Lección n°6: Espacios de Lebesgue

EPN, verano 2009

Todos los resultados anteriores permiten el estudio de espacios funcionales "bien definidos"

- obtendremos espacios de Banach (espacios vectoriales normados y completos) - ¿qué más se puede pedir?!
- estos espacios son fundamentales: son la base de muchos desarrollos posteriores!

1. Espacio de funciones esencialmente acotadas

Definición 1 (Cota esencial) *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido y sea $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ una función medible. Definimos la* cota esencial *de f por medio de la fórmula*

$$\|f\|_{L^\infty} = \sup_{x\in X} ess|f(x)| = \inf\{c \in \overline{\mathbb{R}}_+ : \mu(\{x \in X : |f(x)| > c\}) = 0\}.$$

$\Longrightarrow$ Sirve para medir la "altura" de las funciones.

Proposición 1 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido y sean $f, g : X \longrightarrow \mathbb{K}$ dos funciones medibles.*

1) se tiene en μ-c.t.p. $|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty}$

2) Si existe $C \in \overline{\mathbb{R}}_+$ tq. μ-casi todo $x \in X$: $|f(x)| \leq C \Longrightarrow \|f\|_{L^\infty} \leq C$.

3) Si $|g(x)| \leq |f(x)|$ en μ-casi todas partes $\Longrightarrow \|g\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^\infty}$.

4) Si $\mu(X) < +\infty \Longrightarrow \int_X |f(x)|d\mu(x) \leq C_X\|f\|_{L^\infty}$ en donde $C_X = C(X)$.

Prueba.

1) & 2) Directamente de la definición.

3) Si $|g(x)| \leq |f(x)|$ en μ-casi todas partes $\Longrightarrow |g(x)| \leq |f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty}$ en μ-c.t.p. $\Longrightarrow \|g\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^\infty}$.

4) $|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty} \Longrightarrow \int_X |f(x)|d\mu(x) \leq \int_X \|f\|_{L^\infty} d\mu(x) = \|f\|_{L^\infty}\mu(X)$.

■

Definición 2 (Espacio $\mathcal{L}^\infty$) *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido. Definimos el espacio de funciones esencialmente acotadas $\mathcal{L}^\infty(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ como el conjunto de funciones medibles $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ tales que para algún $c \in \overline{\mathbb{R}}$, el conjunto $\{x \in X : |f(x)| > c\}$ es de μ-medida nula.*

$$\mathcal{L}^\infty(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K}) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{K} : \|f\|_{L^\infty} < +\infty\}. \tag{1}$$

Cuando el contexto esté claro, notaremos $\mathcal{L}^\infty(X, \mu)$ o más simplemente $\mathcal{L}^\infty(X)$ para designar este espacio.

Ejemplo elemental: si $A \in \mathscr{A}$ entonces $f(x) = \mathbb{1}_A(x)$ es esencialmente acotada pues $\|f\|_{L^\infty} \leq 1$.

Proposición 2 *El espacio de funciones esencialmente acotadas $\mathcal{L}^\infty(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ es un subespacio vectorial del conjunto de las funciones medibles $\mathcal{M}(X, \mathscr{A}, \mathbb{K})$.*

Prueba.

1) Para todo escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ y para toda función $f \in \mathcal{L}^\infty(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ se tiene $\lambda f \in \mathcal{L}^\infty(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$:

$$\|\lambda f\|_{L^\infty} = \sup_{x\in X} ess|\lambda f(x)| = |\lambda| \sup_{x\in X} ess|f(x)| = |\lambda|\|f\|_{L^\infty}. \tag{2}$$

2) Si las funciones f y g pertenecen al espacio $\mathcal{L}^\infty(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$, entonces la función suma $f + g$ también pertenece al espacio $\mathcal{L}^\infty(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$. Puesto que se tiene $|f| \leq \|f\|_{L^\infty}$ y $|g| \leq \|g\|_{L^\infty}$ μ-c.t.p. podemos utilizar la desigualdad triangular para obtener

$$\begin{aligned} |(f+g)(x)| &\leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_{L^\infty} + \|g\|_{L^\infty} \\ \Longrightarrow \|f+g\|_{L^\infty} &= \sup_{x\in X} ess|(f+g)(x)| \leq \|f\|_{L^\infty} + \|g\|_{L^\infty}. \end{aligned}$$

■

Observación 1 *Atención: el espacio $(\mathcal{L}^\infty(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K}), \|\cdot\|_{L^\infty})$ NO es un espacio normado.*

Se tiene $f(x) \equiv 0 \Longrightarrow \|f\|_{L^\infty} = 0$ pero la recíproca no es verdadera: para todo conjunto $A \in \mathscr{A}$ de μ-medida nula se tiene que $f(x) = \mathbb{1}_A(x) \neq 0$ pero $\|f\|_{L^\infty} = 0$.

Es necesario una ligera modificación:

Definición 3 (Espacio L^∞) *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido. Definimos el espacio $L^\infty(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ como el conjunto de clases de funciones medibles $[f]$ definidas sobre X a valores en $\mathbb{K}$ tales que $\|[f]\|_{L^\infty} < +\infty$. Es decir*

$$L^\infty(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K}) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{K} : \quad \|f\|_{L^\infty} < +\infty, \quad \mu - c.t.p.\}. \tag{3}$$

La principal consecuencia de trabajar μ-c.t.p. es la capacidad de capturar la información más importante de las funciones (en este caso la cota esencial) levantando el problema de la separabilidad de la funcional $\|\cdot\|_{L^\infty}$. En este sentido tenemos el resultado:

Proposición 3 *El espacio de clases de funciones $(L^\infty(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K}), \|\cdot\|_{L^\infty})$ es un espacio vectorial normado.*

Prueba. Razonando en μ-casi todas partes tenemos que todo representante $[f] \in L^\infty(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ verifica $\|\lambda[f]\|_{L^\infty} = |\lambda|\|[f]\|_{L^\infty}$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$, y que, para todo par de representantes $[f], [g]$ pertenecientes al espacio $L^\infty(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$, se tiene la desigualdad triangular $\|[f] + [g]\|_{L^\infty} \leq \|[f]\|_{L^\infty} + \|[g]\|_{L^\infty}$.

Debemos verificar que se tiene la equivalencia $\|[f]\|_{L^\infty} = 0 \Longleftrightarrow [f] = [0]$. La implicación $f = 0$ μ-c.t.p. $\Longrightarrow \|f\|_{L^\infty} = 0$ es evidente y para la recíproca vemos sin problema que $\|f\|_{L^\infty} = 0$ implica $f = 0$ μ-c.t.p. Asimilamos entonces esta función a la clase de la función nula $[0]$ lo que nos permite terminar completamente la demostración.

