Lección n°5: Teoremas clásicos

EPN, verano 2009

Todo el poder de la integral de Lebesgue está condensado en estos resultados.

1. Convergencia monótona

Teorema 1 (Teorema de la convergencia monótona de Beppo Levi) *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido y sean f una función $\mathscr{A}$-medible y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de funciones $\mathscr{A}$-medibles, ambas definidas sobre X a valores en $\overline{\mathbb{R}}_+$, tales que $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$ μ-c.t.p. Entonces*

$$\int_X f(x)d\mu(x) = \lim_{n\to+\infty}\int_X f_n(x)d\mu(x).$$

Demostración.

- La convergencia de la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se tiene en todo punto de X.

  i) Por la monotonía de la integral tenemos:

  $$\int_X f_0(x)d\mu(x) \leq \int_X f_1(x)d\mu(x) \leq ... \leq \int_X f(x)d\mu(x);$$

  por lo tanto la sucesión $\left(\int_X f_n d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (eventualmente hacia $+\infty$) y su límite satisface

  $$\lim_{n\to+\infty}\int_X f_n(x)d\mu(x) \leq \int_X f(x)d\mu(x). \tag{1}$$

  ii) Sea $(g_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de funciones simples tales que $f_n = \lim\limits_{k\to+\infty} g_{n,k}$.

  Definimos $h_n : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ por $h_n = \max(g_{1,n}, g_{2,n}, ..., g_{n,n})$ de manera que la sucesión $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente de funciones simples positivas, $\mathscr{A}$-medibles que satisfacen $h_n \leq f_n$ y $f = \lim\limits_{n\to+\infty} h_n$. Por la proposición 3.2.13 del folleto y por la monoticidad de la integral se deduce que

  $$\int_X f(x)d\mu(x) = \lim_{n\to+\infty}\int_X h_n(x)d\mu(x) \leq \lim_{n\to+\infty}\int_X f_n(x)d\mu(x). \tag{2}$$

  $\Longrightarrow$ Juntando (1) y (2) se obtiene el resultado deseado.

- Solo se tiene la convergencia μ-c.t.p.

  Existe $\mathcal{N}$ que pertenece a $\mathscr{A}$, de μ-medida nula, en donde no se tiene esta convergencia. Vemos que la función $f\mathbb{1}_{\mathcal{N}^c}$ satisface las hipótesis hechas en la primera parte de la demostración:

  $$\int_X f(x)\mathbb{1}_{\mathcal{N}^c}(x)d\mu(x) = \lim_{n\to+\infty}\int_X f_n(x)\mathbb{1}_{\mathcal{N}^c}(x)d\mu(x).$$

  Dado que la función $f_n\mathbb{1}_{\mathcal{N}^c} = f_n$ μ-c.t.p. y que $f\mathbb{1}_{\mathcal{N}^c} = f$ μ-c.t.p., en virtud de la proposición 3.2.16 se tiene en μ-c.t.p. la igualdad

  $$\int_X f(x)d\mu(x) = \lim_{n\to+\infty}\int_X f_n(x)d\mu(x).$$

■

Corolario 1 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido y sea una serie $S = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ cuyos términos f_n son funciones $\mathscr{A}$-medibles definidas sobre $(X, \mathscr{A}, \mu)$ a valores en $\mathbb{R}_+$. Entonces la suma es medible y se tiene la identidad*

$$\int_X \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)d\mu(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_X f_n(x)d\mu(x).$$

Definición 1 (Medida inducida por una función) *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido y sea $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ una función $\mathscr{A}$-medible. Definimos una nueva medida sobre el espacio medible $(X, \mathscr{A})$ de la siguiente manera*

$$\nu(A) = \int_A f(x)d\mu(x).$$

Verificación:

(i) Se tiene $\nu(\emptyset) = 0$ pues $\nu(\emptyset) = \int_\emptyset f(x)d\mu(x) = 0$.

(ii) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos disjuntos de $\mathscr{A}$ y si notamos $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ entonces

$$\nu(A) = \int_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} f(x)d\mu(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{A_n} f(x)d\mu(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(A_n).$$

$\Longrightarrow$ Muy útil para construir nuevas medidas!

Esta definición tiene repercusiones importantes en la teoría de la integración.

2. Lema de Fatou

Teorema 2 (Lema de Fatou) *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones $\mathscr{A}$-medibles definidas sobre X a valores en $\overline{\mathbb{R}}_+$. Entonces se tiene la desigualdad:*

$$\int_X \liminf_{n\to+\infty} f_n(x)d\mu(x) \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_X f_n(x)d\mu(x).$$

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos una nueva función $g_n : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ de la siguiente forma:

$$g_n = \inf_{k\geq n} f_k$$

de manera que cada función g_n es $\mathscr{A}$-medible y se tiene, para todo $x \in X$ las relaciones

$$g_0 \leq g_1 \leq \ldots \qquad \text{y} \qquad \liminf_{n\to+\infty} f_n = \lim_{n\to+\infty} g_n.$$

Puesto que tenemos la mayoración $g_n \leq f_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, al aplicar el teorema de convergencia monótona de Beppo Levi obtenemos

$$\int_X \liminf_{n\to+\infty} f_n(x)d\mu(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_X g_n(x)d\mu(x) \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_X f_n(x)d\mu(x).$$

Lo que termina la demostración.

$\blacksquare$

3. Convergencia dominada

Sin duda el teorema más famoso de la teoría de la integración.

