x_1, ..., \alpha x_n). \tag{16}$$

Proposición 17 *Para toda función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ del espacio $\mathcal{I}(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), \lambda_n, \mathbb{K})$ y para todo $\alpha > 0$ se tiene la identidad*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \delta_\alpha[f](x)dx = \alpha^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx. \tag{17}$$

Prueba. Empecemos otra vez considerando una función simple $f(x) = \sum_{k=0}^n \beta_k \mathbb{1}_{A_k}(x)$. Tenemos entonces $\delta_\alpha[f](x) = \sum_{k=0}^n \beta_k \mathbb{1}_{A_k}(\alpha x)$ de manera que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \delta_\alpha[f](x)dx = \sum_{k=0}^n \beta_k \mu(\alpha^{-1} A_k) = \alpha^{-n} \sum_{k=0}^n \beta_k \mu(A_k) = \alpha^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx$$

pues para todo boreliano A y todo $\alpha > 0$ se tiene la identidad $\mu(\alpha A) = \alpha^n \mu(A)$. La generalización a las funciones integrables es inmediata.

■