■

*

Dado que el espacio de Lebesgue $(L^\infty(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K}), \|\cdot\|_{L^\infty})$ es un espacio normado, disponemos de todas las propiedades de este tipo de espacios; así, para todo $f, g \in L^\infty(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ tenemos con la fórmula

$$d(f, g) = \|f - g\|_{L^\infty}$$

la distancia inducida por la norma $\|\cdot\|_{L^\infty}$ y diremos entonces que una sucesión de funciones esencialmente acotadas $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definidas sobre el espacio medido $(X, \mathscr{A}, \mu)$ a valores en $\mathbb{K}$ converge hacia una función f *en el sentido de* $L^\infty(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ si

$$\lim_{n\to+\infty} \|f - f_n\|_{L^\infty} = 0.$$

Por ejemplo, sobre $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido, la sucesión de funciones a valores reales $f_n(x) = (1-1/n)\mathbb{1}_A(x)$, determinada para todo $n \geq 1$ y para un conjunto $\mathscr{A}$-medible A tal que $\mu(A) > 0$, converge hacia $f(x) = \mathbb{1}_A(x)$ en el sentido de la norma $\|\cdot\|_{L^\infty}$ pues se tiene

$$\|\mathbb{1}_A - (1-1/n)\mathbb{1}_A\|_{L^\infty} = 1/n\|\mathbb{1}_A\|_{L^\infty} = 1/n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Teorema 1 *El espacio* $(L^\infty(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K}), \|\cdot\|_{L^\infty})$ *es un espacio de Banach.*

Demostración. Debemos verificar que toda sucesión de Cauchy que pertenece al espacio funcional $L^\infty(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ es convergente en el sentido de la norma $\|\cdot\|_{L^\infty}$. Sea pues $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy arbitraria formada por funciones esencialmente acotadas. Se tiene entonces que

$$(\forall k \geq 1)(\exists N_k \in \mathbb{N})(\forall n, m > N_k): \quad \|f_n - f_m\|_{L^\infty} \leq 1/k$$

Existe por lo tanto un conjunto A_k de medida nula tal que

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq 1/k \quad \text{para todo } x \in X \setminus A_k. \tag{4}$$

Si definimos el conjunto $A = \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k$, vemos sin mayor problema que A es de μ-medida nula. Entonces, para todo $x \in X \setminus A$ tenemos que la sucesión puntual $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathbb{K}$ y por lo tanto converge, puesto que el espacio $\mathbb{K}$ es completo, hacia un valor que notaremos $f(x)$ y obtenemos de esta forma una función definida sobre $X \setminus A$.

Hacemos ahora tender $m \longrightarrow +\infty$ en (4) para obtener la estimación

$$|f_n(x) - f(x)| \leq 1/k \quad \text{para todo } x \in X \setminus A$$

lo que nos permite afirmar que la función f es acotada sobre el conjunto $X \setminus A$. Para terminar, fijamos $f(x) = 0$ sobre A de manera que f está definida sobre todo X. Por lo tanto esta función pertenece al espacio $L^\infty(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ y se tiene $\|f_n - f\|_{L^\infty} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Hemos demostrado que toda sucesión de Cauchy de $L^\infty(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ converge en el sentido de la norma $\|\cdot\|_{L^\infty}$ hacia una función esencialmente acotada: podemos concluir que el espacio $L^\infty(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ es un espacio normado completo lo que termina la demostración.

$\blacksquare$

2. Espacios de funciones de potencia p-eme integrables

Definición 4 *Sea* $0 < p < +\infty$. *Para* $(X, \mathscr{A}, \mu)$ *un espacio medido y para* $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ *una función medible escribimos*

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{1/p} \quad \textit{con } 0 < p < +\infty. \tag{5}$$

Proposición 4 *Sea* $(X, \mathscr{A}, \mu)$ *un espacio medido y sean* $f, g : X \longrightarrow \mathbb{K}$ *dos funciones medibles.*

1) *Si* $|g(x)| \leq |f(x)|$ *en* μ*-casi todas partes, entonces* $\|g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p}$.

2) *Si* $\mu(X) < +\infty$ *entonces* $\|\mathbb{1}_X\|_{L^p} < +\infty$.

Prueba. El primer punto se deduce del hecho que la función $t \longmapsto t^p$ es creciente para todo $0 < p < +\infty$ y de las propiedades de crecimiento de la integral mientras que el segundo punto es inmediato una vez que se observa que $\|\mathbb{1}_X\|_{L^p} = \mu(X)^{1/p}$.

$\blacksquare$

Definición 5 (Espacio $\mathcal{L}^p$) *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido y sea $0 < p < +\infty$ un parámetro real. El espacio de Lebesgue $\mathcal{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ está definido como el conjunto de funciones medibles $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ cuyo módulo a la potencia p-ésima es integrable, es decir:*

$$\mathcal{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K}) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{K} : \|f\|_{L^p} < +\infty\} \tag{6}$$

Ejemplo: consideramos la recta real dotada de su estructura boreliana, $\alpha, \beta > 0$ dos parámetros reales y consideremos la función definida sobre $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ a valores reales:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|^\alpha} & \text{si} \quad |x| \geq 1, \\ \\ \frac{1}{|x|^\beta} & \text{si} \quad 0 < |x| < 1. \end{cases} \tag{7}$$

Observamos fácilmente que si $\alpha > 1/p$ y $\beta < 1/p$, entonces f pertenece al espacio de Lebesgue $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}, dx)$ con $0 < p < +\infty$ y se tiene $\|f\|_{L^p} = [2p(\alpha - \beta)/(\alpha p - 1)(1 - \beta p)]^{1/p}$:

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^p}^p &= \int_{\{|x|<1\}} |x|^{-\beta p} dx + \int_{\{|x|\geq 1\}} |x|^{-\alpha p} dx \\ &= 2/(1 - \beta p) + 2/(\alpha p - 1) = [2p(\alpha - \beta)/(\alpha p - 1)(1 - \beta p)]\,. \end{aligned}$$

Podemos ver directamente gracias a este ejemplo que si α y β toman otros valores, la función f que hemos definido no pertenecerá más al espacio de Lebesgue $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}, dx)$.

$\Longrightarrow$ No existe por lo general ninguna relación de inclusión entre los espacios de Lebesgue $\mathcal{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ y una pequeña modificación de este razonamiento muestra que tampoco existe ninguna relación de inclusión entre $\mathcal{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ y $\mathcal{L}^\infty(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$.