Teorema 3 (Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue (T.C.D.L.)) *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido y sean f una función y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones, ambas $\mathscr{A}$-medibles definidas sobre X a valores en $\overline{\mathbb{R}}$ o $\mathbb{C}$. Hacemos las siguientes hipótesis:*

1) para μ-casi todo $x \in X$ se tiene $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$,

2) existe una función integrable $g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ o $\mathbb{C}$ tal que se tenga, para todo n, la estimación $|f_n(x)| \leq g(x)$ μ-casi en todas partes en X.

Entonces f es una función integrable y

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n(x)d\mu(x) = \int_X f(x)d\mu(x) \tag{3}$$

Demostración.

- La integrabilidad de la función límite f se deduce de la integrabilidad de la función g:

$$\left|\int_X f(x)d\mu(x)\right| \leq \int_X |f(x)|d\mu(x) \leq \int_X g(x)d\mu(x) < +\infty.$$

- Mostremos (3) suponiendo que las dos hipótesis se verifican para todo punto de X y que $g(x) < +\infty$ para todo $x \in X$. La sucesión $(g+f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones positivas tales que $(g+f)(x) = \lim\limits_{n\to+\infty}(g+f_n)(x)$, para todo $x \in X$. Aplicamos el Lema de Fatou (teorema 2) para obtener la estimación

$$\int_X (g+f)(x)d\mu(x) \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_X (g+f_n)(x)d\mu(x)$$

de donde se obtiene, por la aditividad de la integral, la desigualdad

$$\int_X f(x)d\mu(x) \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_X f_n(x)d\mu(x). \tag{4}$$

Un argumento similar aplicado a la sucesión $(g - f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ muestra que

$$\int_X (g-f)(x)d\mu(x) \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_X (g-f_n)(x)d\mu(x),$$

es decir

$$\int_X f(x)d\mu(x) \geq \liminf_{n\to+\infty} \int_X f_n(x)d\mu(x). \tag{5}$$

Gracias a las estimaciones (4) y (5) se obtiene la identidad deseada.

- Las hipótesis se verifican en μ-casi todas partes. Obsérvese que por el corolario 3.2.9 del folleto, si se tiene $\int_X g(x)d\mu(x) < +\infty$, entonces se obtiene la estimación $g(x) < +\infty$ μ-casi todas partes.

Es posible entonces repetir el argumento utilizado en la demostración del teorema 1 considerando los conjuntos $\mathcal{N}$ y $\mathcal{N}^c$ según si se tiene o no la convergencia.

■

Convergencia en μ-c.t.p. + hipótesis de acotación (o dominación) $\Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X \lim\limits_{n\to+\infty} f_n d\mu$

Ejemplos

(i) Consideremos el límite siguiente:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^1 nxe^{-nx}dx\right).$$

Calculando directamente se puede ver que el límite tiende a cero; pero también se puede aplicar el T.C.D.L. a las funciones $f_n(x) = nxe^{-nx}\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$. Tenemos $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ para todo x y además se tienen las estimaciones $0 \leq f_n(x) \leq \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$ de modo que podemos aplicar el teorema 3 para escribir

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^1 nxe^{-nx}dx\right) = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} nxe^{-nx}dx = 0.$$

(ii) Ahora estudiemos el límite a continuación:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^1 nx^2e^{-nx^2}dx\right).$$

ya no es posible realizar un cálculo directo de la integral, $\Longrightarrow$ es necesario pasar por el T.C.D.L. Dado que las funciones $f_n(x) = nx^2e^{-nx^2}\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$ tienden a cero si $n \to +\infty$ y que se tienen las estimaciones $0 \leq f_n(x) \leq \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$, podemos afirmar que el límite de la expresión anterior tiende a cero si $n \to +\infty$.

4. Integrales dependientes de un parámetro

Teorema 4 (Continuidad con respecto a un parámetro) *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido y sea (E, d) un espacio métrico. Sea $f : X \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ una función que verifica las tres condiciones siguientes:*

1) para todo $t \in E$ la función $x \longmapsto f(x,t)$ es medible,

2) para μ-casi todo $x \in X$ la función $t \longmapsto f(x,t)$ es continua en el punto t_0,

3) en μ-casi todas partes existe una función μ-integrable $g : X \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que para todo $t \in E$ se tiene la estimación

$$|f(x,t)| \leq g(x)$$

Entonces, la función definida por

$$\begin{aligned} \varphi : E &\longrightarrow \mathbb{K} \\ t &\longmapsto \varphi(t) = \int_X f(x,t)d\mu(x) \end{aligned} \tag{6}$$

es continua en el punto t_0.

Demostración. Para verificar la continuidad de la función φ en el punto t_0, debemos probar que si $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de puntos de E que converge hacia t_0, entonces $\varphi(t_n) \longrightarrow \varphi(t_0)$.

Para ello utilizaremos dos funciones auxiliares $\psi(x) = f(x,t_0)$ y $\psi_n(x) = f(x,t_n)$. Por la tercera hipótesis tenemos que $|\psi_n(x)| \leq g(x)$ μ-casi todas partes para todo entero n. Por la segunda hipótesis tenemos que $\psi_n(x)$ converge hacia $\psi(x)$ para μ-casi todo x y como las funciones ψ_n son medibles (por la primera hipótesis), verificamos todas las condiciones para poder aplicar el teorema de convergencia dominada de Lebesgue:

$$\varphi(t_0) = \int_X \psi(x)d\mu(x) = \lim_{n\to+\infty}\int_X \psi_n(x)d\mu(x) = \lim_{n\to+\infty}\varphi(t_n),$$

■

Ejemplos

(i) Sea la función

$$\begin{array}{rcl} \varphi :]0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \varphi(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{t-1}}{1+x}\, dx. \end{array}$$

Notamos $f(x,t)$ la función definida sobre $[0,+\infty[\times]0,1[$ determinada por $f(x,t) = \frac{x^{t-1}}{1+x}$.

1) la función $x \longmapsto f(x,t)$ es medible para todo $t \in]0,1[$ por ser el cociente de dos funciones medibles,
2) la función $t \longmapsto f(x,t)$ es continua para todo $x \in [0,+\infty[$,
3) para la hipótesis de dominación escribimos $f(x,t) = \frac{e^{(t-1)\ln(x)}}{1+x}$. Observamos que la función $f(x,\cdot)$ es creciente si $x \geq 1$ y decreciente si $x < 1$; esto nos lleva a considerar a, b dos parámetros reales tales que $0 < a < t < b < 1$ y a definir una función $g : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ de la siguiente forma:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^{a-1}}{1+x} & \text{si } 0 < x < 1 \\ \\ \frac{x^{b-1}}{1+x} & \text{si } 1 \leq x. \end{cases}$$

Tenemos entonces la estimación $|f(x,t)| \leq g(x)$ válida para todo $x \in [0,+\infty[$ y además se tiene que $\int_0^{+\infty} g(x)dx < +\infty$.

Dado que hemos verificado las hipótesis del teorema 4 $\Longrightarrow$ la función φ es continua sobre $]0,1[$.

(ii) Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función tal que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx < +\infty$. Definimos su *Transformada de Fourier*, notada $\mathscr{F}(f)$ o $\hat{f}$, por la siguiente fórmula:

$$\mathscr{F}(f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\xi x}dx. \tag{7}$$

Verifiquemos las hipótesis de aplicación del teorema 4:

1) la función $x \longmapsto f(x)e^{-i\xi x}$ es medible para todo ξ por ser el producto de dos funciones medibles,
2) la función $\xi \longmapsto f(x)e^{-i\xi x}$ es evidentemente continua para todo x,
3) la hipótesis de dominación se obtiene observando que

$$\left| f(x)e^{-i\xi x} \right| \leq |f(x)|.$$

Aplicando el teorema de continuidad de la integral con respecto a un parámetro $\Longrightarrow$ la función $\hat{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ es continua.

Corolario 2 (Continuidad de la integral con respecto a la cota superior) *Sea f una función integrable definida sobre la recta real $\mathbb{R}$ a valores en $\mathbb{R}$ y sea $\alpha \in \mathbb{R}$ un real. Entonces la función definida por*

$$\varphi : t \longmapsto \int_\alpha^t f(x)dx \tag{8}$$

es continua para todo $t > \alpha$.

Prueba. Basta aplicar el teorema 4 a la función $g(x,t) = f(x)\mathbb{1}_{[\alpha,t]}(x)$. En efecto, esta función g es continua en el punto t_0 para todo $x \neq t_0$ y puesto que se tiene la mayoración $|g(x,t)| \leq |f(x)|$ podemos aplicar sin problema el resultado precedente y terminar la demostración.

■

Teorema 5 (Derivación bajo el signo integral) *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido y sea I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$. Sea $f : X \times I \longrightarrow \mathbb{K}$ una función y suponemos que existe $\mathcal{N}$ un conjunto de μ-medida nula tales que*

1) para todo $t \in I$ la función $x \longmapsto f(x,t)$ es integrable,

2) la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ existe en todo punto $x \in X^0 \times I$ en donde notamos $X^0 = X \setminus \mathcal{N}$.

3) existe una función integrable $g : X^0 \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que para todo $x \in X^0$ se tiene

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq |g(x)| \quad \text{en } \mu\text{-casi todas partes.}$$

Entonces, la función definida por

$$\begin{array}{rcl} \psi : I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ t & \longmapsto & \displaystyle\int_X f(x,t)d\mu(x) \end{array}$$

es derivable y se tiene

$$\frac{d}{dt}\psi(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)d\mu(x). \tag{9}$$

Demostración. Sea t_0 un punto de I y sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de reales no nulos, lo suficientemente pequeños para que $t_0 + a_n$ esté en I, y tales que $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Definimos la función

$$\varphi_n(x) = \frac{f(x, t_0 + a_n) - f(x, t_0)}{a_n};$$

de manera que $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi_n(x) = \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0)$. Por la fórmula de los crecimientos finitos, obtenemos

$$|\varphi_n(x)| \leq \sup_{0\leq\theta\leq 1}\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0 + \theta a_n)\right| \leq |g(x)|.$$

Aplicamos el T.C.D.L. y obtenemos que la función $\varphi : x \longmapsto \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0)$ es integrable y que

$$\begin{aligned} \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0)d\mu(x) &= \lim_{n\to+\infty} \int_X \varphi_n(x)d\mu(x) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\psi(t_0 + a_n) - \psi(t_0)}{a_n}. \end{aligned}$$

Dado que la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es arbitraria, tenemos que la función ψ es derivable en el punto t_0 y por lo tanto se obtiene la fórmula (9) para la derivada de ψ.

■

Ejemplos

(i) Consideramos la función $f(x,t) = \mathbb{1}_{[0,t[}(x)$ definida sobre $\mathbb{R}$ a valores reales. Vemos que la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0)$ existe para casi todo x ($x \neq t_0$) y es nula, pero las hipótesis del teorema 5 exigen más: hay que encontrar un conjunto $\mathcal{N}$ de medida nula tal que para todo $x \notin \mathcal{N}$ la derivada parcial existe para todo t. En este caso esto es imposible y si derivamos sin precaución obtenemos un resultado falso. Si por un lado tenemos

$$\int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx = 0,$$

por otro lado tenemos $\frac{d}{dt}\varphi(t) = 1$: esto muestra a posteriori no se puede aplicar el teorema de derivación bajo el signo integral si no se cumplen las hipótesis.