Proposición 5 *Los espacios de Lebesgue $\mathcal{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ con $0 < p < +\infty$ son subespacios vectoriales del conjunto de funciones medibles $\mathcal{M}(X, \mathscr{A}, \mathbb{K})$.*

Lema 1 *Sean a, b dos reales positivos. Tenemos las dos desigualdades:*

1) si $0 < p < 1$ entonces

$$(a + b)^p \leq a^p + b^p, \tag{8}$$

2) si $1 \leq p < +\infty$ entonces

$$(a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p). \tag{9}$$

Prueba de la proposición 5.

- Tenemos, para todo parámetro $0 < p < +\infty$ y para todo λ, las identidades siguientes

$$\|\lambda f\|_{L^p} = \left(\int_X |\lambda f(x)|^p d\mu(x)\right)^{1/p} = \left(\int_X |\lambda|^p |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{1/p} = |\lambda|\, \|f\|_{L^p}. \tag{10}$$

- Sean las funciones f y g pertenecen al espacio $\mathcal{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$, entonces por la desigualdad triangular de $|\cdot|$ y por el crecimiento de la función $t \longmapsto t^p$ (válida para todo $0 < p < +\infty$) obtenemos la estimación puntual

$$|(f + g)(x)|^p \leq (|f(x)| + |g(x)|)^p.$$

  Aplicamos ahora las desigualdades (8) y (9) del lema anterior y obtenemos en función del valor de p las mayoraciones

$$\begin{aligned} &|(f + g)(x)|^p \leq |f(x)|^p + |g(x)|^p && \text{si } 0 < p < 1, \\ &|(f + g)(x)|^p \leq 2^{p-1}(|f(x)|^p + |g(x)|^p) && \text{si } 1 \leq p < +\infty. \end{aligned}$$

Integramos con respecto a la medida μ y utilizando las propiedades de la integral obtenemos

$$\|f+g\|_{L^p}^p \leq \|f\|_{L^p}^p + \|g\|_{L^p}^p \qquad \text{si } 0<p<1, \tag{11}$$

$$\|f+g\|_{L^p}^p \leq 2^{p-1}(\|f\|_{L^p}^p + \|g\|_{L^p}^p) \quad \text{si } 1\leq p<+\infty.$$

Aplicamos una vez más el lema 1 a la parte derecha de estas mayoraciones para obtener

$$\|f+g\|_{L^p} \leq 2^{1/p-1}(\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}) \qquad \text{si } 0<p<1, \tag{12}$$

$$\|f+g\|_{L^p} \leq 2^{1-1/p}(\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}) \quad \text{si } 1\leq p<+\infty, \tag{13}$$

lo que significa que la función suma $f+g$ pertenece al espacio $\mathcal{L}^p(X,\mathscr{A},\mu,\mathbb{K})$ para todo $0<p<+\infty$.

■

Proposición 6 (Desigualdad de Minkowski) *Sea $1\leq p<+\infty$ un índice real y sean dos funciones $f,g : X \longrightarrow \mathbb{K}$ pertenecientes al espacio $\mathcal{L}^p(X,\mathscr{A},\mu,\mathbb{K})$. Tenemos entonces la desigualdad*

$$\|f+g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p} \tag{14}$$

Prueba. Observamos para empezar que si f o g son nulas en μ-casi todas partes no hay nada que demostrar, de manera que podemos suponer sin pérdida de generalidad que $f\neq 0$ y $g\neq 0$ en μ-casi todas partes.

Definimos las cantidades $A(x) = f(x)/\|f\|_{L^p}$ y $B(x) = g(x)/\|g\|_{L^p}$ de tal forma que $\|A\|_{L^p} = 1$ y $\|B\|_{L^p} = 1$. Notando $\tau = \|f\|_{L^p}/(\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p})$ de manera que $\tau \in]0,1[$ podemos entonces escribir

$$|(f+g)(x)|^p = (\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p})^p \, |\tau A(x) + (1-\tau)B(x)|^p \,.$$

Utilizando la desigualdad triangular del módulo $|\cdot|$ y utilizando la convexidad de la función t^p válida cuando $1\leq p<+\infty$, tenemos

$$|(f+g)(x)|^p \leq (\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p})^p \, (\tau|A(x)|^p + (1-\tau)|B(x)|^p) \,.$$

Integramos ahora esta expresión y obtenemos

$$\int_X |(f+g)(x)|^p d\mu(x) \leq (\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p})^p \,,$$

lo que nos permite deducir el resultado deseado extrayendo la raíz p-ésima de esta expresión.

■

Corolario 1 *Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones definidas sobre X a valores en $\mathbb{K}$ pertenecientes al espacio $\mathcal{L}^p(X,\mathscr{A},\mu,\mathbb{K})$ con $1\leq p<+\infty$. Tenemos entonces la estimación*

$$\left\|\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n\right\|_{L^p} \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_{L^p}$$

Corolario 2 *Los espacios $(\mathcal{L}^p(X,\mathscr{A},\mu,\mathbb{K}), \|\cdot\|_{L^p})$ con $1\leq p<+\infty$ son espacios vectoriales semi-normados.*

Normabilidad, convergencia y completitud

Definición 6 (Espacio L^p) *Sea $0 < p < +\infty$ un índice real. El espacio de Lebesgue $L^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$, notado $L^p(X, \mu)$ o $L^p(X)$ si no hay ambigüedad posible, está definido como el conjunto de clases de funciones medibles $[f]$ cuyo módulo a la potencia p-ésima es integrable.*

$$L^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K}) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{K} : \|f\|_{L^p} < +\infty, \quad \mu - c.t.p.\}. \tag{15}$$

Es decir

$$L^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K}) = \mathcal{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})/\mathcal{R}_\mu.$$

El primer resultado que exponemos refleja la estructura vectorial de estos espacios de funciones.

Proposición 7 *Para todo $0 < p < +\infty$, los espacios $L^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ son subespacios vectoriales del conjunto de funciones medibles $\mathcal{M}(X, \mathscr{A}, \mathbb{K})$.*

Prueba. La verificación sigue básicamente las mismas líneas detalladas en la demostración de la proposición 5 pues todos los argumentos expuestos se mantienen si se razona en μ-casi todas partes y se utiliza los representantes de las clases de funciones.

■

Teorema 2 (Normabilidad) *Sea $1 \leq p < +\infty$ un parámetro real, entonces los espacios de Lebesgue $(L^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K}), \|\cdot\|_{L^p})$ son espacios normados.*

Demostración. Debemos comprobar que la funcional $\|\cdot\|_{L^p}$ verifica los tres axiomas de norma; teniendo en cuenta los resultados de las páginas anteriores esta comprobación es directa y no presenta ninguna dificultad. Vemos en efecto que la implicación $f = 0$ μ-c.t.p. $\Longrightarrow \|f\|_{L^p} = 0$ es evidente por la fórmula (10) mientras que la implicación recíproca $\|f\|_{L^p} = 0 \Longrightarrow f = 0$ μ-c.t.p. se deduce del corolario 3.2.9 del folleto. Finalmente la homogeneidad de la funcional $\|\cdot\|_{L^p}$ está dada por la expresión (10) y la desigualdad triangular está dada por la desigualdad de Minkowski (14).