(ii) El segundo ejemplo que tratamos aquí corresponde a la función

$$f(x,t) = \frac{x^{t-1}}{1+x} = \frac{e^{(t-1)\ln(x)}}{1+x}.$$

Deseamos aplicar el teorema de derivación bajo el signo integral y para ello verificaremos las hipótesis necesarias. Ya vimos que esta función es continua y que es integrable para todo $t \in]0,1[$, lo que nos proporciona la primera hipótesis.

Dado que se tiene para todo $x \in [0,+\infty[$ la identidad $\frac{\partial}{\partial t} f(x,t) = \ln(x) f(x,t)$ tenemos la segunda hipótesis. Finalmente si definimos, para $0 < a < t < b < 1$, la función

$$g(x) = \begin{cases} \left|\ln(x)\frac{x^{a-1}}{1+x}\right| & \text{si } 0 < x < 1 \\ \left|\ln(x)\frac{x^{b-1}}{1+x}\right| & \text{si } 1 \leq x; \end{cases}$$

obtenemos la tercera hipótesis pues $\int_0^{+\infty} g(x)dx < +\infty$. Todo esto nos permite concluir que se tiene la identidad

$$\frac{d}{dt}\varphi(t) = \int_0^{+\infty} \ln(x)\frac{x^{t-1}}{1+x}\, dx.$$

5. Integración en los espacios producto

Principal objetivo: resolver integrales *dobles* por medio de integrales *simples*.

¿pero qué es una integral *doble*?

$\Longrightarrow$ Los ejemplos anteriores muestran la importancia de medir funciones que dependen de más de una sola variable. Cuando hay dos variables, definidas sobre dos espacios medidos distintos, hablaremos de integrales dobles.

$\Longrightarrow$ Es necesario construir la integral sobre el producto de espacios medidos.

σ-álgebras producto

Sean $(X,\mathscr{A})$ y $(Y,\mathscr{B})$ dos espacios medibles. Llamaremos un subconjunto del producto cartesiano $X \times Y$ un *rectángulo de lados medibles* si es de la forma $A \times B$ para algún $A \in \mathscr{A}$ y algún $B \in \mathscr{B}$. El conjunto de rectángulos medibles será notado por

$$\mathscr{A} \times \mathscr{B} = \{A \times B; A \in \mathscr{A}, B \in \mathscr{B}\}.$$

$\Longrightarrow$ Si $X = Y = \mathbb{R}$, dotado de la σ-álgebra de los Borelianos, un adoquín es un rectángulo de lados medibles.

Definición 2 (σ-álgebra producto) *Sean $(X,\mathscr{A})$ y $(Y,\mathscr{B})$ dos espacios medibles. Definimos el producto tensorial de las σ-álgebras $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ como la σ-álgebra engendrada*

$$\mathscr{A} \otimes \mathscr{B} = \sigma(\mathscr{A} \times \mathscr{B}).$$

$\Longrightarrow$ si consideramos X y Y dotados de las σ-álgebras $\mathscr{A} = \{\emptyset, X\}$ y $\mathscr{B} = \{\emptyset, Y\}$ respectivamente, vemos que $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B} = \{\emptyset, X \times Y\}$.

Teorema 6 *Sean X y Y dos espacios topológicos. Entonces la σ-álgebra boreliana del espacio producto $X \times Y$ contiene al producto de la σ-álgebra boreliana de X por la σ-álgebra boreliana de Y:*

$$\mathcal{B}or(X) \otimes \mathcal{B}or(Y) \subset \mathcal{B}or(X \times Y).$$

Si X y Y son espacios topológicos a base numerable de abiertos, entonces se tiene la identidad

$$\mathcal{B}or(X) \otimes \mathcal{B}or(Y) = \mathcal{B}or(X \times Y).$$

Corolario 3 *Para todo $p, q \geq 1$ tenemos $\mathcal{B}or(\mathbb{R}^{p+q}) = \mathcal{B}or(\mathbb{R}^p) \otimes \mathcal{B}or(\mathbb{R}^q)$.*

Necesidad de "congelar" las variables $\Longrightarrow$ introducción de la noción de "secciones".

Definición 3 *Sean X y Y dos conjuntos y sea E un subconjunto de $X \times Y$. Para todo $x \in X$ y todo $y \in Y$ definimos las* secciones *E^y y E_x como*

$$E^y = \{x \in X : (x,y) \in E\} \quad y \quad E_x = \{y \in Y : (x,y) \in E\}.$$

Si f es una función definida sobre $X \times Y$, entonces las secciones *f^y y f_x están definidas por*

$$f^y(x) = f(x,y) \qquad y \qquad f_x(y) = f(x,y).$$

Proposición 1 *Sean $(X, \mathscr{A})$ y $(Y, \mathscr{B})$ dos espacios medibles.*

1) Si E es un subconjunto de $X \times Y$ que pertenece a $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$, entonces cada sección E_x pertenece a $\mathscr{B}$ y cada sección E^y pertenece a $\mathscr{A}$.

2) Si f es una función $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$-medible definida sobre $X \times Y$ a valores en $\mathbb{K}$, entonces cada sección f_x es $\mathscr{B}$-medible y cada sección f^y es $\mathscr{A}$-medible.

Prueba.

1) Supongamos que $x \in X$ y sea $\mathcal{F}$ la colección de todos los subconjuntos E de $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ tales que E_x pertenece a $\mathscr{B}$. Vamos a mostrar que $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra que coincide con $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$.