■

$\Longrightarrow$ Los espacios $L^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ son espacios métricos con la distancia inducida por la norma

$$d(f, g) = \|f - g\|_{L^p}$$

y disponemos de todas las propiedades para este tipo de espacios. Diremos entonces que una sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definidas sobre X a valores en $\mathbb{K}$ pertenecientes al espacio $L^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ *converge en el sentido de L^p* hacia una función f si

$$\lim_{n\to+\infty} \|f - f_n\|_{L^p} = 0.$$

*

Teorema 3 (Riesz-Fischer) *Si $1 \leq p < +\infty$ entonces los espacios $(L^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K}), \|\cdot\|_{L^p})$ son espacios de Banach.*

Demostración. Debemos verificar que toda sucesión de Cauchy converge en el sentido de la norma del espacio $L^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ hacia una función que pertenece al espacio $L^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $L^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$. Por definición existe entonces una subsucesión $(f_{n_k})_{k\geq1}$ tal que

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_{L^p} \leq \frac{1}{2^k}, \quad \text{para todo } k \geq 1. \tag{16}$$

Definamos las dos funciones siguientes:

$$g_m(x) = \sum_{k=1}^{m} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| \quad \text{y} \quad g(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|.$$

Por la estimación (16), la desigualdad de Minkowski muestra que $\|g_m\|_{L^p} \leq 1$ para todo $m \geq 1$. Aplicando el corolario 1 obtenemos que $\|g\|_{L^p} \leq 1$ y en particular, por el corolario 3.2.9, que la función suma g es acotada en μ-c.t.p. y de esto se deduce que la serie

$$f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)) \tag{17}$$

es absolutamente convergente en $\mathbb{K}$ para μ-casi todo $x \in X$.

Cuando la suma (17) converge puntualmente sobre $\mathbb{K}$ definimos

$$f(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x))$$

y fijamos $f(x) = 0$ sobre el conjunto restante que es de medida nula. Dado que se tiene

$$f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{N} (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)) = f_{n_N}(x),$$

vemos entonces que se tiene la convergencia puntual $f(x) = \lim\limits_{k \to +\infty} f_{n_k}(x)$ μ-c.t.p. y hemos por lo tanto encontrado una función f que es el límite simple μ-c.t.p. de la sucesión $(f_{n_k})_{k \geq 1}$.

Nos falta demostrar que esta función f es el límite de $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ en el sentido de la convergencia de $L^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$. Para ello vemos que para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m > N$ se tiene $\|f_n - f_m\|_{L^p} \leq \varepsilon$, pues la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. Para todo $m > N$ podemos aplicar el lema de Fatou a la sucesión de funciones $\varphi_{n_k} = |f_{n_k} - f_m|^p$ para escribir

$$\int_X |f(x) - f_m(x)|^p d\mu(x) \leq \lim_{k\to+\infty} \int_X |f_{n_k}(x) - f_m(x)|^p d\mu(x) \leq \varepsilon^p$$

Esto implica que la función $f - f_m$ pertenece al espacio $L^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ de donde se deduce (utilizando la identidad $f = f - f_m + f_m$) que la función f pertenece al espacio $L^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ y a partir de esta estimación se concluye que f_m tiende hacia f en el sentido de $L^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$, es decir

$$\|f - f_m\|_{L^p} \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

■

Proposición 8 (Propiedad de Fatou) *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido, sea $L^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ un espacio de Lebesgue con $1 \leq p < +\infty$ y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones de $L^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ que converge en μ-c.t.p. hacia f y tal que $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_{L^p} < +\infty$. Entonces $f \in L^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ y se tiene la estimación*

$$\|f\|_{L^p} \leq \liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|_{L^p}$$

Prueba. No es muy difícil ver que si $f_n \longrightarrow f$ en μ-c.t.p. entonces se tiene $|f_n|^p \longrightarrow |f|^p$ en μ-c.t.p., lo que nos permite aplicar el lema de Fatou para obtener

$$\|f\|_{L^p}^p = \int_X \liminf_{n\to+\infty} |f_n(x)|^p d\mu(x) \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_X |f_n(x)|^p d\mu(x) = \liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|_{L^p}^p$$

De donde se obtiene el segundo punto de la proposición. Dado que $\liminf\limits_{n\to+\infty} \|f_n\|_{L^p} \leq \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_{L^p} < +\infty$ se tiene que $f \in L^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$, terminando así la demostración.

■

Proposición 9 (Versión L^p del T.C.D. de Lebesgue) *Sea $L^p(X,\mathscr{A},\mu,\mathbb{K})$ un espacio de Lebesgue con $1\leq p<+\infty$ y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones de $L^p(X,\mathscr{A},\mu,\mathbb{K})$ que converge en μ-casi todas partes hacia f.*

1) *Si existe una función $g\in L^p(X,\mathscr{A},\mu,\mathbb{K})$ tal que $|f_n(x)|\leq|g(x)|$ en μ-casi todas partes, entonces se tiene que $\|f-f_n\|_{L^p}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$.*

2) *Si $\|f_n\|_{L^p}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\|f\|_{L^p}$, entonces $\|f-f_n\|_{L^p}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$. (lema de Scheffé)*

Prueba. La primera aserción es la variante en los espacios L^p del teorema de convergencia dominada de Lebesgue. Consideremos pues la sucesión de funciones $\varphi_n(x)=|f(x)-f_n(x)|^p\underset{\mu-c.t.p.}{\longrightarrow}0$. Observando que $\varphi_n(x)=|f(x)-f_n(x)|^p\leq(|f(x)|+|f_n(x)|)^p\leq 2^{p-1}g^p(x)$, podemos aplicar el T.C.D.L. lo que nos permite concluir que $\|f-f_n\|_{L^p}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ pues, por hipótesis, $g^p(x)$ es una función integrable.

Para el segundo punto vamos a aplicar el lema de Fatou a la sucesión de funciones

$$\frac{|f_n(x)|^p+|f(x)|^p}{2}-\left|\frac{f_n(x)-f(x)}{2}\right|^p$$

que convergen en μ-casi todas partes hacia $|f(x)|^p$. Obtenemos entonces que

$$\int_X|f(x)|^p d\mu(x)\leq\liminf_{n\to+\infty}\int_X\frac{|f_n(x)|^p+|f(x)|^p}{2}-\left|\frac{f_n(x)-f(x)}{2}\right|^p d\mu(x).$$

Como por hipótesis tenemos $\|f_n\|_{L^p}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\|f\|_{L^p}$ podemos escribir

$$\|f\|_{L^p}^p\leq\|f\|_{L^p}^p-\limsup_{n\to+\infty}\int_X\left|\frac{f_n(x)-f(x)}{2}\right|^p d\mu(x).$$

Deducimos entonces que $\limsup\limits_{n\to+\infty}\|f_n-f\|_{L^p}^p\leq 0$ de donde se obtiene que $\|f-f_n\|_{L^p}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$.