   Si $A \in \mathscr{A}$ y $B \in \mathscr{B}$, entonces $A \times B \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ y se tiene

$$(A \times B)_x = \begin{cases} B & \text{si } x \in A \\ \emptyset & \text{si } x \notin A. \end{cases} \tag{10}$$

   $\Longrightarrow$ todos los rectángulos de lados medibles pertenecen a $\mathcal{F}$ y en particular se tiene que $X \times Y \in \mathcal{F}$.
   $\Longrightarrow$ si $E \in \mathcal{F}$, tenemos que $E^c \in \mathcal{F}$ pues $(E^c)_x = \{y \in Y : (x,y) \in E^c\} = \{y \in Y : (x,y) \in E\}^c = (E_x)^c$.
   $\Longrightarrow$ si $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}$, entonces $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{F}$ puesto que $\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right)_x = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (E_n)_x$.

   Estos tres puntos muestran que $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra contenida en $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ que contiene todos los rectángulos de lados medibles. Pero dado que $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ es la más pequeña σ-álgebra que contiene este tipo de rectángulos se deduce $\mathcal{F} = \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$.

   Un razonamiento similar demuestra que si E es un subconjunto de $X \times Y$ que pertenece a $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$, entonces cada sección E^y pertenece a $\mathscr{A}$.

2) Para esta segunda parte vemos que si f es $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$-medible entonces, para todo abierto U de $\mathbb{K}$, el conjunto $E = \{(x,y) \in X \times Y : f(x,y) \in U\}$ pertenece a $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$. Por la primera parte, para todo $x \in X$ y todo $y \in Y$, las secciones E_x y E^y son $\mathscr{B}$-medibles y $\mathscr{A}$-medibles respectivamente, lo que demuestra que f_x y f^y son medibles.

$\blacksquare$

Proposición 2 *Sean $(X, \mathscr{A}, \mu)$ y $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ dos espacios medidos σ-finitos. Si E pertenece a la σ-álgebra $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$, entonces las funciones*

$$\begin{aligned} \varphi : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \nu(E_x) \end{aligned} \qquad y \qquad \begin{aligned} \psi : Y &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto \mu(E^y) \end{aligned}$$

son $\mathscr{A}$-medible y $\mathscr{B}$-medible respectivamente.

Prueba.

1. La medida ν es finita.

   Sea $\mathcal{F}$ la clase de los conjuntos $E \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ tales que la función $x \longmapsto \nu(E_x)$ es $\mathscr{A}$-medible. Vamos a verificar que $\mathcal{F} = \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$.

   Si $A \in \mathscr{A}$ y $B \in \mathscr{B}$, utilizando la fórmula (10) podemos escribir

   $$\nu((A \times B)_x) = \nu(B)\mathbb{1}_A(x), \tag{11}$$

   de manera que el rectángulo $A \times B$ pertenece a $\mathcal{F}$ pues la función $\nu(B)\mathbb{1}_A(x)$ es $\mathscr{A}$-medible. En particular, el espacio $X \times Y$ pertenece a $\mathcal{F}$.

   Si E y F son dos conjuntos de $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ tales que $E \subset F$, entonces se tiene $\nu((F \setminus E)_x) = \nu(F_x) - \nu(E_x)$ que es una función $\mathscr{A}$-medible, lo que muestra que $\mathcal{F}$ es estable por diferencia propia.

   Sea ahora $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión creciente de conjuntos de $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$. Vemos que se tiene la identidad $\nu((\cup_n E_n)_x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \nu((E_n)_x)$; dado que la función límite es $\mathscr{A}$-medible, se deduce que $\mathcal{F}$ es estable por diferencia propia y por unión numerable de sucesiones crecientes. Es por lo tanto una clase monótona.

   Puesto que la familia de rectángulos de lados medibles es estable por construcción de intersecciones finitas, el teorema 2.2.5 del folleto nos proporciona la identidad $\mathcal{F} = \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$. Obtenemos entonces que la aplicación $x \longmapsto \nu(E_x)$ es medible para cada conjunto E de $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$.

2. La medida ν es σ-finita.

   Sea $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos disjuntos que pertenecen a $\mathscr{B}$, de medida finita con respecto a ν y tales que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n = Y$. Para cada n definimos una medida finita ν_n sobre $\mathscr{B}$ escribiendo $\nu_n(B) = \nu(B \cap D_n)$. Tenemos pues que las funciones $x \longmapsto \nu_n(E_x)$ son $\mathscr{A}$-medibles para todo n.
   Dado que la identidad $\nu(E_x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu_n(E_x)$ se verifica para todo x, se deduce la medibilidad que la aplicación $x \longmapsto \nu(E_x)$.

   La función $y \longmapsto \mu_n(E_y)$ puede ser tratada de manera totalmente similar lo que termina la demostración.

■

Medidas producto

Teorema 7 *Sean $(X, \mathscr{A}, \mu)$ y $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ dos espacios medidos σ-finitos. Existe entonces una sola medida definida sobre $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$, llamada* medida producto *y notada $\mu \otimes \nu$ tal que para todo $A \in \mathscr{A}$ y $B \in \mathscr{B}$ se tiene la relación para los rectángulos medibles:*

$$\mu \otimes \nu(A \times B) = \mu(A)\nu(B).$$

La medida con respecto a $\mu \otimes \nu$ de un conjunto cualquiera E de $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ está dada por

$$\mu \otimes \nu(E) = \int_X \nu(E_x) d\mu(x) = \int_Y \mu(E^y) d\nu(y). \tag{12}$$

Nótese que esta fórmula permite calcular la medida de los conjuntos $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$-medibles a partir de las medidas iniciales μ y ν. Obtenemos así un espacio medido sobre el producto cartesiano de X y Y que notaremos $(X \times Y, \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}, \mu \otimes \nu)$.

Demostración. La medibilidad de las aplicaciones $x \longmapsto \nu(E_x)$ y $y \longmapsto \mu(E_y)$ para cada conjunto $E \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ se deduce de la proposición anterior. Podemos entonces definir las funciones $(\mu \otimes \nu)_1$ y $(\mu \otimes \nu)_2$ sobre $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ determinadas por

$$(\mu \otimes \nu)_1(E) = \int_Y \mu(E^y) d\nu(y) \qquad \text{y} \qquad (\mu \otimes \nu)_2(E) = \int_X \nu(E_x) d\mu(x).$$

Observamos sin problema que $(\mu \otimes \nu)_1(\emptyset) = (\mu \otimes \nu)_2(\emptyset) = 0$. Si $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos disjuntos de $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ y si $E = \cup_n E_n$ y si $y \in Y$; entonces $(E_n^y)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos disjuntos de $\mathscr{A}$ tales que $E^y = \cup_n E_n^y$ y por lo tanto se tiene $\mu(E^y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(E_n^y)$. Podemos ahora aplicar el corolario 1, que nos permite intercambiar los símbolos "$\int$" y "$\sum$", para obtener las identidades siguientes:

$$(\mu \otimes \nu)_1(E) = \int_Y \mu(E^y) d\nu(y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_Y \mu(E_n^y) d\nu(y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (\mu \otimes \nu)_1(E_n).$$

Deducimos entonces que la aplicación $(\mu \otimes \nu)_1$ es numerablemente aditiva y, repitiendo este razonamiento, se obtiene un resultado totalmente análogo para $(\mu \otimes \nu)_2$.

Para el caso de los rectángulos medibles, es fácil verificar que si $A \in \mathscr{A}$ y $B \in \mathscr{B}$ entonces se tiene

$$(\mu \otimes \nu)_1(A \times B) = \mu(A)\nu(B) = (\mu \otimes \nu)_2(A \times B).$$

De todos estos puntos deducimos que $(\mu \otimes \nu)_1$ y $(\mu \otimes \nu)_2$ son medidas sobre $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ que proporcionan los resultados deseados sobre los rectángulos de lados medibles.

La unicidad de $\mu \otimes \nu$ se obtiene entonces por el corolario 2.2.3. del folleto y por el teorema de unicidad de las medidas, lo que implica en particular que $(\mu \otimes \nu)_1 = (\mu \otimes \nu)_2$ y que se tiene (12) para todo $E \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$.

$\blacksquare$

Corolario 4 *Sea $(X \times Y, \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}, \mu \otimes \nu)$ un espacio medido producto y sea $E \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$, las proposiciones siguientes son equivalentes:*

1) E es de $\mu \otimes \nu$-medida nula,

2) E_x es de ν-medida nula para μ-casi todo $x \in X$,

3) E^y es de μ-medida nula para ν-casi todo $y \in Y$.

Ejemplos

(i) Sea $X = Y = \mathbb{R}$ de manera que $X \times Y = \mathbb{R}^2$. Sea λ la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}$ y λ_2 la medida de Lebesgue 2-dimensional. Vemos entonces que para todo adoquín Γ de la forma $[a,b] \times [c,d]$ tenemos el mismo resultado aplicando λ_2 o $\lambda \otimes \lambda$:

$$\lambda_2(\Gamma) = (b-a)(d-c) = \lambda([a,b])\lambda([c,d]),$$

lo que nos proporciona una segunda construcción de la medida de Lebesgue de $\mathbb{R}^2$.

(ii) Sea ahora $a \in X$ y $b \in Y$ dos puntos. Tenemos entonces entre las medidas de Dirac la relación

$$\delta_a \otimes \delta_b = \delta_{(a,b)}.$$

Más generalmente si $\mu = \sum_{i \in I} \alpha_i \delta_{a_i}$ y si $\nu = \sum_{j \in J} \beta_j \delta_{b_j}$ tenemos la fórmula

$$\mu \otimes \nu = \sum_{(i,j) \in I \times J} \alpha_i \beta_j \delta_{(a_i, b_j)}.$$

Observación 1 Es importante insistir en las hipótesis de este teorema. En efecto, si no suponemos que las medidas que intervienen en este teorema son σ-finitas, no se tiene necesariamente la unicidad de la medida producto $\mu \otimes \nu$ y además la fórmula (12) puede ser falsa.

Demos un ejemplo clásico de esta situación: sea $X = [0,1]$, sea μ la medida de Lebesgue sobre la σ-álgebra $\mathcal{B}or([0,1])$ y sea ν la medida de conteo del conjunto de partes (no numerable) de $Y = [0,1]$. Nótese que esta medida ν no es σ-finita. Vemos entonces que la diagonal del cuadrado $E = [0,1] \times [0,1]$ es un elemento de la σ-álgebra producto y se tiene

$$\int_X \nu(E_x) d\mu(x) = 1 \neq \int_Y \mu(E^y) d\nu(y) = 0.$$

Teoremas de Fubini-Tonelli

Estos teoremas nos permite evaluar integrales dobles por medio de integrales simples

$\Longrightarrow$ resultados importantísimos!

Teorema 8 (Tonelli) *Sean $(X, \mathscr{A}, \mu)$ y $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ dos espacios medidos σ-finitos y consideremos $f : X \times Y \longrightarrow [0, +\infty]$ una función $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$-medible. Entonces*

1) las funciones

$$\begin{aligned} \varphi : X &\longrightarrow [0,+\infty] \\ x &\longmapsto \int_Y f(x,y) d\nu(y) \end{aligned} \qquad y \qquad \begin{aligned} \psi : Y &\longrightarrow [0,+\infty] \\ y &\longmapsto \int_X f(x,y) d\mu(x) \end{aligned}$$

son $\mathscr{A}$-medibles y $\mathscr{B}$-medibles respectivamente.