■

Proposición 10 *Para toda función $f\in L^p(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}or(\mathbb{R}^n),\lambda_n,\mathbb{K})$ con $0<p<+\infty$, para todo $a\in\mathbb{R}^n$ y todo $\alpha>0$ tenemos*

$$\|\tau_a(f)\|_{L^p}=\|f\|_{L^p}\qquad y\qquad \|\delta_\alpha[f]\|_{L^p}=\alpha^{-n/p}\|f\|_{L^p}.$$

Prueba. La verificación es inmediata. Verificamos la segunda identidad

$$\|\delta_\alpha[f]\|_{L^p}^p=\int_{\mathbb{R}^n}|f(\alpha x)|^p dx=\alpha^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^p dx=\alpha^{-n}\|f\|_{L^p}^p.$$

■

3. Desigualdades de Hölder y aplicaciones

Definición 7 (Conjugados armónicos) *Sean p y q dos reales pertenecientes al intervalo $]1,+\infty[$. Diremos que p y q son* conjugados armónicos entre sí *si verifican la igualdad:*

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\qquad \textit{es decir}\qquad q=\frac{p}{p-1}. \tag{18}$$

Si $p=1$ notaremos su índice conjugado $q=+\infty$ y de forma similar si $p=+\infty$ escribiremos $q=1$.

Observemos que si $p \in]0,1[$ también podemos hablar de su conjugado armónico q y para determinarlo basta resolver la ecuación (18), pero en este caso se tiene $q < 0$.

Teorema 4 (Desigualdad de Hölder) *Sean p y q dos números reales pertenecientes al intervalo $]1,+\infty[$ tales que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ y sean $f,g : X \longrightarrow \mathbb{K}$ dos funciones pertenecientes a los espacios $L^p(X,\mathscr{A},\mu,\mathbb{K})$ y $L^q(X,\mathscr{A},\mu,\mathbb{K})$ respectivamente. Entonces tenemos la estimación:*

$$\int_X |f(x)g(x)|d\mu(x) \leq \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{1/p} \left(\int_X |g(x)|^q d\mu(x)\right)^{1/q}. \tag{19}$$

Se obtiene la igualdad en la mayoración anterior si y solo si existen dos constantes c_1 y c_2 tales que $c_1|f(x)|^p = c_2|g(x)|^q$ en μ-casi todas partes.

En el caso $p=1$ y $q=+\infty$ tenemos la desigualdad

$$\int_X |f(x)g(x)|d\mu(x) \leq \left(\int_X |f(x)|d\mu(x)\right)\left(\sup_{x\in X} ess|g(x)|\right). \tag{20}$$

Discutamos la hipótesis exigida sobre los índices p y q: consideramos $X=\mathbb{R}^n$ dotado de la medida de Lebesgue y la dilatación $\delta_\alpha[f]$. Bajo las hipótesis del teorema 4 si reemplazamos las funciones f,g por $\delta_\alpha[f]$ y $\delta_\alpha[g]$ con $\alpha > 0$ en la desigualdad (19) obtenemos:

$$\|\delta_\alpha[f]\delta_\alpha[g]\|_{L^1} \leq \|\delta_\alpha[f]\|_{L^p}\|\delta_\alpha[g]\|_{L^q}$$

Aplicando la propiedad homogénea de los espacios de Lebesgue explicitada en la proposición 10 tenemos

$$\alpha^{-n}\|fg\|_{L^1} \leq \alpha^{-n/p-n/q}\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}.$$

Vemos entonces que si no se tiene la relación $1 = 1/p + 1/q$ es posible, haciendo variar el parámetro α, invalidar la desigualdad de Hölder: es suficiente para ello, si $1/p+1/q > 1$, hacer tender $\alpha \longrightarrow +\infty$ y, si $1/p+1/q < 1$, hacer tender $\alpha \longrightarrow 0$. Este pequeño razonamiento explica y justifica plenamente la relación existente entre los parámetros p y q.

Lema 2 *Sean a,b dos números reales estríctamente positivos. Si los índices p,q son conjugados armónicos, entonces*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \tag{21}$$

Se obtiene la igualdad en la fórmula anterior si y solo si $a^p = b^q$.

Prueba del lema. Apliquemos a la parte izquierda de la fórmula (21) la función logaritmo, obtenemos la identidad

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) = \frac{1}{p}\ln(a^p) + \frac{1}{q}\ln(b^q). \tag{22}$$

Dado que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ podemos utilizar la concavidad del logaritmo para escribir

$$\frac{1}{p}\ln(a^p) + \frac{1}{q}\ln(b^q) \leq \ln\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right). \tag{23}$$

Dado que la función logaritmo es creciente, juntando (22) y (23), terminamos la verificación de la desigualdad (21).

Para comprobar el caso de igualdad de esta estimación es suficiente utilizar la identidad $a^p = b^q$ e inyectarla en la parte derecha de la expresión (21). Para la recíproca, basta resolver la ecuación $bx^p - \frac{1}{p}x^p - \frac{1}{q}b^q = 0$ para obtener $x = b^{q/p}$.

■

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que ninguna de las funciones f, g es nula en μ-casi todas partes pues en esto caso no hay nada que demostrar.

Supongamos para empezar que se tiene $1 < p, q < +\infty$. Queremos aplicar el lema anterior y para ello notamos $a = \frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^p}}$ y $b = \frac{|g(x)|}{\|g\|_{L^q}}$ de manera a obtener la expresión

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^p}}\frac{|g(x)|}{\|g\|_{L^q}} \leq \frac{1}{p}\frac{|f(x)|^p}{\|f\|_{L^p}^p} + \frac{1}{q}\frac{|g(x)|^q}{\|g\|_{L^q}^q}. \tag{24}$$

Integrando con respecto a la medida μ ambas partes de la fórmula anterior obtenemos

$$\frac{1}{\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}}\int_X |f(x)|^p|g(x)|^q d\mu(x) \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

de donde se deduce sin problema la desigualdad buscada.

El caso $p = 1$ y $q = +\infty$ es dejado como ejercicio al lector y el caso de igualdad se deduce del lema 2.