2) si las funciones φ y ψ son integrables sobre X y Y respectivamente, la función f es integrable sobre $X \times Y$ y se tienen las identidades siguientes

$$\begin{aligned} \int_{X \times Y} f(x,y) d\mu \otimes \nu(x,y) &= \int_Y \left(\int_X f(x,y) d\mu(x) \right) d\nu(y) \\ &= \int_X \left(\int_Y f(x,y) d\nu(y) \right) d\mu(x). \end{aligned} \tag{13}$$

Demostración. Supongamos para empezar que E pertenece a la σ-álgebra producto $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ y que f es la función indicatriz de E. Tenemos entonces que las secciones f_x y f^y son las funciones indicatrices de las secciones E_x y E^y de manera que se tienen las relaciones $\int_Y f_x(y)d\nu(y) = \nu(E_x)$ y $\int_X f^y(x)d\mu(x) = \mu(E^y)$ para todo x, y.

Por la proposición 2 y por el teorema 7 obtenemos los puntos 1) y 2) para las funciones indicatrices de conjuntos, mientras que la aditividad y la homogeneidad de la integral implican que estos puntos siguen siendo válidos para las funciones simples $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$-medibles. Sea ahora f una función $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$-medible. Por el teorema de aproximación por medio de funciones simples, existe una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones simples crecientes que convergen hacia f. El primer punto se deduce entonces por la estabilidad de las funciones medibles. El segundo punto se obtiene utilizando el teorema de convergencia monótona.

Vemos entonces que se tienen estos dos puntos para todas las funciones positivas $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$-medibles, terminando así la demostración.

$\blacksquare$

Teorema 9 (Fubini) *Sean $(X, \mathscr{A}, \mu)$ y $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ dos espacios medidos σ-finitos. Sea f una función definida sobre $X \times Y$ a valores en $\mathbb{K}$, integrable con respecto a la medida producto $\mu \otimes \nu$. Entonces*

1) para μ-casi todo punto $x \in X$ la sección f_x es ν-integrable y para ν-casi todo punto $y \in Y$ la sección f^y es μ-integrable.

2) se tienen las relaciones siguientes:

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} f(x,y)d\mu\otimes\nu(x,y) &= \int_Y \left(\int_X f(x,y)d\mu(x)\right)d\nu(y)\\ &= \int_X \left(\int_Y f(x,y)d\nu(y)\right)d\mu(x). \end{aligned} \tag{14}$$

Demostración. Tratamos solamente el caso de funciones a valores reales pues el caso complejo se deduce fácilmente del primero utilizando argumentos ya explicitados anteriormente.

Sea pues f una función integrable sobre $X \times Y$ (y por lo tanto $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$-medible) y sean f^+ y f^- las partes positivas y negativas de f. La proposición 1 nos asegura que las aplicaciones f_x, $(f^+)_x$ y $(f^-)_x$ son $\mathscr{B}$-medibles y el teorema de Tonelli implica que las funciones

$$x \longmapsto \int_Y (f^+)_x(y)d\nu(y) \quad \text{y} \quad x \longmapsto \int_Y (f^-)_x(y)d\nu(y)$$

son $\mathscr{A}$-medibles y μ-integrables, y son por lo tanto finitas μ-c.t.p. por el corolario 3.2.9. De manera que la función f_x es ν-integrable para μ-casi todo x.

Gracias a estos puntos tenemos entonces que la aplicación $\int_Y f(x,y)d\nu(y)$ pertenece al espacio $\mathcal{L}(X, \mathscr{A}, \mu)$ y el teorema de Tonelli nos permite escribir

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} f(x,y)d\mu\otimes\nu(x,y) &= \int_{X\times Y} f^+(x,y)d\mu\otimes\nu(x,y) - \int_{X\times Y} f^-(x,y)d\mu\otimes\nu(x,y)\\ &= \int_X \left(\int_Y f_x^+(y)d\nu(y)\right)d\mu(x) - \int_X \left(\int_Y f_x^-(y)d\nu(y)\right)d\mu(x)\\ &= \int_X \left(\int_Y f(x,y)d\nu(y)\right)d\mu(x). \end{aligned}$$

Con esto hemos terminado la demostración del teorema dado que un argumento totalmente similar se utiliza para tratar f^y.

$\blacksquare$

Observación 2 Los teoremas de Tonelli y de Fubini pueden parecer a primera vista muy similares, sin embargo son muy diferentes y son utilizados en situaciones distintas. El teorema de Tonelli nos dice que si las integrales simples existen y son finitas entonces la integral doble existe y es finita. Por el contrario, el teorema de Fubini tiene como hipótesis la integrabilidad doble a partir de la cual se deduce la finitud de las integrales simples.