■

4. Relaciones de inclusión entre los espacios de Lebesgue

Proposición 11 *Sean $(E, \|\cdot\|_E)$ y $(F, \|\cdot\|_F)$ dos espacios funcionales de Banach definidos sobre el mismo espacio medido $(X, \mathscr{A}, \mu)$. Si $E \subset F$ entonces la inyección es continua, lo que notaremos $E \hookrightarrow F$, y además existe una constante universal $C > 0$ tal que para todo $f \in E$ se tenga la estimación*

$$\|f\|_F \leq C\|f\|_E. \tag{25}$$

Prueba. Procedemos por el absurdo suponiendo que se tiene la inclusión $E \subset F$ pero que no se tiene la mayoración $\|f\|_F \leq C\|f\|_E$. En este caso existe una sucesión de funciones, que podemos suponer positivas, con $\|f_n\|_E \leq 1$, y tales que

$$\|f_n\|_F > n^3 \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{26}$$

Dado que el espacio E es un espacio de Banach tenemos que la suma $\sum_{n\in\mathbb{N}} n^{-2}f_n$ converge en el sentido de E hacia una función $f \in E$. Como por hipótesis el conjunto E es subconjunto de F se tiene que f pertenece también al espacio F. Esto es imposible pues se tiene por definición $0 \leq n^{-2}f_n \leq f$ de forma que, utilizando (26), se obtiene $n \leq n^{-2}\|f_n\|_F \leq \|f\|_F$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De esta contradicción deducimos que se tiene la estimación (25) con alguna constante C independiente de la función f. Esto muestra también que la aplicación inclusión de E en F es continua.

■

Observación 2 La conclusión de este resultado puede interpretarse de esta manera: cuanto "mayor" sea el espacio funcional, en el sentido en que contiene más funciones, "menor" será su norma.

Teorema 5 (Relaciones de Inclusión) *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido, σ-finito y no-atómico, tal que $\mu(X) < +\infty$. Sean p, q dos reales tales que $1 < p < q < +\infty$. Entonces tenemos las inclusiones estrictas entre espacios de Lebesgue:*

$$L^\infty(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K}) \subsetneq \cdots \subsetneq L^q(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K}) \subsetneq L^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K}) \subsetneq \cdots \subsetneq L^1(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K}). \tag{27}$$

Demostración.

1. Supongamos primero que se tiene $1 \leq p < q < +\infty$. Tenemos entonces que

$$\|f\|_{L^p}^p = \int_X |f(x)|^p \mathbb{1}_X(x)d\mu(x).$$

Aplicamos la desigualdad de Hölder (19) al producto de las funciones f y $\mathbb{1}_X$ de manera a obtener

$$\int_X |f(x)|^p \mathbb{1}_X(x)d\mu(x) \leq \left(\int_X |\mathbb{1}_X(x)|^\alpha d\mu(x)\right)^{1/\alpha} \left(\int_X |f(x)|^{p\beta} d\mu(x)\right)^{1/\beta}$$

en donde hemos fijado $\alpha = \frac{q}{q-p}$ y $\beta = \frac{q}{p}$ de forma que se tiene evidentemente $1/\alpha + 1/\beta = 1$. Luego, puesto que la cantidad $\mu(X)$ es finita obtenemos

$$\|f\|_{L^p}^p \leq \mu(X)^{1/\alpha} \left(\int |f(x)|^q d\mu(x)\right)^{p/q}$$

finalmente, extrayendo la raíz p-ésima en ambos lados de la mayoración anterior escribimos

$$\|f\|_{L^p} \leq \mu(X)^{1/p-1/q} \|f\|_{L^q}$$

lo que nos permite concluir que toda función que pertenece al espacio $L^q(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ pertenece al espacio $L^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ siempre y cuando $1 \leq p < q < +\infty$. Es decir que tenemos la inclusión decreciente de espacios $L^q \subset L^p$.

2. En la segunda etapa suponemos que $1 \leq q < +\infty$ y vamos a verificar que para toda función esencialmente acotada se tiene $\|f\|_{L^q} \leq \mu(X)^{1/q} \|f\|_{L^\infty}$. Para ello utilizamos la desigualdad (20):

$$\|f\|_{L^q}^q = \int_X |f(x)|^q \mathbb{1}_X(x)d\mu(x) \leq \mu(X)\|f\|_{L^\infty}^q$$

de donde se obtiene directamente el resultado deseado: $L^\infty \subset L^q$. Con esto hemos demostrado las inclusiones (27) entre los espacios de Lebesgue y que estas inclusiones son continuas (gracias a la proposición 11).

Veamos para terminar que estas relaciones son estrictas. Como el espacio medido $(X, \mathscr{A}, \mu)$ es σ-finito, existe una sucesión disjunta de conjuntos medibles $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ y tal que $\mu(A_n) < +\infty$. Como este espacio es no-atómico podemos suponer que se tiene para todo n $0 < \mu(A_n) \leq 2^{-n}$. Definimos entonces la función $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)^{-1/q} \mathbb{1}_{A_n}(x)$ de manera que $\|f\|_{L^p}^p = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)^{1-p/q} < +\infty$, de donde se deduce que $f \in L^p$ y que $f \notin L^q$.

■

En el caso cuando la medida del conjunto de base X sea finita, este resultado nos indica que los espacios de Lebesgue L^p con $1 \leq p \leq +\infty$ forman una sucesión estrictamente decreciente de espacios siguiendo el índice p.

5. Desigualdad de Jensen y aplicaciones

Sea $I = (a, b)$ un intervalo de la recta real con $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Una función $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es *convexa* si

$$\varphi(\tau a + (1-\tau)b) \leq \tau\varphi(a) + (1-\tau)\varphi(b)$$

para todo $a, b \in I$ con $\tau \in [0, 1]$. Indiquemos algunas propiedades con el lema siguiente.

Lema 3 *Si $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función convexa entonces*

1) para todo punto t en el interior de I existe una recta que pasa por el punto $(t, \varphi(t))$ que siempre está por debajo del grafo de φ.

2) φ es continua en el interior de I.

Proposición 12 *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio probabilizado (es decir tal que $\mu(X) = 1$) y sea f una función del espacio $L^1(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{R})$.*

1) Si $I = (a, b)$ es un intervalo de $\mathbb{R}$ tal que $f(x) \in I$ para μ-casi todo $x \in X$, entonces $\int_X f d\mu \in I$.

2) Si $f(x) \geq c$ en μ-casi todas partes para algún real c y si $\int_X f d\mu = c$, entonces $f = c$ en μ-casi todas partes.

Prueba. Vamos a empezar suponiendo que $f(x) \geq a$ en μ-casi todas partes para algún real a. Definimos entonces los conjuntos $A = \{x \in X : f(x) > a\}$ y $A_n = \{x \in X : f(x) > a + 1/n\}$ para todo entero $n \geq 1$, de manera que se tienen las inclusiones crecientes de conjuntos $A_1 \subseteq \cdots \subseteq A_n \subseteq \cdots$ y la identidad $A = \bigcup_{n \geq 1} A_n$, de donde se deduce que

$$\lim_{n \to +\infty} \mu(A_n) = \mu(A). \tag{28}$$

Por la propiedad de crecimiento de la integral y por el hecho estamos trabajando sobre un espacio probabilizado tenemos que $\int_X f(x) d\mu(x) \geq a$. Dado que se tiene la mayoración $f(x) \geq a \mathbb{1}_{X \setminus A_n}(x) + (a + 1/n)\mathbb{1}_{A_n}(x)$ podemos escribir, para todo $n \geq 1$:

$$\int_X f(x) d\mu(x) \geq a\mu(X \setminus A_n) + (a + 1/n)\mu(A_n) = a + \frac{1}{n}\mu(A_n).$$

Entonces si $f(x) > a$ en μ-casi todas partes, se tiene $\mu(A_n) > 0$ para algún entero $n \geq 1$ y por lo tanto $\int_X f(x) d\mu(x) > a$. Por otro lado si $\int_X f(x) d\mu(x) = a$ entonces $\mu(A_n) = 0$ para todo $n \geq 1$ y entonces, utilizando (28), obtenemos $\mu(A) = 0$, de donde se deduce que $f = a$ en μ-casi todas partes. Tomando $a = c$ obtenemos la segunda parte de la proposición y un argumento similar muestra que si $f(x) \leq b$ μ-casi todas partes entonces $\int_X f(x) d\mu(x) \leq b$ y si $f(x) < b$ μ-casi todas partes entonces $\int_X f(x) d\mu(x) < b$, de donde se obtiene la primera parte.

■

Teorema 6 (Desigualdad de Jensen) *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido tal que $\mu(X) = 1$ y sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo de la forma (a, b). Si $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función convexa y si $f \in L^1(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{R})$ es una función tal que $f(x) \in I$ para μ-casi todo $x \in X$, entonces $\int_X f(x) d\mu(x) \in I$, $\varphi(f)$ es μ-integrable y se tiene la desigualdad*

$$\varphi\left(\int_X f(x) d\mu(x)\right) \leq \int_X \varphi(f)(x) d\mu(x).$$

Demostración. Fijemos $t = \int_X f(x) d\mu(x)$, tenemos entonces por la proposición 12 que $t \in I$. Sabemos además por el lema 3 que existe un real α tal que $\varphi(u) \geq \varphi(t) + \alpha(u - t)$ para todo $u \in I$ puesto que φ es convexa sobre I. Deducimos entonces la mayoración $\varphi(f)(x) \geq \varphi(t) + \alpha(f(x) - t)$ para μ-casi todo $x \in X$. Integrando esta desigualdad y utilizando el hecho que $\mu(X) = 1$ obtenemos

$$\int_X \varphi(f)(x) d\mu(x) \geq \int_X \varphi(t) + \alpha(f(x) - t) = \varphi(t) + \alpha \int_X f(x) d\mu(x) - \alpha t = \varphi\left(\int_X f(x) d\mu(x)\right)$$

lo que nos permite terminar la demostración.

■

6. Espacios de sucesiones

Definición 8 (Espacios ℓ^p) *Sea $X = \mathbb{N}$ o $\mathbb{Z}$, sea $0 < p < +\infty$ un real y sea $a = (a_n)_{n\in X}$ una sucesión a valores en $\mathbb{K}$. Diremos que la sucesión $a = (a_n)_{n\in X}$ es de* potencia p-eme sumable *si la siguiente cantidad es finita.*

$$\|a\|_{\ell^p} = \left(\sum_{n\in X} |a_n|^p\right)^{1/p}. \tag{29}$$

Definimos entonces el espacio de sucesiones p-eme sumables a valores en $\mathbb{K}$ con la expresión

$$\ell^p(X, \mathbb{K}) = \{(a_n)_{n\in X} : \|a\|_{\ell^p} < +\infty\}.$$

Demos un ejemplo de sucesión que pertenece a estos espacios. Fijemos $X = \mathbb{Z}$ y definamos

$$a_n = \begin{cases} 1/|n|^{2/p} & \text{si } n \neq 0, \\ 1 & \text{sino.} \end{cases}$$

El lector verificará sin problema que $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^p(\mathbb{Z})$ para todo $0 < p < +\infty$; en cambio si consideramos la sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ definida de forma similar, pero fijando $b_n = 1/|n|^{1/p}$ si $n \neq 0$, se tiene que $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}} \notin \ell^p(\mathbb{Z})$.

En el caso cuando $p = +\infty$, el espacio correspondiente está dado por la siguiente definición.

Definición 9 (Espacios ℓ^∞) *Una sucesión $a = (a_n)_{n\in X}$ a valores en $\mathbb{K}$ es acotada si*

$$\|a\|_{\ell^\infty} = \sup_{n\in X} |a_n| < +\infty. \tag{30}$$

Caracterizamos el espacio de sucesiones acotadas a valores en $\mathbb{K}$ con la fórmula

$$\ell^\infty(X, \mathbb{K}) = \{(a_n)_{n\in X} : \|a\|_{\ell^\infty} < +\infty\}.$$

Un ejemplo sencillo de sucesión que pertenece a este espacio está dado por la sucesión $a_n = (-1)^n$ para todo $n \in X$. Notemos que esta sucesión no pertenece a ningún espacio ℓ^p con $0 < p < +\infty$, lo que puede dar una primera idea de las inclusiones entre estos espacios; daremos los enunciados precisos un poco más adelante.