Ejemplos

(i) Si la inversión del orden de integración conduce a resultados distintos se obtiene *a posteriori* que el teorema de Fubini no se aplica. Consideremos por ejemplo $X = Y = [0,1]$ dotado de su σ-álgebra natural y la función $f : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

si $(x,y) \neq (0,0)$ (dado que el conjunto $\{(0,0)\}$ es de medida nula no es necesario definir la función en este punto). Observando que se tienen las identidades

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{-x}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{y} \quad \frac{d}{dy}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

estamos tentados en realizar los cálculos siguientes:

$$\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx = \frac{-1}{y^2+1} \quad \text{y} \quad \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy = \frac{1}{x^2+1}.$$

A partir de estos cálculos obtenemos el resultado contradictorio siguiente

$$\int_0^1 \frac{-1}{y^2+1}dy = -\frac{\pi}{4} \quad \text{y} \quad \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{4}.$$

Este ejemplo ilustra la necesidad de verificar cuidadosamente las hipótesis del teorema 9 antes de lanzarse en cálculos que pueden resultar falsos. En efecto, vemos sin mayor dificultad que $f^+(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathbb{1}_{[0,1]}(x)\mathbb{1}_{[0,x]}(y)$ y obtenemos entonces

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(\int_0^1 f^+(x,y)dy\right)dx &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathbb{1}_{[0,1]}(x)\mathbb{1}_{[0,x]}(y)dy\right)dx \\ &= \int_0^1 \left(\left.\frac{y}{x^2+y^2}\right|_0^x\right)dx = \int_0^1 \frac{dx}{2x} = +\infty,\end{aligned}$$

de donde se deduce que la función $f(x,y)$ no es integrable con respecto a la medida producto y que por lo tanto no se puede aplicar el teorema de Fubini.

(ii) Un caso simple de aplicación del teorema de Tonelli se encuentra cuando se multiplica dos funciones integrables definidas sobre conjuntos distintos: sean $(X,\mathscr{A},\mu)$ y $(Y,\mathscr{B},\nu)$ dos espacios medidos σ-finitos y sean $g : X \longrightarrow [0,+\infty[$ y $h : Y \longrightarrow [0,+\infty[$ dos funciones μ y ν integrables respectivamente. Si definimos $f(x,y) = g(x)h(y)$ tenemos por el teorema de Tonelli que esta función es $\mu\otimes\nu$-integrable. En efecto las funciones

$$\begin{aligned}\varphi : X &\longrightarrow [0,+\infty] \\ x &\longmapsto g(x)\int_Y h(y)d\nu(y)\end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned}\psi : Y &\longrightarrow [0,+\infty] \\ y &\longmapsto h(y)\int_X g(x)d\mu(x)\end{aligned}$$

son integrables lo que nos permite escribir

$$\int_{X\times Y} f(x,y)d\mu\otimes\nu(x,y) = \left(\int_X g(x)d\mu(x)\right)\left(\int_Y h(y)d\nu(y)\right).$$

Integrales múltiples

Sea pues $(X_1, \mathscr{A}_1, \mu_1), ..., (X_n, \mathscr{A}_n, \mu_n)$ una colección finita de n espacios σ-finitos. Observemos para empezar que existe una correspondencia inyectiva del conjunto $(X_1 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n$ sobre el conjunto $X_1 \times \cdots \times X_n$ determinada por

$$\varphi((x_1, ..., x_{n-1}), x_n) = (x_1, ..., x_n) \quad \text{para todo } x_i \in X_i,\ i = 1, ..., n.$$

Este hecho nos sugiere que podemos utilizar lo anterioremente expuesto para la construcción de espacios medidos múltiples. Definimos entonces la σ-álgebra $\mathscr{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathscr{A}_n$ sobre $X_1 \times \cdots \times X_n$ como la σ-álgebra engendrada por los rectángulos de la forma $A_1 \times \cdots \times A_n$ en donde $A_i \in \mathscr{A}_i$ para todo $1 \leq i \leq n$:

$$\mathscr{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathscr{A}_n = \sigma\{A_1 \times \cdots \times A_n : A_i \in \mathscr{A}_i; 1 \leq i \leq n\}$$

Vemos entonces que la aplicación φ transforma los conjuntos que generan la σ-álgebra $(\mathscr{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathscr{A}_{n-1}) \otimes \mathscr{A}_n$ en los conjuntos que generan la σ-álgebra $\mathscr{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathscr{A}_n$, de manera que un conjunto $E \in X_1 \times \cdots X_n$ pertenece a $\mathscr{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathscr{A}_n$ si y solo si $\varphi^{-1}(E)$ pertenece a $(\mathscr{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathscr{A}_{n-1}) \otimes \mathscr{A}_n$.

Esto nos permite entonces aplicar $n-1$ veces el teorema 7 para obtener una medida $\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n$ definida sobre $\mathscr{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathscr{A}_n$ que verifique la identidad siguiente

$$\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n(A_1 \times \cdots \times A_n) = \prod_{i=1}^{n} \mu_i(A_i)$$

para todo $A_i \in \mathscr{A}_i$ con $1 \leq i \leq n$, obteniendo así un espacio medido sobre el producto $X_1 \times \cdots \times X_n$ que notaremos $(X_1 \times \cdots \times X_n, \mathscr{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathscr{A}_n, \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n)$.

Los teoremas de Fubini-Tonelli generalizados a las integrales múltiples nos proporcionan resultados del tipo siguiente en donde se puede intercambiar el orden de integración, siempre y cuando se verifiquen las hipótesis necesarias:

$$\begin{aligned}
\int_{X_1 \times X_2 \times X_3} f(x_1, x_2, x_3) d\mu \otimes \nu \otimes \eta(x_1, x_2, x_3) &= \int_{X_1} \left(\int_{X_2} \left(\int_{X_3} f(x_1, x_2, x_3) d\eta(x_3) \right) d\nu(x_2) \right) d\mu(x_1) \\
&= \int_{X_1} \left(\int_{X_3} \left(\int_{X_2} f(x_1, x_2, x_3) d\nu(x_2) \right) d\eta(x_3) \right) d\mu(x_1) \\
&= \int_{X_3} \left(\int_{X_2} \left(\int_{X_1} f(x_1, x_2, x_3) d\mu(x_1) \right) d\nu(x_2) \right) d\eta(x_3)
\end{aligned}$$