Proposición 13 *Sea $0 < p < +\infty$ un real. Los espacios de sucesiones $\ell^p(X, \mathbb{K})$ y $\ell^\infty(X, \mathbb{K})$ son espacios vectoriales.*

Proposición 14 (Desigualdad de Hölder discreta) *Sea $1 \leq p \leq +\infty$ un real y q su conjugado armónico, entonces tenemos la desigualdad de Hölder para todas las sucesiones $(a_n)_{n\in X} \in \ell^p(X, \mathbb{K})$ y $(b_n)_{n\in X} \in \ell^q(X, \mathbb{K})$:*

$$\sum_{n\in X} |a_n b_n| \leq \|a\|_{\ell^p} \|b\|_{\ell^q}. \tag{31}$$

Proposición 15 (Desigualdad de Minkowski discreta) *Sean $(a_n)_{n\in X}$ y $(b_n)_{n\in X}$ dos sucesiones pertenecientes al espacio $\ell^p(X, \mathbb{K})$ con $1 \leq p \leq +\infty$, entonces se tiene la desigualdad:*

$$\|a + b\|_{\ell^p} \leq \|a\|_{\ell^p} + \|b\|_{\ell^p}. \tag{32}$$

Prueba. De la misma forma que en la proposición 14 tratamos solamente el caso $1 < p < +\infty$ y dejamos los casos límites al lector. Escribimos entonces:

$$|a_n + b_n|^p = |a_n + b_n||a_n + b_n|^{p-1} \leq |a_n||a_n + b_n|^{p-1} + |b_n||a_n + b_n|^{p-1}.$$

Sumando con respecto a $n \in X$ y aplicando la desigualdad de Hölder en la parte derecha de esta expresión obtenemos la mayoración

$$\begin{aligned}\sum_{n\in X}|a_n+b_n|^p &\leq \sum_{n\in X}|a_n||a_n+b_n|^{p-1}+\sum_{n\in X}|b_n||a_n+b_n|^{p-1}\\ &\leq (\|a\|_{\ell^p}+\|b\|_{\ell^p})\|a+b\|_{\ell^p}^{p-1}\end{aligned}$$

de donde se deduce el resultado deseado.

■

Teorema 7 *Si $1\leq p\leq +\infty$ los espacios $\ell^p(X,\mathbb{K})$ son espacios de Banach.*

6.1. Propiedades de inclusión de los espacios ℓ^p

Definición 10 (Espacio c_0) *Sea $X=\mathbb{N}$ o $\mathbb{Z}$ y sea $a=(a_n)_{n\in X}$ una sucesión a valores en $\mathbb{K}$. Diremos que esta sucesión* se anula en el infinito *o que* tiende a cero al infinito *si se tiene*

$$\lim_{|n|\to+\infty}|a_n|=0.$$

Notaremos $c_0(X,\mathbb{K})$ el conjunto formado por estas sucesiones.

Evidentemente toda función nula a partir de un cierto rango pertenece a este espacio mientras que la sucesión constante $a_n=1$ para todo $n\in X$ no pertenece a este espacio de sucesiones.

Proposición 16 *El espacio de sucesiones $c_0(X,\mathbb{K})$ es un espacio vectorial de Banach dotado de la norma $\|\cdot\|_{\ell^\infty}$.*

Contrariamente al teorema de inclusión 5 expuesto en la página 10 se tienen relaciones de inclusión generales entre los espacios de sucesiones como nos lo indica el teorema a continuación.

Teorema 8 (Relaciones de inclusión) *Sea $X=\mathbb{N}$ o $\mathbb{Z}$. Tenemos las inclusiones estrictas de espacios siguiente:*

$$\ell^1(X)\subsetneq\ell^p(X)\subsetneq\cdots\subsetneq\ell^q(X)\subsetneq\cdots\subsetneq c_0(X)\subsetneq\ell^\infty(X). \tag{33}$$

Demostración. Sea $a=(a_n)_{n\in X}$ una sucesión no idénticamente nula.

1. Mostremos que se tiene la inclusión $c_0(X,\mathbb{K})\subsetneq\ell^\infty(X,\mathbb{K})$.

   Dado que la cantidad $\|\cdot\|_{\ell^\infty}$ es una norma para estos dos espacios se tiene inmediatamente que si $a\in c_0(X,\mathbb{K})$ entonces $a\in\ell^\infty(X,\mathbb{K})$; sin embargo no se tiene la recíproca pues la sucesión constante $a_n=1$ para todo $n\in X$ pertenece al espacio $\ell^\infty(X,\mathbb{K})$ pero no se anula al infinito.

2. Mostremos ahora que para todo $1\leq p<+\infty$ se tiene la mayoración

   $$\|a\|_{\ell^\infty}\leq\|a\|_{\ell^p} \tag{34}$$

   y que todos los espacios $\ell^p(X,\mathbb{K})$ están contenidos estrictamente en el espacio $c_0(X,\mathbb{K})$.

   En efecto, si la sucesión $(a_n)_{n\in X}$ es tal que $\left(\sum_{n\in X}|a_n|^p\right)^{1/p}<+\infty$ entonces se tiene que $|a_n|\underset{|n|\to+\infty}{\longrightarrow}0$; además la estimación $\|a\|_{\ell^\infty}^p=\sup\limits_{n\in X}|a_n|^p\leq\sum_{n\in X}|a_n|^p=\|a\|_{\ell^p}^p$ muestra que todos los espacios $\ell^p(X,\mathbb{K})$ están incluidos en $c_0(X,\mathbb{K})$. Para verificar que esta inclusión es estricta consideramos la sucesión $a_n=|n|^{-1/p}$ si $n\neq0$ y $a_0=1$: tenemos entonces que $a\in c_0(X,\mathbb{K})$ pero $a\notin\ell^p(X,\mathbb{K})$.

3. Finalmente, sean p y q dos reales tales que $1 \leq p < q < +\infty$. Verifiquemos que se tiene la desigualdad $\|a\|_{\ell^q} \leq \|a\|_{\ell^p}$ para toda sucesión $a = (a_n)_{n\in X} \in \ell^p(X, \mathbb{K})$.

   Para ello utilizamos la desigualdad de Hölder para escribir

$$\|a\|_{\ell^q}^q = \sum_{n\in X} |a_n|^{q-p}|a_n|^p \leq \sup_{n\in X}|a_n|^{q-p} \sum_{n\in X} |a_n|^p. \tag{35}$$

   Como se tiene $\sup\limits_{n\in X}|a_n|^{q-p} = (\sup\limits_{n\in X}|a_n|^q)^{(q-p)/q}$, por la estimación (34) podemos escribir la mayoración $(\sup\limits_{n\in X}|a_n|^q)^{(q-p)/q} \leq \|a\|_{\ell^p}^{q-p}$ e inyectamos esta estimación en la expresión (35) de manera que se tiene $\|a\|_{\ell^q}^q \leq \|a\|_{\ell^q}^{q-p}\|a\|_{\ell^p}^p$ es decir $\|a\|_{\ell^q}^p \leq \|a\|_{\ell^p}^p$ de donde se deduce la estimación deseada. Para comprobar que esta inclusión es estricta utilizamos el mismo ejemplo anterior con la sucesión $a_n = |n|^{-1/p}$ si $n \neq 0$ y $a_0 = 1$: vemos que $(a_n)_{n\in X} \in \ell^q(X, \mathbb{K})$ pues $q > p$ pero $(a_n)_{n\in X} \notin \ell^p(X, \mathbb{K})$.

■

Este teorema nos dice que existe una diferencia notable al nivel de las inclusiones entre los espacios L^p y ℓ^p.